11



حکومەتی هەرێمی کوردستان- عێراق
وەزارەتی پەروەردە - بەڕێوەبەرایەتی گشتی پرۆگرام و چاپەمەنییەکان

بیرکاری بۆ هەموان

کتێبی خوێندکار
پۆلی یازدەهەمی زانستی

چاپی هەشتەم
٢٠١٦ ز / ٢٧١٦ کوردی / ١٤٣٧ ک

سەرپەرشتی هونەری چاپ
عوسمان پیرداود کواز
ئاری محسن احمد

بــــەشــــی

1

Geometry ئـــــەندازە

بەشی 2

سیستمی هاوکێشەکان و لاسەنگە هێڵییەکان

Systems of Linear Equations and Inequalities



بـــەشـــی

3

Matrices پرێزکراوەکان

بـــەشـــی

4

نەخشە توانییەکان و لۆگاریتمییەکان

Exponential and Logarithmic Functions

بـــەشـــی

5

سیفەتەکانی نەخشەکان

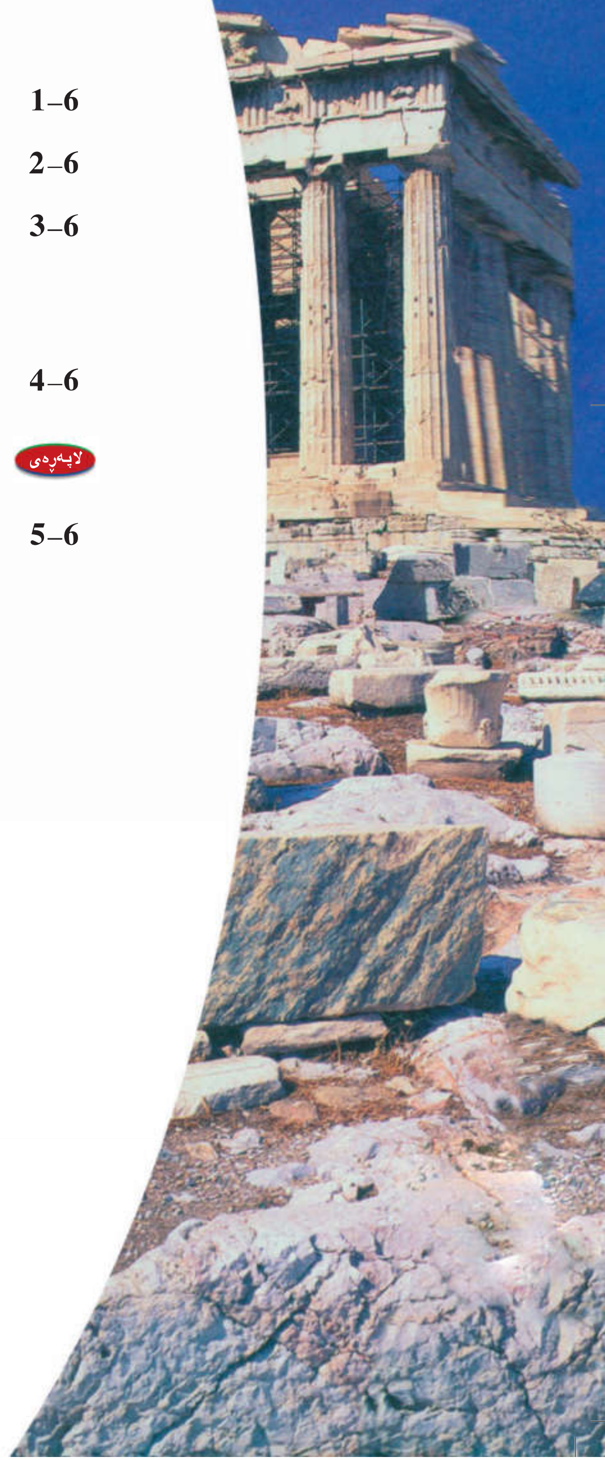
Properties of Functions

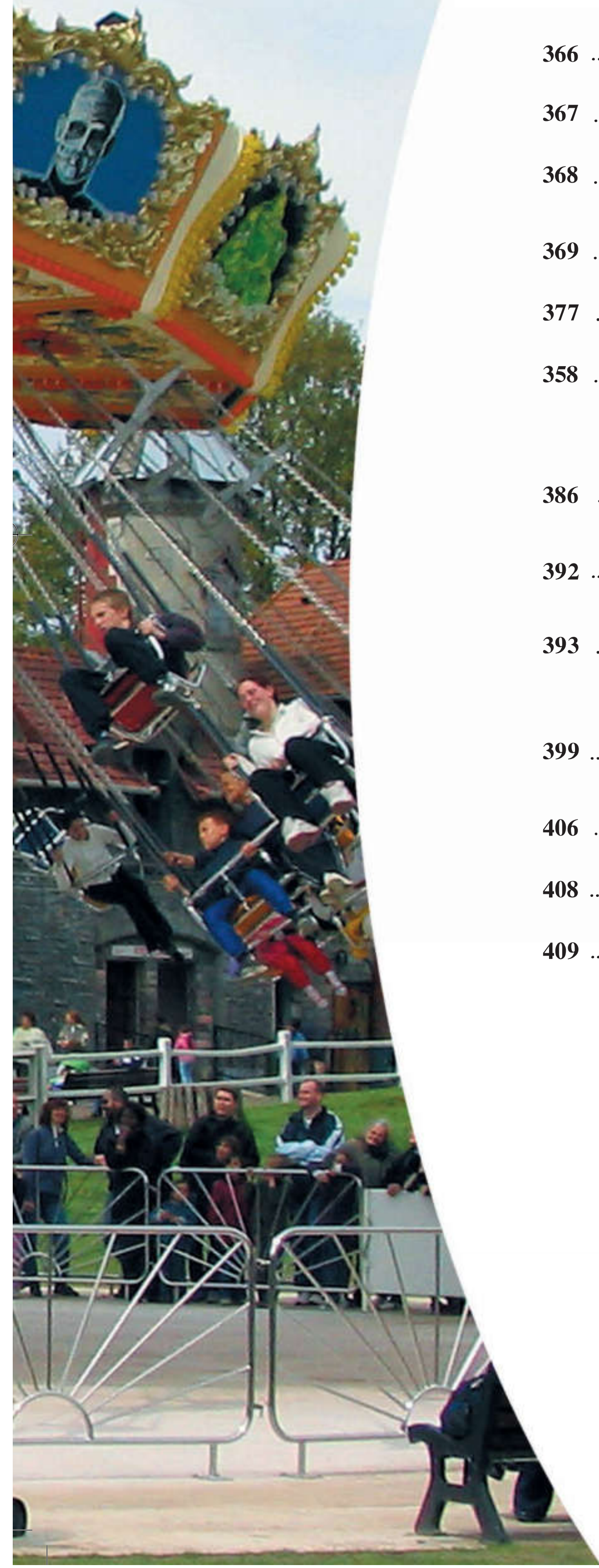
بـــەشـــی

6

یەکبەدوای یەکەکان و زنجیرەکان

Sequences and Series





بــەشــی

7

سێگۆشەزانی

Trigonometry

بەشی

1

ئەندازە Geometry

بەشی یەكەم

وانەكان

تەنە زێڕینەكان

وێنەكە ژمارەیەك چوارلای ڕوو لەناو یەكتر ڕووندەكاتەوە دەتوانیت ڕووەكان بەكاربێنێت بۆ دروستكردنی نموونە چوارییەكان و تەنی ئەندازەیی تر.

ئایا تۆ ئامادەیت؟

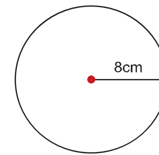
زاراوەكان

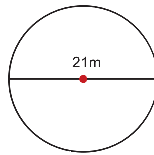
هەر زاراوەیەك بەپێی پێناسەكەی كەلەلای چەپدا هاتووە ببەستەوە.

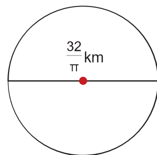
1	لاتەریب	أ	دووری دەوری بازنەكە.
2	نیوەتیرە	ب	رێژەی چێوەی بازنەكە بۆ تیرەكەی.
3	پای π	ج	هەموو لایەكانی جووتن.
4	چێوەی بازنە	د	دووری نێوان چەقی بازنەو ئەو خاڵەی دەكەوێتە سەری.
		هـ	چوارلایەكە هەرلایەك لە لایەكانی بەلای بەرامبەری تەریبە.

چێوە و رووبەری بازنە

رووبەرو چێوەی هەریەك لەم بازنانە بدۆزەوە.

5 

6 

7 

هەژماركردنی دووری و دیاریكردنی ناوەڕاستی پارچە راستەهێڵ

درێژی $\overline{AB}$ و پۆوتانی ناوەڕاستەكەی بدۆزەوە.

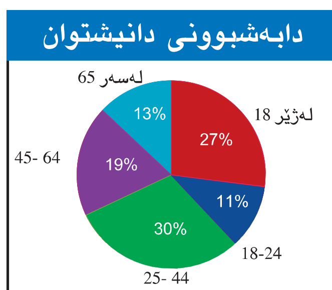
8 $A(-3, 2)$ ، $B(5, 6)$

9 $A(-4, -4)$ ، $B(2, -3)$

10 $A(0, 1)$ ، $B(-3, 4)$

بازنە ڕوونكردنەوەییەكان

ئەم بازنە ڕوونكردنەوەیەی بەرامبەر بەپێی تەمەنی دانیشتوانی شارێك دەردەخات كە ژمارەیان ٤٠٠٠٠٠ كەسە.



11 ژمارەی ئەو دانیشتوانەی تەمەنیان لەنێوان ١٨و٢٤ساڵدایە چەندە؟

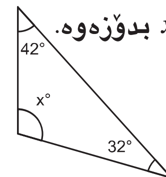
12 ژمارەی ئەو دانیشتوانەی تەمەنیان لە ١٨ساڵ كەمترە چەندە؟

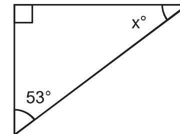
13 رێژەی سەدی ئەو دانیشتوانەی تەمەنیان ٤٤ ساڵ زیاترە چەندە؟

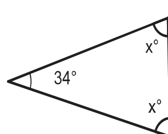
14 ژمارەی ئەو دانیشتوانەی تەمەنیان لە ٤٤ساڵ زیاترە چەندە؟

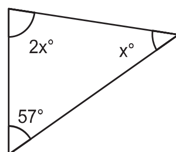
كۆی پێوانەی گۆشەكانی سێگۆشە

بەهای x بدۆزەوە.

15 

16 

17 

18 

بەشی
1

ڕێبەری خوێندن: تێڕوانین لەسەر بەشەکە

لە ڕابردوودا

ئەمانەت خوێندووە

- ڕووتەختی پۆوتانەکان.
- سێگۆشەکان و گۆشەکانیان.
- جێگۆڕکێ ئەندازەییەکان وەك ڕاکێشان و خولانەوە.
- پارچە ڕاستەهێڵەکان.
- هەژمارکردنی ڕووبەر و چێوەی بازنە.
- یاسای دووری و پۆوتانی ناوەڕاست لە ڕووتەختی پۆوتاندا.
- بەکارهێنانی بازنە بۆ شیکارکردنی پرسیارەکان.

لەم بەشەدا

ئەمانە فێردەبیت

- بۆشایی پۆوتان.
- چەندلایەکان و گۆشەکانیان.
- ئەو جێگۆڕکێ ئەندازەییەی کە پێوانەکان دەگۆڕێت.
- پارچە ڕاستەهێڵە ئاراستەکراوەکان یان ئاراستەبڕەکان.
- چەند لاڕێکەکان و هەژمارکردنی ڕووبەرەکانیان.
- یاسای دووری و پۆوتانی ناوەڕاست لە بۆشایی پۆوتاندا.
- پارچەکان و کەرتە بازنەییەکان و هەژمارکردنی ڕووبەرەکانیان و درێژی کەوانە.

لە داهاتوودا

دەتوانیت کارامەییەکانی ئەم بەشە بەکاربێنیت بۆ:

- دامەزراندنی بنچینەیەکی بەهێز بۆ خوێندنی باڵا.
- تۆژینەوەی ئەو کارانەی پەیوەندییان بەو بابەتانەوە هەیە کە فێریان دەبیت.
- شیکارکردنی ئەو پرسیارانەی پەیوەندییان بە ئەندازەی ناوەخۆ و تەلارسازییەوە هەیە.
- هەژمارکردنی دوورییەکان و شرۆڤەکردنی ئەو زانیارییانەی لەڕۆژنامە و گۆڤارەکاندا دێت.
- لەژیانی ڕۆژانەدا.

زاراوەکان Vocabulary

زاراوەکان	Vocabulary
بۆشایی پۆوتان	3D coordinate system
قۆقز	convex
قۆپاو	concave
چەند لای ڕێك	regular polygon
گەورەکردن	enlargement
بچووکردنەوە	compression
ئاراستە بڕ	vector
ئەستوندەگ	apothem
چەقی بازنە	center of the circle
چەقی چەندلایڕێك	center of a regular polygon
چەقەگۆشە	central angle
زۆر ڕوو	polyhedron
درێژی کەوانە	arc length
پارچە بازنەیی	segment
کەرتە بازنەیی	sector

ڕۆشناییەك لەسەر زاراوەکان

بۆ ئەوەی لەگەڵ هەندێك لەم زاراوانەدا ڕابێی کە لەم بەشەدا هاتووە ئەم هەنگاوانە پەیڕەوبکە:

1. ڕووتەختی پۆوتانەکانت ناسی ئەم زانیارییە چۆن یارمەتیت دەدات بۆ ناسینەوەی **بۆشایی پۆوتان**.
2. وشەی ڕێك واتە پابەندبوون بەسیستەمەوە واتەی **چەندلای ڕێك** لای تۆ چی دەگەینێت؟
3. کاتێك پزیشك چاوت دەکاتەوە ئەوا گلێنەکەی گەورەتر دەبێت شێوەیەکی ئەندازەیی **گەورەکراوی** شێوەیەکی ئەندازییە، مانای چیە؟
4. هەندێك ئاراستەبڕ بە پارچە ڕاستەهێڵێکی **ئاراستەکراو** دەناسرێت، ئەم پێناسەیە بۆ تێگەیشتنی واتای ئاراستەبڕ چۆن بەکاردەهێنیت؟
5. وشەی ئەستوندەنگ بوونی ئەستون دەبەخشێت ئایا لە پێناسەی **ئەستوندەگدا** ئەوە دەبینیت؟
6. وشەی ڕووبەر چ دەگەینێت؟ بەڕای تۆ **ڕووبەری گۆ** چییە؟
7. کەباسی شتێك دەکرێت چەقییە واتە لە چەقەکەیدایە ئەوە چۆن یارمەتیت دەدات بۆ تێگەیشتن لە دەربڕینی **چەقەگۆشە** لەبازنەدا، لەچەندلایەکی ڕێکدا.

بەشی 1



بیرکاری به خوێندنەوە و نووسین



ستراتیژیەتی خوێندنەوە: خوێندنەوە بۆ شیکارکردنی پرسیار

کاتێك دەست بەخوێندنەوەی دەقی پرسیارێك دەکەیت بۆ شیکارکردنی، لەوانەیە هەست بە نائومێدییەك بکەیت بەرامبەر ئەوەی دەیخوێنیتەوە کاتێك بەشە جیاجیاکانی پرسیارەکە لێك جیادەکەیتەوە و دەیانخەیتە سەر زمانی بیرکاری بۆت دەردەکەوێت پرسیارەکە هاوشێوەی پرسیارەکانی پێشوترە کە شیکارت کردوون.

ڕێنماییەکانی خوێندنەوە

- هەر ڕستەیەك بەهێواشی بخوێنەوە، مەبەستی وشەکان تۆماربکە و لە خوێندنەوەکەت بەردەوامبە.
- وشەکان و ڕستەکان بۆ زمانی بیرکاری بگۆڕە.
- هێڵێك بەژێر داواکراوە دیارەکاندا بهێنە.
- هێلکارییەك بکێشە، هێلکارییەکە ناوبنێ بۆ ئەوەی پێت ڕابگەیەنێت چی دەنوێنێت.
- دووبارە پرسیارەکە بخوێنەوە پێش ئەوەی دەست بەشیکارەکەی بکەیت.

ئەو ڕێنماییانەی سەرەوە بۆ تێگەیشتن لە پرسیارەکەی بەرامبەر بەکاربێنە.

لەکۆتایی ڕۆژێکی سەیرانی سەر شاخێکدا تیمێکی سەیرانکەران چادرێکیان لەدووری 3 km خۆرهەڵاتی خاڵی دەرچوون و 7 km باکوور و لە بەرزایی 0.6 km هەڵدا دووری نێوان چادرگەکە و خاڵی دەرچوون بدۆزەوە.

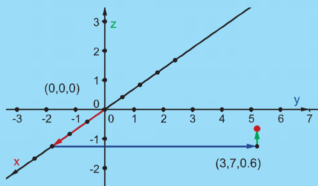
جیاکردنەوەی وشە کلیلیەکان

لە کۆتایی ڕۆژێکی سەیرانی سەر شاخێکدا تیمێکی سەیرانکەران چادرێکیان لە دووری 3 km خۆرهەڵاتی خاڵی دەرچوون 7 km باکور لە بەرزایی 0.6 km هەڵدا، دووری نێوان چادرگەکە و خاڵی دەرچوون بدۆزەوە.

وەرگێڕانی دەق بۆ بیرکاری

دەکرێت خاڵی دەرچون بەخاڵی بنەڕەت $(0, 0, 0)$ دابنرێت هەروەك دەکرێت چادرگەکە بەخاڵی $(3, 7, 0.6)$ بنوێنرێت دەتوانیت دوورییەکەی بەبەکارهێنانی یاسای دووری لە بۆشایی پۆوتاندا هەژماربکەیت.

هێلکاری



یاسای دووری لە بۆشایی پۆوتاندا بۆ هەژمارکردنی دووری نێوان چادرگەکە و خاڵی دەرچوون بەکاربێنە.

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

$$= \sqrt{(3-0)^2 + (7-0)^2 + (0.6-0)^2} \approx 7.6$$

دووری نێوان چادرگەکە و خاڵی دەرچوون بریتییە لە 7.6 km بەنزیکەیی.

هەوڵبدە

لەم پرسیارەی خوارەوەدا ڕێنماییەکان بۆ خوێندنەوەی پرسیارەکە بەکاربهێنە شیکاری مەکە.

- وشەکان دیاریبکە – کلیلەکان.
- هەر ڕستەیەك بۆ بیرکاری وەربگێڕە.
- هێلکارییەك بکێشە پرسیارەکە بنوێنێت.

1. بەرزی لولەکێك 4m و نیوەتیرەکەی 9m ، دووهێندکردنی هەریەك لەم پێوانانە چ کاریگەرییەکی لەسەر قەبارەی لولەکەکە دەبێت؟



1-1 بۆشایی پۆوتان
3D Coordinate system

بۆچی ئەمە فێردەبین؟
لە پێشبڕکێیەکدا دەتوانیت گەنجینەیەکت دەستکەوێت، بەبەکارهێنانی سیستمی پۆوتانەکان لەسێ دووریدا، یارمەتیت دەدات تاشوێنی ئەو گەنجینەیە لەسەر زەوی دیاریبکەیت.

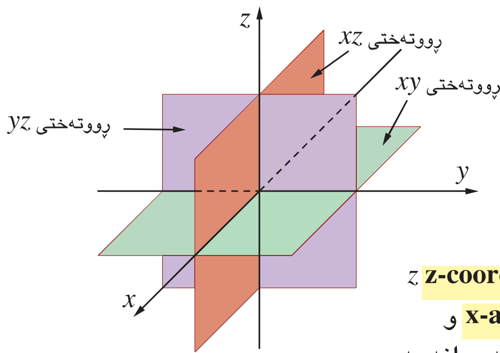
ئامانجەکان
- خاڵەکان و هاوکێشە هێڵییەکان لە بۆشایی پۆوتاندا دەنوێنێت.

زاراوەکان
Vocabulary

بۆشایی پۆوتان
3D Coordinate system

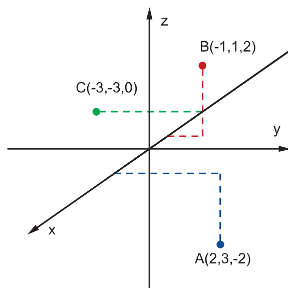
تەوەری سێیەم
z-axis

سستەمی GPS (سێ دوورییەکان) بۆ دیاریکردنی شوێنەکان بەکاردێت لەڕێی دیاریکردنی دوو هێڵی درێژی و پانی کە شوێنەکەی لێیە و دیاریکردنی بەرزییەکەی



هەروەك چۆن رووتەختی پۆوتان رووتەختێکی ئاوەڵی سیستەمی پۆوتانە، شوێنی هەر خاڵێك بەدوو ژمارە، کە پۆوتانی یەکەمیان x و دووەمیان y دیاریدەکات کەوابوو بۆشایی پۆوتان ئەو بۆشاییەیە کە ئاوەڵی سیستمی پۆوتانەکانە و شوێنی هەرخاڵێك بەسێ ژمارە دیاریدەکرێت کە ئەمانەن **تەوەری یەکەم x-coordinate** x و **تەوەری دووەم y-coordinate** y و **تەوەری سێیەم z-coordinate** z دەبێت. بۆشایی پۆوتان 3 تەوەرەی تێدایە **تەوەری یەکەم x-axis** و **تەوەری دووەم y-axis** و **تەوەری سێیەم z-axis** دەبێت ئەم تەوەرانە بە رووتەختی پۆوتان دیاریدەکرێت **رووتەختی** xy و **رووتەختی** yz و **رووتەختی** zx.

نموونە 1 دیاریکردنی خاڵەکان لە بۆشایی پۆوتاندا



هەریەك لەم خاڵانە لەبۆشایی پۆوتاندا دابنێ.

أ خاڵی $A(2, 3, -2)$

لەخاڵی بنەڕەتەوە دوویەکە بەرەوپێش لەسەر تەوەری یەکەم بجوڵێ پاشان 3 یەکە بۆلای راست بەئاراستەی تەریب بە تەوەری دووەم پاشان 2 یەکە بۆ خوارەوە بەئاراستەی تەریب بەتەوەری سێیەم.

ب خاڵی $B(-1, 1, 2)$

لەخاڵی بنەڕەتەوە یەك یەکە بۆ دواوە لەسەر تەوەری یەکەم بجوڵێ، پاشان بۆ لای راست بەئاراستەی موجەب تەریب بە تەوەری دووەم پاشان دوو یەکە بۆ سەرەوە تەریب بەتەوەری سێیەم.

ج خاڵی $B(-3, -3, 0)$

لەخاڵی بنەڕەتەوە 3 یەکە بۆ دواوە لەسەر تەوەری یەکەم بجوڵێ پاشان 3 یەکە بۆ لای چەپ بەئاراستەی تەریب بە تەوەری دووەم.



1. ئەم خاڵانە دیاریبکە

أ خاڵی $D(1, 3, -1)$ ب خاڵی $E(1, -3, 1)$ ج خاڵی $F(0, 0, 3)$

بیرت بێتەوە کە هاوکێشەی ڕاستەهێڵ لە ڕووتەختی پۆوتاندا هاوکێشەیەکی هێڵییە وەك $ax+by+c=0$ بەدوو گۆڕاوی x و y هەموو خاڵەکانی (x, y) لە ڕووتەختی پۆوتاندا، پۆوتانەکانی پاسادانی ئەم هاوکێشە هێلییە دەکەن. هەروەك چۆن هاوکێشەی ڕووتەخت لەبۆشایی پۆوتاندا هاوکێشەیەکی هێلییە $ax+by+cz+d=0$ بە گۆڕاوەکانی z و y و x هەموو خاڵەکانی (x, y, z) لە بۆشایی پۆوتاندا پاسادانی ئەو هاوکێشە هێڵییە دەکات کە ڕووتەختەکە پێکدێنێت لەبەرئەوەی سێ خاڵ لەرێکی یەکترنەبن بەسە بۆ پێکهێنانی ڕووتەخت لە بۆشاییدا ئەوا وێنەی یەکتربڕینەکانی ڕووتەختەکە خاوەنی هاوکێشەی $ax+by+cz+d=0$ لەگەڵ تەوەرەکانی سێ پۆوتانەکاندا بەسە بۆ نواندنی ئەو هاوکێشەیە لە بۆشایی پۆوتانەکاندا.

نموونـــــە 2 نواندنی هاوکێشەی هێڵی لە بۆشایی پۆوتاندا

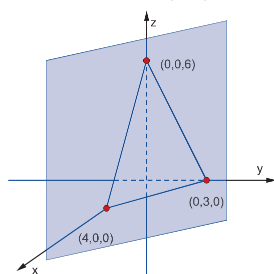
ئەم هاوکێشە هێڵییە لەبۆشایی پۆوتاندا بنوێنە $3x+4y+2z=12$

هەنگاوی 1 یەکتربڕینەکانی ڕووتەختەکە لەگەڵ تەوەری پۆوتانەکاندا بدۆزەوە.

لەگەڵ تەوەری یەکەم: $3x+4\times 0+2\times 0=12 \quad x=4$

لەگەڵ تەوەری دووەم: $3\times 0+4y+2\times 0=12 \quad y=3$

لەگەڵ تەوەری سێیەم: $3\times 0+4\times 0+2z=12 \quad z=6$



هەنگاوی 2 وێنەی خاڵەکانی $(4, 0, 0)$ و $(0, 3, 0)$ و $(0, 0, 6)$ دیاریبکە پاشان ئەو ڕووتەختە بکێشە کە بەو خاڵانەدا دەڕوات.

یارمەتی

بۆ ئەوەی یەکتربڕینی ڕوتەختێك لەگەڵ یەکێك لە تەوەرەکاندا بدۆزیتەوە لەجیاتی پۆوتانی دوو تەوەرەکانی تر 5 دابنێ و هاوکێشەکە شیکاربکە.



2. هاوکێشەی هێڵی $x-4y+2z=4$ لەبۆشایی پۆوتاندا بنوێنە.

نموونـــــە 3 جێبەجێکردن لە تەکنەلۆجیا

لەیارییە باوەکانی بژمێر یاری نواندنی دەورەکانە (أدوار)، هەر یاریکەرێك تیایدا شارستانیەتێك دروست دەکات، لەسەرەتادا هەر یاریکەرێك 100 پارچە زێر بۆ کڕینی پێداویستییەکان دەدات لەدوایدا یاریکەرەکان پێشبڕکێ لەسەر هێشتنەوەی شارستانیەتییەکان بەزیندوویی دەکەن لە یاساکانی یارییەکەدا هاتووە، نرخی یەکەیەکی خواردن دوو پارچە زێرە ونرخی یەکەیەکی تەختە 3 پارچە زێرە و نرخی یەکەیەکی بەرد 5 پارچە زێرە.

أ هاوکێشەیەکی هێڵی بە سێ گۆڕاو بنووسە بارەکە بنوێنێت.

هێمای f بۆ بڕی خواردن و w بۆ بڕی تەختە و s بۆ بڕی بەرد بەکاربێنە.

100 پارچە زێر	=	نرخی خواردن	+	نرخی تەختە	+	نرخی بەرد
100	=	$2f$	+	$3w$	+	$5s$

ب خشتەی بەرامبەر بەکاربێنە بۆ دیاریکردنی بڕی ئەو بەردەی کەهەر یاریکەرێك دەیکڕێت

دانا $2(20)+3(10)+5s=100 \quad s=6$

زانا $2(15)+3(15)+5s=100 \quad s=5$

خەسرەو $2(40)+3(5)+5s=100 \quad s=1$

پێشرەو $2(25)+3(10)+5s=100 \quad s=4$

یاریکەر	بڕی خواردن	بڕی تەختە	بڕی بەرد
دانا	20	10	■
زانا	15	15	■
خەسرەو	40	5	■
پێشرەو	25	10	■

دانا دەتوانێت 6 یەکە بەرد بکڕێت کەچی زانا دەتوانێت 5 یەکە و خەسرەو یەك یەکە و پێشرەو 4 یەکە بکڕێت.

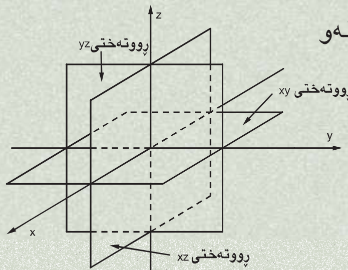


ئازاد بڕیاریدا لەکۆتایی پشووی هەفتەدا گەشتێك بەپێ ئەنجام بدات لە خۆئامادەکردندا بۆ گەشتەکەی ئەم شتانەی کڕی، چرایەك بە 3 500 دینار و چەند کولێرەیەك نرخی هەریەکەیان 1 500 دیناربوو، چەند شووشە ئاوێك نرخی هەریەکەیان 750 دینار بوو. ئازاد 60 500 دیناری بۆ کڕینی ئەو شتانەدا.

أ هاوکێشەیەکی هێڵی بەسێ گۆڕاو بنووسە، بارەکە بنوێنێت.

ب ئازاد 4 چراو 24 شوشە ئاوی کڕی، چەند کولێرەی کڕیوە؟

بیربکەوە و تاوتوێبکە



1. وای دابنێ کە خاڵی بنەڕەت لەبۆشایی پۆوتاندا لەبەردەمتدایە لەو شوێنەی تێیدا وەستاوی لەخوارووی گۆشەی لای چەپی ژووری پۆلەکەت. وای دابنێ درێژی یەکەی پێوانە لەسەر تەوەری پۆوتانەکان یەك پێیە. پۆوتانی جێگای سەرت بخەمڵێنە.
2. باسی ڕووتەختێك بکە تەنها دوویەکتربڕینی لەگەڵ تەوەری پۆوتانەکاندا هەبێت.
3. ڕێکخەربە ئەم هێلکارییەی بەرامبەرت بنووسەوە پاشان تەواوی بکە هەریەکە لە تەوەر و ڕووتەخت و خاڵەکەی ناوبنێ.



1-1 ڕاهێنانەکان

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

1 **زاراوەکان** جیاوازی نێوان ڕووتەختی پۆوتان و بۆشایی پۆوتان ڕوونبکەوە.

بڕوانە نموونە 1

هەریەکە لەم خاڵانە لە بۆشایی پۆوتاندا بنوێنە.

2 $(-3, -2, 1)$ **3** $(0, 0, 2)$ **4** $(1, 4, 5)$ **5** $(-1, 2, 4)$

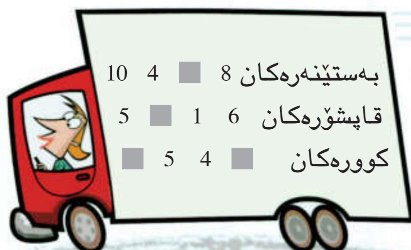
بڕوانە نموونە 2

هەر هاوکێشەیەك لەبۆشایی پۆوتاندا بنوێنە.

6 $x + y + z = 3$ **7** $5x - 2y - 4z = 10$ **8** $1.5x + 3y - 2z = -6$

بڕوانە نموونە 3

9 **هەنگاوی جۆراوجۆر** گەورەترین باری بارهەڵگری کۆمپانیای دابەشکردنی نیشتمانی یەك تەنە کێشی بەستێنەرێك 75 kg و کێشی قاپشۆرێك 50 kg و کێشی کوورەیەك 100 kg .



أ هاوکێشەیەك بەسێ گۆڕاو بنووسە بارەکە بنوێنێت.

ب ئەو خشتەیە تەواوبکە ژمارەی هەرجۆرێك لەم سێ ئامێرانەی بارهەڵگرەکە دەیانگوێزێتەوە ڕووندەکاتەوە.

ج **خەمڵاندن** گەورەترین ژمارەی ئەو ئامێرانەی بارهەڵگرەکە دەیانگوێزێتەوە بخەمڵێنە.

جێبەجێکردنەکان

ڕاهێنانی ئازاد	
شیکاری ڕاهێنان	تەماشای نموونە
17–10	1
23–18	2
24	3

شوێنی هەرخاڵێك لە بۆشایی پۆوتاندا دیاریبکە.

10 $(2, -4, 3)$ **11** $(-1, 1, 4)$ **12** $(3, 0, 0)$ **13** $(1, -2, 0)$

14 $(-3, -3, -3)$ **15** $(5, 0, 2)$ **16** $(0, -3, 2)$ **17** $(-4, -1, 1)$

هەر هاوکێشەیەك لە بۆشایی پۆوتاندا بنوێنە.

18 $x+y-z=-1$ **19** $2x-y+2z=4$ **20** $x+\frac{1}{2}y+z=-2$

21 $5x+y-z=-5$ **22** $8x+6y+4z=24$ **23** $3x-3y+2.5z=7.5$

24 **گۆلە ماسییەکان** هەڤاڵ 000 80 دیناری هەیە ماسی پێدەکرێت تا بیخاتە گۆلی ماسییەوە. نرخی سوورە ماسی 000 10 دینار و ڕەشەکەیان 000 15 دینار و خۆڵەمێشەکەی 500 2 دینارە.

سوور	ڕەش	خۆڵەمێشی
2	2	■
■	1	10
3	■	2
5	1	■

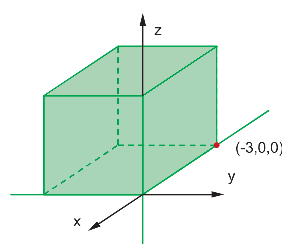
أ هاوکێشەیەك بەسێ گۆڕاو بنوسە بارەکە بنوێنێت.

ب ئەو خشتەیە تەواوبکە ژمارەی ئەو ماسییانە دەنوێنێت کە هەڤاڵ دەتوانێت بیانکرێت.

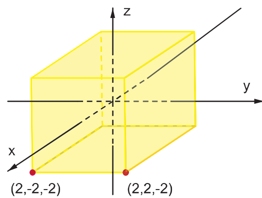
25 **وەرزش** بۆ یاریکەری تۆپی سەبەتە بەپێی سێ جۆر هەڵدان بۆ گۆڵکردن خاڵ تۆماردەکرێت، هەڵدان بەخاڵێك هەڵدانی سەربەخۆ و هەڵدان بە دوو خاڵ و هەڵدان بەسێ خاڵ، یەکێك لە یاریکەرەکان 60 خاڵی تۆمارکرد 20 لەوانەیە هەڵدانی یەك خاڵییە. ژمارەی هەڵدانەکان کە لەدوو جۆرەکەی تر دەگونجێت بدۆزەوە.

ئەندازە خاڵی سەرەکانی هەریەك لەم شەشپاڵوانە دیاریبکە.

26



27



28 **تەلارسازی** ئەندازیارێك 8 ملیۆن دیناری بۆ کاشیکردنی هۆڵێك تەرخانکرد کە 000 2 کاشی دەگرێت بڕیاریدا 3 جۆر کاشی تەختەو سیرامێك و بەرد تاقیبکاتەوە. 400 کاشی سیرامیکی کڕی، ئایا ئەندازیارەکە دەتوانێت ئەو زەویەی لە هۆڵەکە ماوەتەوە بەیەکسانی لەنێوان تەختەو بەرددا پێی کاشی بکات؟ وەڵامەکەت ڕوونبکەوە.

نرخی کاشییەکان (کڕیٚ دەست)
- مۆزاییك: 500 1 دینار
- بەرد: 000 2 دینار
- سیرامێك: 000 4 دینار
- تەختە: 000 6 دینار

29 **بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە** ئایا جووڵەی سەر ڕاستەهێڵێك ڕۆیشتن و گەڕانەوە، جووڵەی دووری دووانەیی دەنوێنێت؟ وەڵامەکەت ڕوونبکەوە.

30 **بنووسە** هاوڕێیەکت بە تەلەفۆن پەیوەندی پێوەکردی داوای لێکردی چۆن بۆشایی پۆوتانەکان دەکێشرێت؟ چۆن ئەوەی بۆ باس دەکەیت؟

31 ئەندازیارەکان بۆشایی پۆوتان بۆ نەخشەکێشانی پرۆژەی ئەو بینایانەی دروستیدەکەن بەکاردێنن. ئەندازیارێك گلۆپێکی لەخاڵی $(7, 12, 10)$ دا دانا لەنەخشەکەدا زەوی تەلارەکە بە رووتەختی xy دەنوێنرێت، هەرچەندە یەکەی پێوانەی دوو تەوەری یەکەم و دووەم بەپێ دەنوێنرێت.

أ ئەندازیارەکە دوگلۆپی تری هەڵواسی هەریەکەیان 4 پێ لە گلۆپی یەکەم دووربێت یەکەمیان بەئاراستەی موجەبی تەوەری یەکەم و دووەمیان بەئاراستەی موجەبی تەوەری دووەم بێت. پۆوتانی خاڵی هەڵواسینی هەریەکە لەو دوو گلۆپە چەندە؟

ب ئەگەر شوێنی هەریەکە لەو دوو گلۆپە پێیەك و نیو لەژێر خاڵی جێگیربووندا بێت.

ج ئەندازیارەکە بڕیاریدا زەوی بیناکە 4 پێ بەرزبکاتەوە. پۆوتانی نوێی گلۆپی یەکەمجار کامەیە؟

32 **هەڵە لە شیکاردا** لەخوارەوە دوو ڕێگا بۆ هەرژمارکردنی یەکتربڕینی رووتەختی $-5x+3z=15$ لەگەڵ تەوەری یەکەمدا هەیە، ڕێگای هەڵە دیاریبکە.

أ

$-5x+3z=15$
$-5x+3\times 0=15$
$-5x=15$
$x=-3$

ب

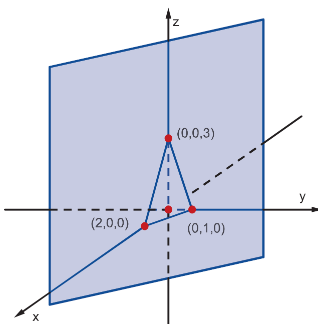
$-5x+3z=15$
$-5\times 0+3z=15$
$3z=15$
$z=5$


ئامادەکردن بۆ تاقیکردنەوە

33 کام خاڵ بە 5 یەکە دەکەوێتە دوای خاڵی $(1, 1, 4)$ەوە؟

أ $(-4, 1, 4)$ ب $(1, -4, 9)$ ج $(2, 3, 6)$ د $(6, 6, 9)$

34 کام هاوکێشەیە وێنەی بەرامبەر دەنوێنێت؟



أ $x+2y+3z=6$

ب $2x+y+3z=6$

ج $3x+6y+2z=6$

د $6x+3y+2z=6$

35 کام خاڵ یەکتربڕینی رووتەختی $2x-4y+3z=-12$ لەگەڵ تەوەری دووەم پێکدەهێنێت؟

أ $(0, -3, 0)$

ب $(0, 0, -3)$

ج $(0, 3, 0)$

د $(0, 0, 3)$

36 یەکتربڕینی رووتەختی $5x-2y-4z=-3$ لەگەڵ تەوەری سێیەم بدۆزەوە.

بەرەنگاری و فراوانکردن

کاتێك هاوکێشەی هێڵی تەنها دووگۆڕاوی تێدادەبێت لە تەوەری پۆوتانەکاندا ئەوا بە ڕووتەختێکی تەریب بەیەکێك لە تەوەری پۆوتانەکان دەنوێنرێت. هەریەکە لەم هاوکێشانە لە بۆشاییدا بنوێنە.

37 $x+y=2$ **38** $y-2z=4$ **39** $x+z=3$ **40** $\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}y=1$

هاوکێشەیەك بۆ ڕووتەختێك بنووسە بەزانینی یەکتربڕینەکانی لەگەڵ تەوەرکانی پۆوتان.

	لەگەڵ تەوەری یەکەم	لەگەڵ تەوەری دووەم	لەگەڵ تەوەری سێیەم
41	4	2	−1
42	25	50	10

پێداچوونەوەی لولپێچی

ناوی ئەو تەنە ئەندازەییە دیاربکە کە ژمارەی لایەکان و سەرەکانی زانراوە (پۆلەکانی پێشو).

43 5 سەرو 8 لا **44** 6سەرو 9 لا **45** بێ سەرو بێ لا

46 **کۆکردنەوەی پیتاك** یانەی هاوکاری گەشتێکی پاسکیل سواری ڕێکخست بەدرێژایی 1920 km . بەشداربووان ڕۆژی 120 km یان بڕی، گەشتەکەیان چەند ڕۆژی خایاند؟ (پۆلەکانی پێشو)

هەریەکە لەم سستمە هێڵییانە شیکاربکە (پۆلەکانی پێشوو).

47 $\begin{cases} 5y=x \\ \frac{2}{5}x+7y=18 \end{cases}$ **48** $\begin{cases} 6x-y=5 \\ 4y-3x=1 \end{cases}$ **49** $\begin{cases} x+3y=6 \\ 2x-3y=9 \end{cases}$

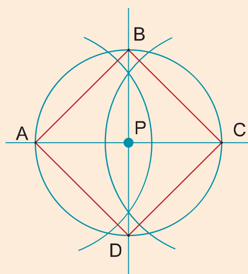
دروستکردنی چەندلا ڕێکەکان

Constructing regular polygons



لەم چالاکییەدا فێری دروستکردنی چەندلا ڕێکەکان دەبێت بە بەکارهێنانی ئەو بازنەیەی دەوری داوە.

چالاکی 1

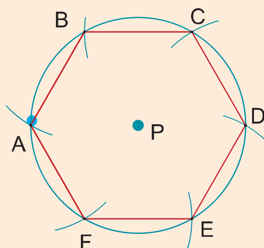


1. بازنەیەك بکێشە چەقەکەی P بێت پاشان تیرەی $\overline{AC}$ بکێشە.
2. تەوەرەی تیرەی بازنەکە $\overline{AC}$ دیاریبکە و خاڵەکانی یەکتربڕینی لەگەڵ بازنەکەدا بە B و D ناوبنێ.
3. هەریەکە لە $\overline{AB}$ و $\overline{BC}$ و $\overline{CD}$ و $\overline{DA}$ بکێشە بەمەش چوارلایەکی یەکسانت دەستدەکەوێت گۆشەکانیشی یەکسان دەبن ئەوەش چەندلایەکی ڕێکە لە 4 لاپێکهاتووە (چوارگۆشەیە).

هەوڵبدە

1. ڕێگایەکی تر بەکاربێنە بۆ وێنەکێشانی چەندلایەکی ڕێك لە 4 لاپێکهاتبێت.
2. سەرەکانی چوارلای ڕێك دەکەونە سەر هەمان بازنە، پەیوەندی نێوان چوارلاو بازنە چییە؟
3. هەشتلای ڕێك ئەو هەشتلایە کە لایەکان و گۆشەکانی جووتن (یەکسانن) بەبەکارهێنانی لەتکەری گۆشەکانی ئەو چوارلایەی لە چالاکی 1 دا دروستت کرد هەشتلایەکی ڕێك بکێشە.

چالاکی 2



1. بازنەیەك بکێشە چەقەکەی P بێت، خاڵی A لەسەر چێوەکەی دیاریبکە.
2. پەرگالەکە بەکراوەیی بگرە، لەخاڵی A یەوە چەند خاڵێك کە لەدووریدا یەکسان بن لەسەر بازنەکە دیاریبکە خاڵەکان بە B و C و D و E و F ناوبنێ.
3. $\overline{AB}$ و $\overline{BC}$ و $\overline{CD}$ و $\overline{DE}$ و $\overline{EF}$ و $\overline{FA}$ بکێشە شەشلایەکی لایەکسانت دەستدەکەوێت کە گۆشەکانیشی یەکسانن. ئەوە شەشلایەکی ڕێکە.

هەوڵبدە

4. بەچیدا دەزانی $ABCDEF$ شەشلایەکی ڕێکە (ڕێنما: تیرەکانی $\overline{AD}$ و $\overline{BE}$ و $\overline{CF}$ بکێشە ئەو سێگۆشانەی بەدەستت هێناون چ جۆرێکن؟
5. **دوازدەلای ڕێك**: چەند لایەکە لە 12 لاو 12 گۆشەی یەکسان پێکدێت بۆ دروستکردنی دوازدەلای ڕێك شەشلایەکی ڕێك بەکاربێنە ڕێگاکەت ڕوونبکەوە.

چالاكی 3

1. بازنەیەك بكێشە چەقەكەی P بێت پاشان تیرەی $\overline{AB}$ بكێشە.

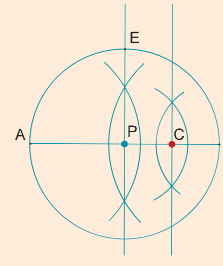
2. تەوەری $\overline{AB}$ دیاریبكە ویەكێك لەدوو خاڵی یەكتربڕینی تەوەرەكە و بازنەكە ناوبنێ E.

3. ناوەڕاستی $\overline{PB}$ دیاریبكە و ناوبنێ C.

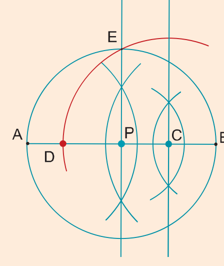
4. پرگالەكەت ئەوەندەی CE بكەوە. سەری پرگالەكە لەسەر C دابنێ كەوانەیەك بكێشە لە $\overline{AB}$ لە خاڵێكدا دەبڕێت ناوی بنێ D.

5. پرگالەكەت ئەوەندەی ED بكەوە لەخاڵی E یەوە دەرچۆ و چەند خاڵێك دووری نێوانیان یەكسان بێت دیاریبكە خاڵەكان بە F و G و H و J ناوبنێ.

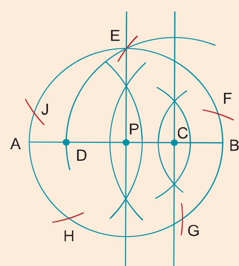
6. $\overline{EF}$ و $\overline{FG}$ و $\overline{GH}$ و $\overline{HJ}$ و $\overline{JE}$ بكێشە پێنجلا ڕێكێكت دەستدەكەوێت كە گۆشەكانیشی یەكسانن. ئەوەش پێنجلا ڕێكە.



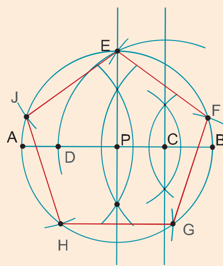
هەنگاوەكان 1 تا 3



هەنگاوی 4



هەنگاوی 5



هەنگاوی 6

هەوڵبدە

6. **دەلای ڕێك:** چەندلایەكە لە 10 لاو 10 گۆشەی یەكسان پێكدێت بەبەكارهێنانی پێنجلای ڕێك دەلایەكی ڕێك دروستبكە ڕێگاكەت ڕوونبكەوە.

7. پێوانەی هەموو گۆشەكانی ئەو چەندلا ڕێكانە هەژماربكە كە لە چالاكی 1 تا 3 دا دروستت كردوون پاشان ئەم خشتەیە تەواوبكە.

	چەندلا ڕێكەكان			
ژمارەی لایەكان	3	4	5	6
پێوانەی هەرگۆشەیەك	60°			
كۆی پێوانەی گۆشەكان	180°			

8. **دەستەواژەیەك بنووسە** ڕێسایەكی گشتی بۆ دۆزینەوەی كۆی گۆشەكانی ناوەوەی چەندلایەكی ڕێك ژمارەی لایەكانی n بێت.

9. **دەستەواژەیەك بنووسە** ڕێسایەكی گشتی بۆ دۆزینەوەی پێوانەی هەریەكە لەگۆشەكانی ناوەوەی چەندلایەكی ڕێك ژمارەی لایەكانی n بێت.

2-1 چەندلایەکان

Polygons



ئامانجەکان

- پۆلینکردنی چەندلایەکان بەپێی ژمارەی لایەکان و پێوانەی گۆشەکانی
- دۆزینەوەی پێوانەی گۆشەکانی ناوەوە و دەرەوەی چەندلایەکان و بەکارهێنانیان

زاراوەکان

Vocabulary

لای چەندلا
Side of a polygon

سەری چەندلا
Vertex of a polygon

تیرە
Diagonal

چەندلای ڕێك
Regular polygon

قۆپاو
Concave

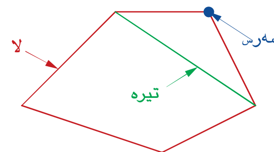
قۆقز
Convex

بۆچی ئەمە فێردەبین؟

ڕوناکی لەدەرچەی ئامێری وێنەگرتنەوە کە کۆمەڵە تیغێکی تێدایە لەهاوێنەکەیەوە دەچێتە ژوورەوە، بەجۆری کەشێوەی چەند لایەك وەردەگرێت (بڕوانە نموونە 5)

لەبیرت بێت چەندلا شێوەیەکی ئەندازەیی داخراوە لە ڕووتەختێکدا، لە 3 پارچە ڕاستەهێڵ یان زیاتر پێکدێت کە دوو پارچەیان لەرێکی یەکتری نەبن، بەجۆری کە هەر پارچە ڕاستەهێڵێك لەگەڵ تەنها دوو پارچەی تردا یەکتر دەبڕن، یەك دانە لەهەریەك لە لایەکان هەر پارچە ڕاستەهێڵێك لەوانە **لایەکی Side** چەندلایەکە. هەرسەرێکی هاوبەش لەنێوان دوولادا **سەرێکی Vertex** چەندلایەکە. ئەو پارچە ڕاستەهێڵەی دووسەری ناهاوسێ لەسەرەکانی چەندلایەك بەیەك دەگەیێنێت **تیرەیە Diagonal**

ژمارەی لا	ناو
3	سێگۆشە
4	چوارلا
5	پێنجلا
6	شەشلا
7	حەوتلا
8	هەشتلا
9	نۆلا
10	دەلا
11	یازدەلا
12	دوازدەلا



دەتوانین چەندلا بەپێی ژمارەی لایەکانی ناو بنێین. ئەو خشتەیە هەندێك لەو ناوانە ڕوونەدەکاتەوە بۆیە چەندلای $ABCDE$ سەرەوە پێنجلایە.

نموونە 1 جیاکردنەوەی چەندلایەکان

دیاریبکە ئەم شێوانەی خوارەوە چەندلان یان نا ئەگەر چەند لابوو ناویبنێ.

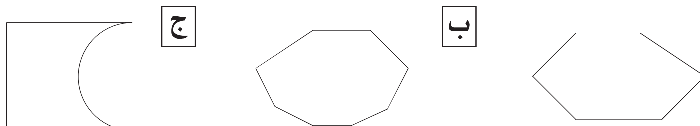


لەبیرت بێت

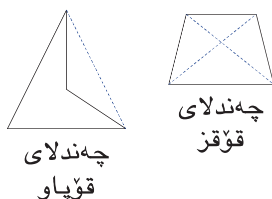
چەندلا شێوەیەکی ئەندازەیی داخراوە لە ڕووتەختدا لەسێ پارچە ڕاستەهێڵ یان زیاتر پێکدێت کە تەنها لە سەرەکانیدا یەکتری دەبڕن.

خاڵی چاودێری

1. دیاریبکە ئەم شێوانە چەندلان یان نا، ئەگەر چەندلابوو ناوبنێ.



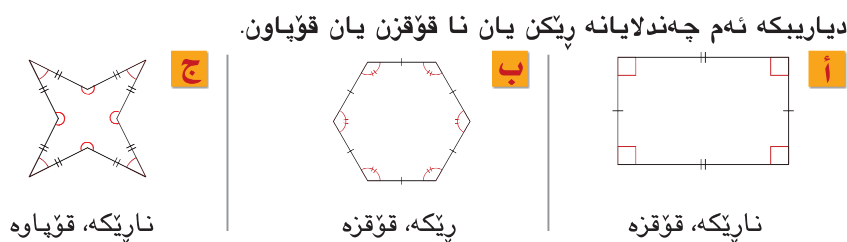
چەندلای ڕێك Regular polygon چەندلایەکە هەموو لایەکانی (لە درێژیدا یەکسانن) گۆشەکانیشی جووتن (هەمان پێوانەیان هەیە).



چەندلای قۆپاو Concave چەندلایەکە بەلایەنی کەمەوە تیرەیەکی هەیە کە هەندێك لەخاڵەکانی لەدەرەوەی چەندلایەکەدان.
چەندلای قۆقز Convex چەندلایەکە هەموو تیرەکانی لەناوچەندلایەکەدان چەند لای ڕێك هەمیشە قۆقزە.

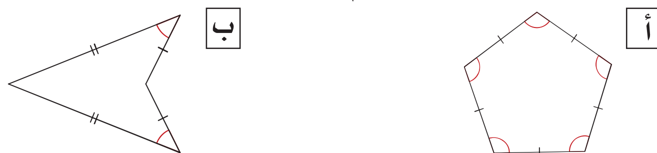
نموونــــــە 2 پۆلینکردنی چەندلایەکان

دیاریبکە ئەم چەندلایانە ڕێکن یان نا قۆقزن یان قۆپاون.



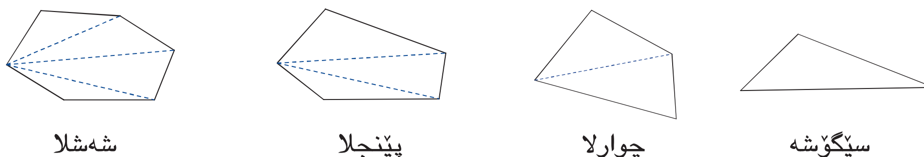
خاڵی چاودێری

2. دیاریبکە ئەم چەندلایانە ڕێکن یان نا، قۆقز یان قۆپاون.



بۆ ئەوەی کۆی پێوانەی گۆشەکانی ناوەوەی چەندلایەکی قۆقز بدۆزیتەوە هەموو تیرەکانی لەسەرێك لەسەرەکانیەوە بکێشە بەمەش ژمارەیەك سێگۆشەت دەستدەکەوێت، کۆی پێوانەی گۆشەکانی ناوەوەی چەندلایەکە بریتییە لە کۆی پێوانەی گۆشەکانی ناوەوەی هەموو سێگۆشەکان.

لەبیرت بێت
بەپێی سەلمێنراوی کۆی پێوانەی گۆشەکانی ناوەوەی سێگۆشە ئەو سەرجەمە 180 پلەیە.



چەندلا	ژمارەی لایەکان	ژمارەی سێگۆشەکان	کۆی پێوانەی گۆشەکانی ناوەوە
سێگۆشە	3	1	$(1) \times 180° = 180°$
چوارلا	4	2	$(2) \times 180° = 360°$
پێنجلا	5	3	$(3) \times 180° = 540°$
شەشلا	6	4	$(4) \times 180° = 720°$
چەندلای n لا	n	$n-2$	$(n - 2) \times 180°$

لەهەریەك لەو چەندلایانە دەردەکەوێت ژمارەی ئەو سێگۆشانەی لە کێشانی تیرەکان لەسەرێکی چەندلایەکەوە پەیدادەبێت 2 ی کەمترە لە ژمارەی لایەکان n لەمەشەوە دەردەکەوێت کە کۆی پێوانەی گۆشەکانی سێگۆشەکان بریتییە لە $(n - 2) \times 180°$



سەلمێنراوی 1-1 کۆی پێوانەی گۆشەکانی ناوەوەی چەندلا

کۆی پێوانەکانی گۆشەکانی ناوەوەی چەندلای قۆقز کە n لای هەبێت بریتییە لە $(n - 2) \times 180°$

نموونــــه 3 دۆزینەوەی پێوانەی گۆشەکانی ناوەوەی چەندلاو دۆزینەوەی سەرجەمەکانیان

أ کۆی پێوانەی گۆشەکانی ناوەوەی هەشتلا بدۆزەوە.

$(n - 2) \times 180°$ سەلمێنراوی کۆی پێوانەی گۆشەکانی ناوەوەی چەندلا

$(8 - 2) \times 180°$ لەجیاتی n بەهاکەی دادەنێین.

$1080°$

ب پێوانەی هەریەك لەگۆشەکانی ناوەوەی نۆلایەکی ڕێك بدۆزەوە.

هەنگاوی 1 کۆی پێوانەی گۆشەکانی ناوەوەی نۆلاڕێکەکە بدۆزەوە.

$(n - 2) \times 180°$ سەلمێنراوی کۆی پێوانەی گۆشەکانی ناوەوەی چەندلا

$(9 - 2) \times 180° = 1260°$ لەجیاتی n بەهاکەی دەدەنێین.

هەنگاوی 2 پێوانەی یەك گۆشەی ناوەوە بدۆزەوە.

$\frac{1260°}{9} = 140°$ کۆی پێوانەکان دابەشی 9 بکە چونکە هەموو گۆشەکان جووتن.

ج پێوانەی هەریەکە لەگۆشەکانی ناوەوەی چوارلای بەرامبەر بدۆزەوە.

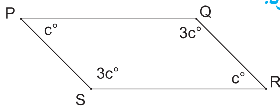
$(4-2)\times 180° = 360°$ سەلمێنراوی کۆی پێوانەی گۆشەکانی ناوەوەی چەندلا

$m\hat{P} + m\hat{Q} + m\hat{R} + m\hat{S} = 360°$ لەجیاتی دابنێ.

$c + 3c + c + 3c = 360$ ڕاوە لەیەکچووەکان کۆبکەوە.

$8c = 360$ هەردوولا دابەشی 8 بکە.

$c = 45$



$m\hat{P} = m\hat{R} = 45°$

$m\hat{Q} = m\hat{S} = 3(45°) = 135°$

*** تێبینی**

مەبەست لە پیتی m لێرەدا بەمانای پێوانە دێت وەك بڵێین:

measure of angle $P = m\hat{P}$

پ جَ = پێوانەی گۆشە جَ



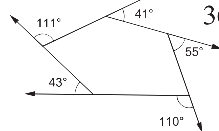
3. **أ** کۆی پێوانەی گۆشەکانی ناوەوەی 15 لایەك بدۆزەوە.

ب پێوانەی هەریەك لە گۆشەکانی ناوەوەی دەلایەکی ڕێك بدۆزەوە.

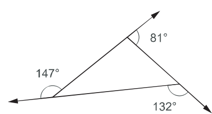
لەبیرت بێت

دەرەگۆشەی سێگۆشە ئەو گۆشەیەیە دەکەوێتە نێوان یەکێك لە لایەکان و درێژکراوەی لا هاوسێیەکەی

هەریەك لە گۆشەکانی دەرەوەی ئەم دوو چەندلایەی خوارەوە پێوراوە. سەرنج بدە کۆی پێوانەی گۆشەکانی دەرەوەی هەریەکێکیان $360°$



$43° + 111° + 41° + 55° + 110° = 360°$



$147° + 81° + 132° = 360°$



سەلمێنراوی 2-1 کۆی پێوانەی گۆشەکانی دەرەوەی چەندلا

کۆی پێوانەی گۆشەکانی دەرەوەی چەندلای قۆقز $360°$یە.

نموونــــه 4 دۆزینەوەی کۆی پێوانەی گۆشەکانی دەرەوەی چەندلا و دۆزینەوەی سەرجەمەکانیان

أ پێوانەی هەریەکە لە گۆشەکانی دەرەوەی شەشلایەکی ڕێك بدۆزەوە.

شەشلا 6 لاو 6 سەری هەیە.

کۆی پێوانەی گۆشەکانی دەرەوە $360°$ سەلمێنراوی کۆی پێوانەی گۆشەکانی دەرەوەی چەندلا

پێوانەی هەر گۆشەیەکی دەرەوە $= \frac{360°}{6}$ یان $60°$ دابەشی 6 کراوە چونکە 6 گۆشەی دەرەوەی یەکسانی هەیە.

پێوانەی هەر گۆشەیەکی دەرەوەی شەشلا ڕێکەکە $60°$

ب بەهای a لە پێنج لای بەرامبەردا بدۆزەوە.

$7a^\circ+2a^\circ+3a^\circ+6a^\circ+2a^\circ=360^\circ$ سەلمێنراوی کۆی پێوانەی گۆشەکانی ناوەوەی چەندلا

$20a=360$ ڕادە لەیەکچووەکان کۆکراوەتەوە

$a=18$ هەردوو لا دابەشی 20 بکە.

خاڵی چاودێری

4. **أ** پێوانەی هەریەکە لە گۆشەکانی دەرەوەی دوازدەلایەکی ڕێك چەندە؟

ب بەهای r لەچەندلای بەرامبەردا بدۆزەوە.

نموونـــــە 5 جێبەجێکردن لە وێنەگرتندا

کراوەی ئامێری وێنەگرتن (کامێرا) لە 10 تیغ پێکهاتووە. تیغەکان بەشێوەیەك لەسەریەك دادەنرێت کە دەلایەکی ڕێك پێکبێنێت پیوانەی $\widehat{CBD}$ چەندە؟

$\widehat{CBD}$ گۆشەیەکی دەرەوەی دەلایەکی ڕێکە، کۆی پێوانەی گۆشەکانی دەرەوەی چەندلای ڕێك 360° بەپێی سەلمێنراوی کۆی پێوانەی گۆشەکانی دەرەوەی چەندلا کەواتە

$m\ \widehat{CBD}=\frac{360^\circ}{10}=36^\circ$ دەلای ڕێك 10 گۆشەی دەرەوەی یەکسانی هەیە بۆیە 360دابەشی 10 بکە

خاڵی چاودێری

5. **چی دەبێت ئەگەر** وای دابنێ ژمارەی تیغەکان 8 بێت لەجیاتی 10 پێوانەی هەریەکە لەگۆشەکانی دەرەوەی چەند دەبێت؟

بیربکەوە و تاوتوێبکە

1. وێنەی پێنجلایەکی قۆقز و پێنجلایەکی قوپاوبکە، جیاوازی نێوان هەردوو چەندلاکە ڕوونبکەوە.

2. چ هۆیەك ڕێگرە لە بەکارهێنانی $\frac{360^\circ}{n}$ بۆ دۆزینەوەی پێوانەی گۆشەی دەرەوەی چەندلایەکی ناڕێك.

3. خشتەکەی خوارەوە دروستبکەوە و تەواوی بکە، لەهەر خانەیەك بڕێك بنووسە بۆ دۆزینەوەی بەهای دیاریکراوی چەندلایەك n لای هەبێت.

فێربە و سەرنج بدە

	گۆشەکانی ناوەوە	گۆشەکانی دەرەوە
کۆی پێوانەی گۆشەکان		
پێوانەی هەر گۆشەیەك		

2-1 ڕاهێنانەکان

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

1 **زاراوەکان** ئایا یەکسانبوونی لایەکان بەسە بۆئەوەی چەندلایەک ڕێك بێت؟وەڵامەکەت ڕوونبکەوە. بەنموونەیەك پاڵپشتی وەڵامەکەت بکە.

بڕوانە نموونە 1

دیاریبکە هەر یەك لەم شێوانە چەندلان یان نا، شێوەکە ناوبنێ ئەگەر چەندلابوو.

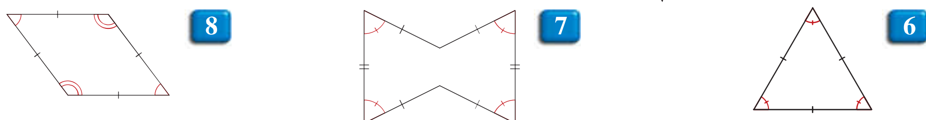
2 **3** **4** **5**



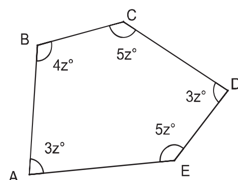
بڕوانە نموونە 2

دیاریبکە ئەم چەندلایانە ڕێکن یان نا، قۆپاون یان قۆقزن.

6 **7** **8**



بڕوانە نموونە 3

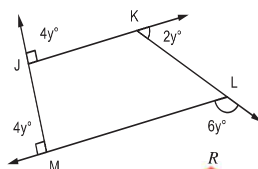


9 پێوانەی هەریەکە لەگۆشەکانی ناوەوەی پێنجلای بەرامبەر بدۆزەوە.

10 پێوانەی هەریەکە لەگۆشەکانی ناوەوەی دوازدەلایەکی ڕێك بدۆزەوە.

11 کۆی پێوانەی گۆشەکانی ناوەوەی 20 لایەکی قۆقز بدۆزەوە.

بڕوانە نموونە 4



12 بەهای y لەچەندلای بەرامبەردا بدۆزەوە.

13 پێوانەی هەریەکە لەگۆشەکانی دەرەوەی پێنجلایەکی ڕێك بدۆزەوە.

بڕوانە نموونە 5

بیۆەیی بۆ هەمووان تابلۆی ڕێنمایی هاتوچۆی بەرامبەر بەکاربێنە بۆ شیکاری پرسیاری 14 و 15.



14 ناوی چەندلایەکە بەپێی لایەکانی ناوبنێ.

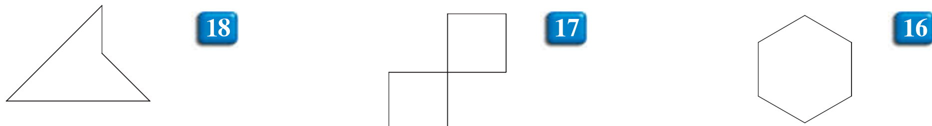
15 هەریەکە لە پێوانەی $\hat{Q}$ و $\hat{S}$ بدۆزەوە ئەگەر بزانی $\hat{P}$ و $\hat{R}$ و $\hat{T}$ گۆشەی وەستاون و $\hat{Q} \cong \hat{S}$

جێبەجێکردنەکان

ڕاهێنانی ئازاد	
بۆ شیکاری پرسیارەکان	تەماشای نموونە
18-16	1
21-19	2
24-22	3
26-25	4
28-27	5

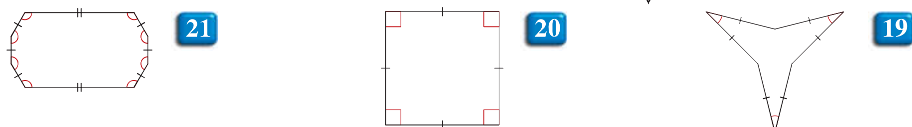
دیاریبکە ئەم شێوە دروستکراوانە چەندلان یان نا، شێوەکە ناوبنێ ئەگەر چەندلابوو.

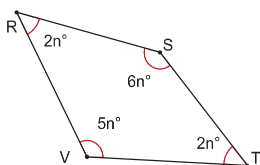
16 **17** **18**



دیاریبکە ئەم چەندلایانە ڕێکن یان نا، قۆپاون یان قۆقزن.

19 **20** **21**





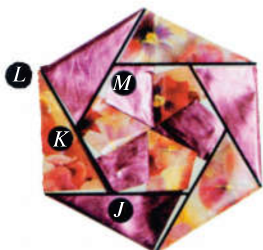
22 پێوانەی هەریەکە لەگۆشەکانی ناوەوەی چەندلای بەرامبەر بدۆزەوە.

23 پێوانەی هەریەکە لەگۆشەکانی ناوەوەی 18 لایەکی ڕێك بدۆزەوە.

24 کۆی پێوانەی گۆشەکانی ناوەوەی حەوتلایەك بدۆزەوە.

25 پێوانەی هەریەکە لەگۆشەکانی دەرەوەی نۆلایەکی ڕێك بدۆزەوە.

26 ئەگەر پێوانەی گۆشەکانی دەرەوەی پێنجلایەك $8a°$،$10a°$،$4a°$،$6a°$ و $2a°$ بێت، ئایا بەهای a چەندە؟



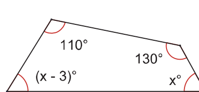
وێنەی بەرامبەر بۆ شیکاری پرسیارەکانی 27 و 28 بەکاربێنە.

27 بەهای $m\,\widehat{JKM}$ بدۆزەوە.

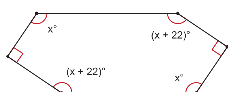
28 بەهای $m\,\widehat{MKL}$ بدۆزەوە.

جەبر بەهای x لە هەریەك لەم شێوانەدا بدۆزەوە.

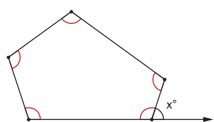
29



30



31



ژمارەی لایەکانی ئەو چەندلاڕێکە بدۆزەوە کە لەگەڵ باسەکەیدا گونجاوبێت.

32 پێوانەی هەرگۆشەیەکی ناوەوەی یەکسانە بەپێوانەی هەرگۆشەیەکی دەرەوەی.

33 پێوانەی هەرگۆشەیەکی ناوەوەی یەکسانە بە چوار ئەوەندەی پێوانەی هەر گۆشەیەکی دەرەوەی.

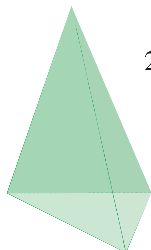
34 پێوانەی هەرگۆشەیەکی دەرەوەی یەکسانە بە $\frac{1}{8}$ پێوانەی هەر گۆشەیەکی ناوەوەی.

ناوی ئەو چەندلایە دیاربکە کەکۆی پێوانەی گۆشەکانی ناوەوەی یەکسانە بە

35 $540°$ **36** $900°$ **37** $1800°$ **38** $2520°$

هەنگاوی جۆراوجۆر ژمارەی لایەکان و پێوانەی گۆشەکانی ناوەوەی ئەو چەندلاڕێکە چەندە؟ ئەگەر بزانیت پێوانەی گۆشەیەکی دەرەوەی یەکسانە بە:

39 $120°$ **40** $72°$ **41** $36°$ **42** $24°$



43 **هەڵە لە شیکاردا** کام دەرئەنجام هەڵەیە؟ هەڵەکە لەکوێدایە؟

أ) وێنەی بەرامبەر چەندلا دەنوێنێت.

ب) وێنەی بەرامبەر چەندلا نانوێنێت.

44 **خەمڵاندن** وێنەی ئەو چەندلایە بکێشە کە خاڵی سەرەکانی بریتیین لە $A(-2,-6)$ و $B(-4,-1)$ و $C(-1,2)$ و $D(4,0)$ و $E(3,-5)$ پێوانەی هەریەکە لەگۆشەکانی ناوەوەی بخەمڵێنە چی دەربارەی گۆشەکانی ئەم چەندلایە دەڵێیت؟ گۆشە پێو بەکاربێنە بۆ پێوانی ئەم گۆشانە وەڵامەکەی پێشوت پاسادانبکە.

45 ئەمانەی خوارەوە هەندێك پێدراون لەسەر پێوانەی گۆشەکانی ئەو پارچە کوارتزەی بەرامبەر
$m\,\hat{A}=95°$ ، $m\,\hat{B}=125°$ ، $m\,\hat{E}=m\,\hat{D}=130°$
$m\,\hat{C}=m\,\hat{D}=m\,\hat{G}$



أ) چەندلای $ABCDEFG$ ناوبنێ.

ب) کۆی پێوانەی گۆشەکانی ناوەوەی چەندلایەکە چەندە؟

ج) $m\hat{F}$ بدۆزەوە.

46 ئەو چەندلارێکە ناوبنێ کە چێوەکەی $45\ m$ و درێژی لایەك لە لایەکانی $7.5\ m$ بێت.

وێنەی ئەمانە بکێشە.

47 چوارلایەکی ڕێك

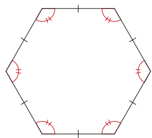
48 حەوتلایەکی قۆپاوی نارێك.

49 پێنجلایەکی قۆقزی نارێك

50 چەندلایەك لایەکانی یەکسان و گۆشەکانی جووتنین.

51 **بنووسە** زاراوەکانی وانەکە بەکاربێنە بۆ ناونانی چەندلای بەرامبەر کەهەموو سیفەتەکانی گرتبێتە بەر.

52 **بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە** بەزیادبوونی ژمارەی لایەکانی چەندلایەکی ڕێك چەندلایەکە لەکام شێوەی ئەندازەیی نزیکدەبێتەوە.



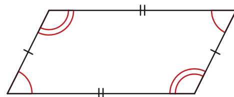


ئامادەکردن بۆ تاقیکردنەوە

53 شێوەی بەرامبەر کام لەم سیفەتانە دەگرێتە خۆ

I چوارلا   II قۆپاو   III ڕێك

(أ) تەنها I   (ب) تەنها II   (ج) I و II   (د) I و III



54 16 لای ڕێك کام یەکێك لەم سیفەتانەی تێدا نییە.

(أ) چەندلایەکی قۆقزە   (ج) کۆی پێوانەی گۆشەکانی ناوەوەی $2\ 880°$

(ب) هەموو لایەکانی جووتن   (د) کۆی گۆشەکانی دەرەوەی $360°$

55 لە چوارلای $ABCD$ دا $m\hat{C}$ چەندە؟ ئەگەر بزانیت $m\hat{A}=45°$ و $m\hat{B}=111°$ و $m\hat{C}=2m\hat{D}$

(أ) $24°$ (ب) $68°$ (ج) $102°$ (د) $136°$

بەرەنگاری و فراوانکردن

56 پێوانە گۆشەکانی ناوەوەی پێنجلایەکی قۆقز چەندجارە یەکبەدوای یەکەکانی ژمارە 4 پێکدێنێت پێوانە گۆشەکانی پێنجلایەکە بدۆزەوە.

57 بەهای x و y و z لەو پێنجلارێکەی بەرامبەر بدۆزەوە.

58 **هەنگاوی جۆراوجۆر** چەندلای $ABCDEFGHJK$ دەلایەکی ڕێکە دوولای $\overline{AB}$ و $\overline{DE}$ درێژکرانەوە تا لە L دا و لەدەرەوەی چەندلایەکە پێکگەیشتن. $m\,\widehat{BLD}$ بدۆزەوە.

59 **بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە** ئایا سەلمێنراوی کۆی پێوانەی گۆشەکانی ناوەوەی چەندلا ڕاستە لەچەندلای قۆپاودا؟ بۆ پاڵپشتی وەڵامەکەت وێنەی شێوەیەك بکێشە.

پێداچوونەوەی لولپێچی

بەبەکارهێنانی شیتەڵ هەریەك لەم هاوکێشانە شیکاربکە (پۆلەکانی پێشوو)

60 $x^2+3x-10=0$ **61** $x^2-x-12=0$ **62** $x^2-12x=-35$

لە پرسیارەکانی 63 تا 65 دوولای سێگۆشەیەك دراوە، پێویستە لەسەرت دوو ڕادە بدۆزێتەوە درێژی لای سێیەم x یان لەنێواندا بێت (پۆلەکانی پێشوو)

63 4؛ 4   **64** 12؛ 6   **65** 7؛ 3

لەسێگۆشەی گۆشەوەستاوی $90-60-30$ ئەمانە بدۆزەوە (پۆلەکانی پێشوو)

66 درێژی ژێیەکە، ئەگەر درێژی لا بچووکەکە 6 یەکەبێت.

67 درێژی لا گەورەکە، ئەگەر درێژی ژێیەکە 10 یەکە بێت.

3-1 هاوڕێژەی ئەندازەیی
Dilation



ئامانجەکان
- جێبەجێکردنی سیفەتەکانی هاوشێوەبوون لە ڕووتەختی پۆوتاندا
- سەلماندنی هاوشێوەبوونی دوشێوەی ئەندازەیی بەبەکارهێنانی پۆوتانەکان.

کێ ئەمە بەکاردەهێنێت؟
پرۆگرامسازی کۆمپیوتەر، پۆوتانەکان بۆ گەورەکردن و بچووککردنەوە بەکاردێنێت.

زاراوەکان Vocabulary
هاوڕێژەی ئەندازەیی Dilation

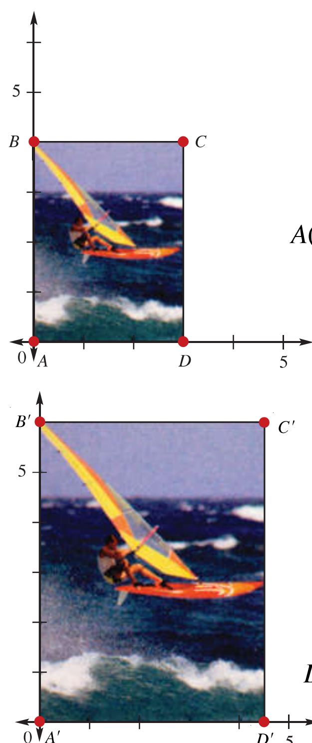
ڕێژەی جێگۆڕکێ Scale factor

زۆر لەو وێنانەی لەسەر تۆڕی ئەنتەرنێت دەبینرێن پشت بە شێوەی JPEG (format) دەبەسترێت چونکە گۆڕین وگواستنەوەی وێنەکان ئاسانەکات کاتێك بە ماوسەکە گۆشەیەکی وێنەکە رادەکێشێت لەشێوەی JPEG بە مەبەستی گەورەکردن یان بچووکردنەوەی بەرنامەکە، پێوانەکانی ئەو وێنەیەی دەستکەوتووە بە بەکارهێنانی پۆوتانەکان و هاوشێوەبوون ڕێکدەخات.

هاوڕێژەی ئەندازەیی Dilation: جێگۆڕکێیەکی ئەندازەییە پێوانەکانی شێوە ئەندازەییەکە دەگۆڕێت لەگەڵ پارێزگاریکردنی شێوەکەی بنەڕەت و وێنەکەی لەم جێگۆڕکێیەدا دوو شێوەی هاوشێوەن ڕێژەی ئەم **جێگۆڕکێ ئەندازەییە Scale factor** ژمارەیەکی راستی موجەبە $k \neq 1$ رادەی گەورەکردن یان بچووکردنەوەی وێنەکە لەچاو بنچینەکەیدا نیشانەدات. وێنەی خاڵی (x, y) بەهاوڕێژەی ئەندازەیی ڕێژەکەی k بێت بریتییە لە (kx, ky)، ئەگەر $k > 1$ هاوڕێژە ئەندازەییەکە **گەورەکردن** و ئەگەر $k < 1$ ئەوا هاوڕێژە ئەندازەییەکە **بچووکردنەوە** دەبێت.

نموونــــە 1 جێبەجێکردن لەسەر پرۆگرامسازی کۆمپیوتەر

وێنەی بەرامبەر شوێنی وێنەکە لەشێوازی JPEG دا ڕووندەکاتەوە سنووری وێنەی پەیدابوو لە جێگۆڕکێی وێنە بنچینەییەکە گەورەکراوە بەڕێژەی $\frac{3}{2}$ بکێشە.



هەنگاوی 1 پۆوتانی هەر سەرێك لەسەرە بنچینەییەکانی $A(0, 0)$، $B(0, 4)$، $C(3, 4)$، $D(3, 0)$، لێکدانی $\frac{3}{2}$ بکە.

لاکێشەی	لاکێشەی
$A'B'C'D'$	$ABCD$

$$A(0, 0) \to A'\left(0 \times \frac{3}{2}, 0 \times \frac{3}{2}\right) \to A'(0, 0)$$

$$B(0, 4) \to B'\left(0 \times \frac{3}{2}, 4 \times \frac{3}{2}\right) \to B'(0, 6)$$

$$C(3, 4) \to C'\left(3 \times \frac{3}{2}, 4 \times \frac{3}{2}\right) \to C'(\tfrac{9}{2}, 6)$$

$$D(3, 0) \to D'\left(3 \times \frac{3}{2}, 0 \times \frac{3}{2}\right) \to D'(\tfrac{9}{2}, 0)$$

هەنگاوی 2 خاڵەکانی $A'(0, 0)$، $B'(0, 6)$، $C'(\frac{9}{2}, 6)$، $D'(\frac{9}{2}, 0)$ دیاریبکە پاشان وێنەی لاکێشەکە بکێشە.



1. **چی دەبێت ئەگەر** سنووری وێنەی پەیدابوو لە جێگۆڕکێی وێنە بنچینەییەکە بە بچووکردنەوەیەك ڕێژەکەی $\frac{1}{2}$ بێت بکێشە.

نموونــــە 2

دۆزینەوەی پۆوتانی شێوەیەکی ئەندازەیی هاوشێوەی شێوە دراوەکە

پۆوتانی خاڵی D وریژەی ئەو هاوریژە ئەندازەییەی جێگۆرکێ بەخاڵی B بۆ خاڵی D دەکات و جۆرەکەشی بدۆزەوە ئەگەر بزانیت کە هەردوو سێگۆشەی AOB و COD هاوشێوەن.

لەبەرئەوەی دوو سێگۆشەکە هاوشێوەن واتە $\frac{OA}{OC}=\frac{OB}{OD}$



$\frac{2}{4}=\frac{3}{OD}$	بەهای هەر پێوانەیەك دانراوە
$2OD=12$	لێکدانی دوولا و دوو نێوان کراوە
$OD=6$	هەردوولا دابەشی دوو کراوە.

لەبەرئەوەی D لەسەر تەوەری xە، بۆیە y سفرە. و لەبەرئەوەی $OD=6$ ئەوا پۆی یەکەم یەکسانە بە 6 واتە $x=6$. کەواتە پۆوتانی D بریتییە لە $(6,0)$. لەبەرئەوەی $(6,0)=(3\times2,0\times2)$ ئەوا ریژەی جێگۆرکێیەکە بریتییە لە 2 گەورەکردن.



خاڵی چاودێری

2. دوو سێگۆشەی MON و POQ هاوشێوەن کاتێك $M(-10,0)$ و $P(-15,0)$ و $Q(0,-30)$ بێت.
پۆوتانی N و ریژە هاوریژەییەکەی بدۆزەوە پاشان جۆرەکەی دیاریبکە.

نموونــــە 3

سەلماندنی هاوشێوەبوونی دوو سێگۆشە بەهۆی پۆوتانەوە.



دراو: $A(1,5)$ ، $B(-1,3)$ ، $C(3,4)$ ، $D(-3,1)$ ، $E(5,3)$

داواکراو: بیسەلمێنە هەردوو سێگۆشەی ABC و ADE هاوشێوەن.

هەنگاوی 1: خاڵەکان دیاریبکە پاشان وێنەی دوو سێگۆشەکە بکێشە.

هەنگاوی 2: یاسای دووری بۆ هەژمارکردنی دریژی لایەکان بەکاربێنە.

$$AB=\sqrt{(-1-1)^2+(3-5)^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$$

$$AC=\sqrt{(3-1)^2+(4-5)^2}=\sqrt{5}$$

$$AD=\sqrt{(-3-1)^2+(1-5)^2}=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$$

$$AE=\sqrt{(5-1)^2+(3-5)^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$$

هەنگاوی 3: ریژەی هاوشێوەبوون بدۆزەوە.

$$\frac{AB}{AD}=\frac{2\sqrt{2}}{4\sqrt{2}}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{AC}{AE}=\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}=\frac{1}{2}$$

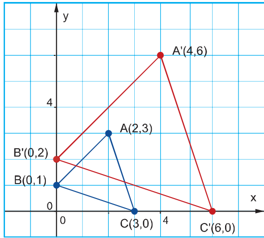
لەبەرئەوەی $\frac{AC}{AE}=\frac{AB}{AD}$ و لەبەرئەوەی $\widehat{BAC}\cong\widehat{DAE}$ کەواتە دووسێگۆشەکە هاوشێوەن.

خاڵی چاودێری

3. **دراو:** $R(-2,0)$ و $S(-3,1)$ و $T(0,1)$ و $U(-5,3)$ و $V(4,3)$.
داواکراو: بیسەلمێنە هەردوو سێگۆشەی RST و RUV هاوشێوەن.

نموونـــــه 4 بەکارهێنانی سێ لا (لا، لا، لا) بۆ هاوشێوەبوونی سێگۆشەکان

سێگۆشەی ABC وێنەکەی $A'B'C'$ بەگەورەکردنێك ڕێژەکەی 2 بێت بکێشە، پاسادانی هاوشێوەبوونی دوو سێگۆشەکە بکە.



هەنگاوی 1: بۆ دۆزینەوەی پۆوتانی سێگۆشەی $A'B'C'$ پۆوتانی هەر خاڵێك لێکدانی 2 بکە.

$$A(2, 3) \to A'(2\times 2, 3\times 2) \to A'(4, 6)$$
$$B(0, 1) \to B'(0\times 2, 1\times 2) \to B'(0, 2)$$
$$C(3, 0) \to C'(3\times 2, 0\times 2) \to C'(6, 0)$$

هەنگاوی 2: وێنەی سێگۆشەی $A'B'C'$ بکێشە.

هەنگاوی 3: یاسای دووری بۆ هەژمارکردنی درێژی لایەکان بەکاربێنە.

$$AB = \sqrt{(2-0)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$
$$A'B' = \sqrt{(4-0)^2 + (6-2)^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$
$$BC = \sqrt{(3-0)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{10}$$
$$B'C' = \sqrt{(6-0)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$
$$AC = \sqrt{(3-2)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{10}$$
$$A'C' = \sqrt{(6-4)^2 + (0-6)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

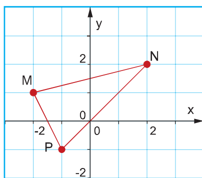
هەنگاوی 4: ڕێژەی هاوشێوەبوون بدۆزەوە.

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{4\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = 2 \qquad \frac{B'C'}{BC} = \frac{2\sqrt{10}}{\sqrt{10}} = 2 \qquad \frac{A'C'}{AC} = \frac{2\sqrt{10}}{\sqrt{10}} = 2$$

لەبەرئەوەی $\frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{A'B'}{AB}$ مانای دوو سێگۆشەی $A'B'C'$ و ABC هاوشێوەن.



4. وێنەی سێگۆشەی MNP بە گەورەکردنێك ڕێژەکەی 3 بێت بکێشە ساغبکەوە سێگۆشەکە و وێنە گەورەکراوەکەی هاوشێوەن.



بیربکەوە و تاوتوێبکە

1. پۆوتانی سەرەکانی سێگۆشەی JKL بریتیین لە $J(0, 0)$ و $K(0, 2)$ و $L(3, 0)$ پۆوتانی سەرەکانی وێنەی ئەم سێگۆشەیە بەهاوڕێژەی ئەندازەیی بریتیین لە $J'(0, 0)$ و $K'(0, 8)$ و $L'(12, 0)$ چۆن هاوڕێژەی ئەندازەیی دەدۆزیتەوە؟ چۆن جۆرەکەی دیاریدەکەیت؟

2. ڕێکخەرە: خشتەکەی خوارەوە بنووسە و تەواوی بکە، لەهەر چوارچێوەیەکدا ئەوەی داواکراوە بینووسە.



پێناســـــه	سیفەت
گەورەکردن و بچووکردنەوە	
نموونـــــه	دژە نموونـــــه

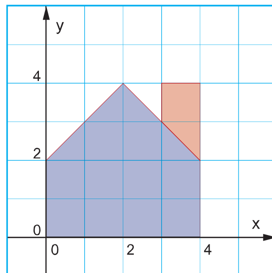
3-1 ڕاهێنانەکان

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

1 **زاراوەکان** ڕێژەی پێوانەکانی وێنەی شێوەیەکی ئەندازەیی بە گەورەکردن یان بچووکردنەوە بریتییە لە ___?___ (هاوڕێژەی ئەندازەیی، ڕێژەی هاوڕێژەی ئەندازەیی).

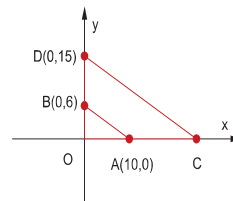
نموونە 1

2 **نەخشەکێشانی ڕوونکردنەوەیی Graphic Design** یەکێك لە ئەندازیارەکان شێوەی بەرامبەری نەخشەکێشا بۆ ئەوەی ببێتە دروشمی یەکێك لەدامەزراوەکان. بەڕێوەبەری دامەزراوەکە داوای لەئەندازیارەکە کرد ئەو دروشمە بەڕێژەی 2 گەورە بکات. وێنەی دروشمەکە دوای گەورەکردن بکێشە.

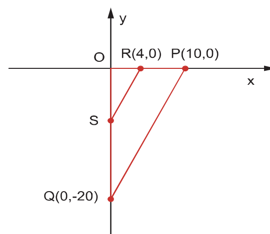


نموونە 2

3 دوو سێگۆشەی AOB و COD هاوشێوەن پۆوتانی C و ئەو ڕێژە هاوڕێژە ئەندازەییە بدۆزەوە کە سێگۆشەی AOB بۆ سێگۆشەی COD جێگۆڕکێ پێدەکات جۆری هاوڕێژە ئەندازەییەکە چییە؟



4 هەردوو سێگۆشەی ROS و POQ هاوشێوەن پۆوتانی S و ئەو ڕێژە هاوڕێژە ئەندازەییە بدۆزەوە کە سێگۆشەی POQ بۆ سێگۆشەی ROS جێگۆڕکێ پێدەکات جۆری هاوڕێژە ئەندازەییەکە چییە؟



نموونە 3

5 دراو: $A(0, 0)$ و $B(-1, 1)$ و $C(3, 2)$ و $D(-2, 2)$ و $E(6, 4)$.

داواکراو: بیسەلمێنە دوو سێگۆشەی ABC و ADE هاوشێوەن.

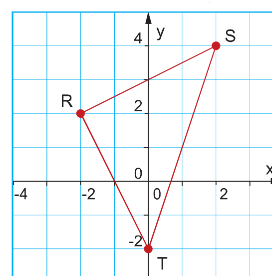
6 دراو: $J(-1, 0)$ و $K(-3, -4)$ و $L(3, -2)$ و $M(-4, -6)$ و $N(5, -3)$.

داواکراو: بیسەلمێنە دوو سێگۆشەی JKL و JMN هاوشێوەن.

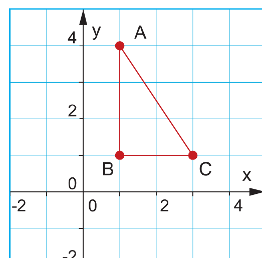
نموونە 4

هەنگاوی جۆراوجۆر وێنەی هەریەکە لەسێگۆشەکان بە گەورەکردنێك کە ڕێژەکەی دراوە بکێشە و پاشان پاسادانبکە لەوەی سێگۆشە بنچینەییەکە و وێنەکەی هاوشێوەن.

7 بەڕێژەی $\frac{3}{2}$



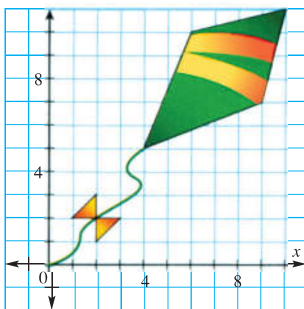
8 بەڕێژەی 2



ڕاهێنان و شیکارکردنی پرسیارەکان

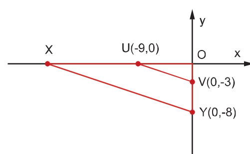
شیکارکردنی پرسیارەکان	تەماشای نموونە
10	1
12–11	2
14–13	3
16–15	4

ڕاهێنانی ئازاد

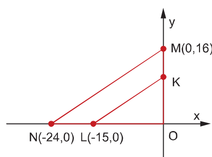


9 **ڕێکلامەکان** بریکارێکی بڵاوکردنەوەی ڕێکلام وێنەی بەرامبەری بۆ دروشمی مانگی کرین و فرۆشتن دروستکرد بریکارەکە دەیەوێت دروشمەکە بچووک بکاتەوە بەرێژەی نیوە تا لەسەر کارت چاپی بکات. وێنەی دروشمەکە پاش بچووککردنەوە بکێشە.

10 دوو سێگۆشەی UOV و XOY هاوشێوەن پۆوتانی X و ئەو ڕێژە ئەندازەییە بدۆزەوە کە سێگۆشەی UOV بۆ سێگۆشەی XOY جێگۆڕکێ پێدەکات جۆری هاوڕێژە ئەندازەییەکە دیاریبکە.



11 دوو سێگۆشەی MON و KOL هاوشێوەن پۆوتانی K و ئەو ڕێژە هاوڕێژە ئەندازەییە بدۆزەوە کە سێگۆشەی MON بۆ سێگۆشەی KOL جێگۆڕکێ پێدەکات جۆری هاوڕێژە ئەندازەییەکە دیاریبکە.



12 دراو: $D(-1, 3)$ و $E(-3, -1)$ و $F(3, -1)$ و $G(-4, -3)$ و $H(5, -3)$

داواکراو: بیسەلمێنە دوو سێگۆشەی DEF و DGH هاوشێوەن.

13 دراو: $M(0, 10)$ و $N(5, 0)$ و $P(15, 15)$ و $Q(10, -10)$ و $R(30, 20)$

داواکراو: بیسەلمێنە دوو سێگۆشەی MNP و MQR هاوشێوەن.

هەنگاوی جۆراوجۆر وێنەی هەریەکە لە سێگۆشەکان دوای جێگۆڕکێ پێکردنیان بکێشە بە گەورەکردنێك یان بچووکردنێك بەرێژەی k . پاشان پاسادانیبکە لەوەی سێگۆشە بنچینەییەکە وێنەکەی هاوشێوەن.

14 $J(-2, 0)$ ، $K(-1, -1)$ ، $L(-3, -2)$ ؛ $k = 3$.

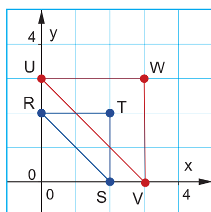
15 $M(0, 4)$ ، $N(4, 2)$ ، $P(2, -2)$ ؛ $k = \frac{1}{2}$.

16 **بیرکردنەوەی ڕەخنەگر** ئایا ئەو جێگۆڕکێ ئەندازەییەی خاڵی (x, y) بۆ خاڵی $(2x, 4y)$ جێگۆڕکێ پێدەکات، هاوڕێژەیەکی ئەندازەییە؟ وەڵامەکەت ڕوونبکەوە.

17 **هەڵە لە شیکردنەوەدا** لە خوارەوە دوو شیکار بۆ دۆزینەوەی ڕێژەی هاوڕێژەی ئەندازەیی کە سێگۆشەی RST بۆ سێگۆشەی UVW جێگۆڕکێ پێدەکات کامیان هەڵەیە؟ وەڵامەکەت ڕوون بکەوە

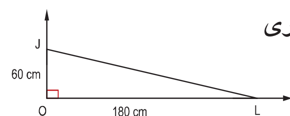
أ
بۆ جێگۆڕکێ پێکردنی سێگۆشەی RST بۆ سێگۆشەی WVU
پۆوتانی هەر خاڵێك لە $\frac{3}{2}$ دراوە
ڕێژەی هاوڕێژە ئەندازەییەکە $= \frac{3}{2}$

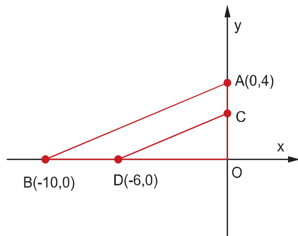
ب
ڕێژەی هاوڕێژە ئەندازەییەکە
بریتییەلە ڕێژەی نێوان لایەکانی
سێگۆشەکە لەبەرئەوەی $\frac{RT}{UW} = \frac{3}{2}$
واتە ڕێژەکە $\frac{2}{3}$



18 **بنووسە** سێگۆشەی $A'B'C'$ وێنەی سێگۆشەی ABC بەهاوڕێژەیەکی ئەندازەیی، پەیوەندی لە نێوان ڕێژەی هاوڕێژە ئەندازەییەکە و ڕێژەی هاوشێوە بوونەکە لە نێوان دوو سێگۆشەکەدا چییە؟ وەڵامەکەت ڕوونبکەوە.

19 پۆوتانی J و L چییە، ئەگەر واتدانا کە هەریەك یەکە لەسەر دوو تەوەری پۆوتانەکان 60 cm بێت وێنەی سێگۆشەکە و گەورەکردنەکەی لە ڕووتەختی پۆوتانەکاندا بە ڕێژەی 3 بکێشە.





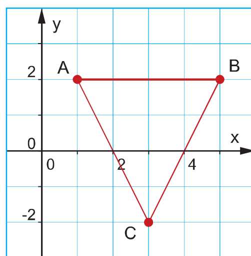
20 کام پۆوتان بۆ خاڵی C هەڵدەبژێری تا هەردوو سێگۆشەی AOB و COD هاوشێوەبن.

(أ) $(0, 2.4)$ (ج) $(0, 3)$

(ب) $(0, 2.5)$ (د) $(0, 3.6)$

21 سێگۆشەی $A'B'C'$ گەورەکراوی سێگۆشەی ABC بەرێژەی 2. ئەگەر چێوەی ABC 60 یەکە بێت ئایا چێوەی $A'B'C'$ چەندە؟

(أ) 30 یەکە (ب) 60 یەکە (ج) 120 یەکە (د) 240 یەکە



22 کام سێگۆشەی DEF هاوشێوەی سێگۆشەی ABC دەبێت.

(أ) $D(1, 2)$ ، $E(3, 2)$ ، $F(2, 0)$

(ب) $D(-1, -2)$ ، $E(2, -2)$ ، $F(1, -5)$

(ج) $D(1, 2)$ ، $E(5, 2)$ ، $F(3, 0)$

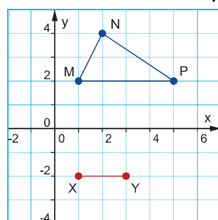
(د) $D(-2, -2)$ ، $E(0, 2)$ ، $F(-1, 0)$

23 **کورتە وەڵام** $\overline{AB}$ بەرێژەی 3 گەورەکرا کاتێك $A(3, 2)$ و $B(7, 5)$ بێت درێژی $\overline{A'B'}$ چەندە؟

بەرەنگاری و فراوانکردن

24 چەند سێگۆشە یەکێك لەلایەکانی $\overline{XY}$ بێت هاوشێوەی سێگۆشەی MNP دەبن؟

25 پۆوتانی Z بدۆزەوە کاتێك سێگۆشەی XYZ هاوشێوەی سێگۆشەی MPN بێت.

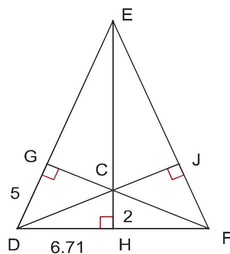


26 دولای لاکێشەیەك لەسەر تەوەری پۆوتانەکانە، ئەگەر یەکێك لەسەرەکانی بکەوێتە سەر خاڵی بنەڕەت و سەرەکەی تری بکەوێتە سەر ڕاستەهێڵی $y = 2x$ بیسەلمێنە هەردوو لاکێشەکە مەرجەکانی پێشوو پاساداں دەکەن هاوشێوەدەبن.

27 سەرەکانی سێگۆشەی ABC بریتیین لە $A(0, 1)$ و $B(3, 1)$ و $C(1, 3)$ دوو شوێن بۆ سەری F بدۆزەوە ئەگەر $D(1, -1)$ و $E(7, -1)$ بن بۆ ئەوەی دوو سێگۆشەکە هاوشێوەبن.

پێداچوونەوەی لولپێچی

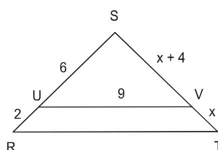
لاسەنگەیەك بۆ نواندنی بارەکە بنووسە (پۆلەکانی پێشوو)



28 بەرزکەرەوەیەك (کرێن) بەلایەنی کەمەوە 250kg هەڵدەگرێت. دووتەن کێشی هەریەکەیان 50kg بە هەردوو لای تولێکەوە کە بارستاییەکەی 5kg جێگیرکرا هێمای گۆڕاوی x بۆ ئەو بارستاییە دابنێ کە بۆ تولەکە زیادکرا لاسەنگەیەك بنوسە x پاسادانی بکات.

درێژی هەر پارچە ڕاستەهێڵێك بدۆزەوە ئەگەر بزانی $\overline{DE} \cong \overline{FE}$

29 $\overline{HF}$ **30** $\overline{JF}$ **31** $\overline{CD}$



درێژی هەر پارچە ڕاستەهێڵێك بدۆزەوە ئەگەر بزانی دوو سێگۆشەی RST و USV هاوشێوەبن.

32 $\overline{RT}$ **33** $\overline{VT}$ **34** $\overline{ST}$

4-1 ئاڕاستەبڕەکان

Vectors



ئامانجەکان

- دۆزینەوەی درێژی ئاڕاستەبڕ و ئاڕاستەی ئاڕاستەبڕەکان و کۆکردنەوەیان بۆ شیکارکردنی پرسیارەکانی ژیانی ڕۆژانە بەکاردێن.

زاراوەکان
Vocabulary

ئاڕاستەبڕ
Vector

پێکنەری ئاڕاستەبڕ
Component

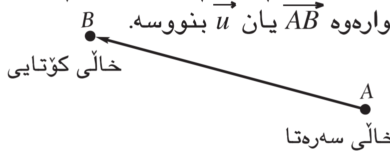
درێژی ئاڕاستەبڕ
Magnitude

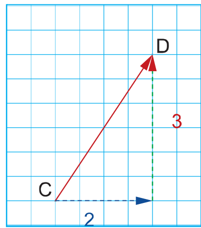
ئاڕاستەی ئاڕاستەبڕ
Direction

کێ ئەمە بەکاردەهێنێت؟

ئەوانەی پێشبڕکێی بەلەمەکانیان لە ڕووبارەکاندا کردۆتە پیشەی خۆیان، ئاڕاستەبڕەکان بەکاردێنن بۆ ئەوەی ئاڕاستەی ڕێڕەوی ئاو لەبەر چاوبگرێ کاتێك پێشبڕکێیەکە ئەنجام دەدەن. (نموونە ٥)

دەتوانیت ئاڕاستەبڕەکان بۆ نواندنی خێرایی و ئاڕاستەی جوڵەی تەنێکی جوڵاو بەکاربهێنێت **ئاڕاستەبڕ Vector** بڕێکە بە درێژی و ئاڕاستە دیاری دەکرێت دەتوانی ئاڕاستەبڕێك بەپارچە ڕاستەهێڵێکی ئاڕاستەکراو وێنە بکەی بۆ ناونانی ئاڕاستەبڕی خوارەوە $\overrightarrow{AB}$ یان $\vec{u}$ بنووسە.



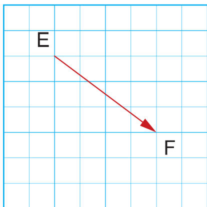


هەروەها دەتوانیت ئاڕاستەبڕ بە بەکارهێنانی دوو پێکنەرەکەی ناوبنێی **دوپێکنەری ئاڕاستەبڕەکە Components** دوو ژمارەن یەکەمیان لەمەودای **جوولەی ئاسۆیی** و دووەمیان لەمەودای **جوڵەی ستونیدایە** هەردووکیان پێویستە لەخاڵی سەرەتای ئاڕاستەبڕەکەوە بۆ خاڵی کۆتایی بچن بەو شێوەیەی کە پێکنەری یەکەمی x و پێکنەری دووەمی y بێت و بە $\langle x, y\rangle$ دەنوسرێت بۆ نموونە دەنووسرێت $\langle 2, 3\rangle$ کە ئاڕاستەبڕی $\overrightarrow{CD}$ دەگەیێنێت.

نموونە 1 نووسینی ئاڕاستەبڕ بە دوو پێکنەرەکانی

هەریەکە لەم ئاڕاستەبڕانە بە دوو پێکنەرەکەی بنووسە.

أ ئاڕاستەبڕی $\overrightarrow{EF}$



بۆ گواستنەوەی لە خاڵی E وە بۆ خاڵی F ، 4 یەکە بۆ لای ڕاست و 3 یەکە بۆ خوارەوە بجوڵێت، پێکنەری یەکەم $+4$ و پێکنەری دووەم -3 دەبێت، کەواتە ئاڕاستەبڕی $\overrightarrow{EF}$ بریتییە لە ئاڕاستەبڕی $\langle 4, -3\rangle$

ب ئاڕاستەبڕی $\overrightarrow{PQ}$ کاتێك $P(7, -5)$ و $Q(4, 3)$

$\overrightarrow{PQ} = \langle x_2 - x_1,\ y_2 - y_1\rangle$ پۆوتانی خاڵی سەرەتا لە پۆوتانی خاڵی کۆتایی

$\overrightarrow{PQ} = \langle 4-7,\ 3-(-5)\rangle$ دەربکە لەجیاتی هەر پۆوتانێك بەهاکەی دابنێ.

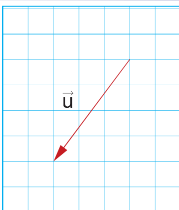
$\overrightarrow{PQ} = \langle -3,\ 8\rangle$ سادەبکە.

خاڵی چاودێری

1. هەر ئاڕاستەبڕێك بەدوو پێکنەرەکەی بنووسە.

أ $\vec{u}$

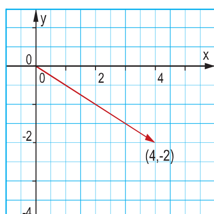
ب $\overrightarrow{AB}$ کاتێك $A(-1, 1)$ ، $B(6, 2)$



درێژی ئاراستەبڕ Magnitude بریتییە لەو دوورییەی دەکەوێتە نێوان خاڵی سەرەتاو خاڵی کۆتایی ئەم ژمارەیە لەئاراستەبڕدا بەشێوەی $|\overrightarrow{AB}|$ یان $|\vec{v}|$ دەنوسرێت.
کاتێك ئاراستەبڕ بۆ نواندنی خێرایی شتێکی جوڵاو بەئاراستەیەکی دیاریکراو بەکاردێت، ئەوا درێژی ئاراستەبڕەکە یەکسانە بەخێرایی تەنەجوڵاوەکە بەمەش درێژی ئەو ئاراستەبڕەی جوڵەی بەلەمی رووبارەکە دەنوێنێت بریتییە لە خێرایی بەلەمەکە.

نموونــــە 2 دۆزینەوەی درێژی ئاراستەبڕ

وێنەی ئاراستەبڕی$\langle 4, -2\rangle$لە رووتەختی پۆوتاندا بکێشە درێژییەکەی هەژماربکە و وەڵامەکەت بۆ نزیکترین دەیەك نزیکبکەوە.

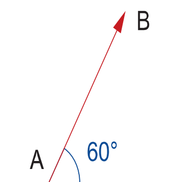


هەنگاوی 1: وێنەی ئاراستەبڕەکە بەبەکارهێنانی خاڵی بنەرەت وەك خاڵی سەرەتا بکێشە خاڵی کۆتایی بریتییە لە$(4, -2)$

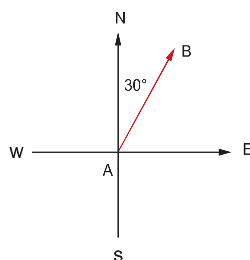
هەنگاوی 2: درێژ ئاراستەبڕەکە بەبەکارهێنانی یاسای دووری هەژماربکە.
$$|\langle 4, -2\rangle| = \sqrt{(4-0)^2 + (-2-0)^2} = \sqrt{20} \approx 4.5$$



2. وێنەی ئاراستەبڕی$\langle -3, 1\rangle$ لە رووتەختی پۆوتاندا بکێشە درێژییەکەی هەژماربکە وەڵامەکەت بۆ نزیکترین دەیەك نزیکبکەوە.



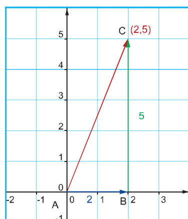
ئاراستەی ئاراستەبڕ Direction ئەو گۆشەیە کە لەگەڵ راستەهێڵی ئاسۆدا دروستی دەکات و ئەو گۆشەیە بە ئاراستەی پێچەوانەی میلی کاتژمێر دەپێورێت کە لەبەشی موجەبی تەوەرەی یەکەمەوە دەرچووبێت.



هەروەها دەگونجێت ئاراستەی ئاراستەبڕ بە دیاریکردنی ئەو گۆشەیەی لەگەڵ یەکێك لە چوارئاراستەکان خۆرهەڵات، خۆرئاوا، باکوور، باشووردا پێکدێت دیاری بکرێت ئاراستەی ئاراستەبڕی بەرامبەر $\overrightarrow{AB}$ بریتییە لە باکوور $-30°-$ خۆرهەڵات.

نموونــــە 3 دۆزینەوەی ئاراستەی ئاراستەبڕ

ئاراستەبڕی$\langle 2, 5\rangle$ ئاراستەی باو خێراییەکەی دەنوێنێت. وێنەی ئاراستەبڕەکە لەرووتەختی پۆوتانەکاندا بکێشە، ئاراستەکەی بدۆزەوە بۆ نزیکترین پلە نزیکیبکەوە.



هەنگاوی 1: وێنەی ئاراستەبڕەکە لە رووتەختی پۆوتانەکاندا بەدیاریکردنی خاڵی بنەرەت وەك خاڵی سەرەتا بکێشە خاڵی کۆتایی خاڵی$(2, 5)$ دەبێت.

هەنگاوی 2: ئاراستەکە بدۆزەوە سێگۆشە وەستاوی ABC بکێشە ئەو گۆشەیەی ئاراستەبڕەکە لەگەڵ بەشی موجەبی تەوەرەی یەکەم دروستی دەکات بریتییە لە $\hat{A}$
$\tan \hat{A} = \frac{5}{2}$ لەمەوە دەردەچێت کە $m\hat{A} = \tan^{-1}\left(\frac{5}{2}\right) \approx 60°$

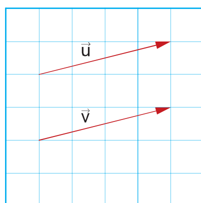


3. ئاراستەبڕی$\langle 7, 3\rangle$هێزی راکێشانی راکێشەرێکی دەریاییە، کە کەشتی بارهەڵگری خراپ بووی پێ رادەکێشرێت دەنوێنێت وێنەی ئاراستەبڕەکە لە رووتەختی پۆوتانەکاندا بکێشە ئاراستەکەی بەنزیککراوەیی بۆ نزیکترین پلە بدۆزنەوە.

ئاگاداربە!

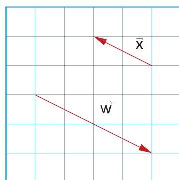
B ● ———— ● A

سەرنج بدە $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{BA}$ چونکە ئاراستەی یەکەم لە ئاراستەی دووەم جیاوزە.



دوو ئاراستەبڕ **یەکسان** دەبن ئەگەر هەمان درێژی و هەمان ئاراستەیان هەبێت بۆ نموونە $\vec{u}=\vec{v}$ بۆ دوو ئاراستەبڕی یەکسان پێویست نییە کە هەمان خاڵی سەرەتاو خاڵی کۆتاییان هەبێت.

$$|\vec{u}|=|\vec{v}|=2\sqrt{5}$$



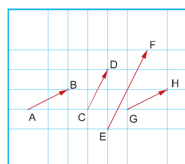
دوو ئاراستەبڕ **تەریب** دەبن ئەگەر ڕاستەهێڵەکانیان بەیەکتری تەریب بن، دەگونجێ دووئاراستەبڕی تەریب لەدرێژیدا جیاوازبن
بۆ نموونە: دوو ئاراستەبڕی $\vec{x}$ و $\vec{w}$ تەریبن
ئەگەر دوو ئاراستەبڕ یەکسان بن بەیەکتری تەریب دەبن.

$$|\vec{w}|=2\sqrt{5}$$

$$|\vec{x}|=\sqrt{5}$$

نموونـــــە 4 جیاکردنەوەی ئاراستەبڕە یەکسانەکان و ئاراستەبڕە تەریبەکان

لەوێنەی بەرامبەردا ئەمانە جیابکەوە.



أ ئاراستەبڕە یەکسانەکان

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{GH}$

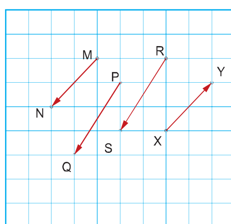
ئەو ئاراستەبڕانەی هەمان درێژی و هەمان ئاراستەیان هەیە جیایان بکەوە.

ب ئاراستەبڕە تەریبەکان

$\overrightarrow{CD} // \overrightarrow{EF}$ و $\overrightarrow{AB} // \overrightarrow{GH}$

ئەو ئاراستەبڕانەی هەمان ئاراستەیان هەیە یان ئەوانەی ئاراستەی پێچەوانە یان هەیە جیایان بکەوە.





4. لەوێنەی بەرامبەردا ئەمانە جیابکەوە

أ ئاراستەبڕە یەکسانەکان.

ب ئاراستەبڕە تەریبەکان.

بەرەنجام Resultantی دوو ئاراستەبڕ ئەو ئاراستەبڕەیە کە سەرجەمیان دەنوێنێت. بۆ کۆکردنەوەی دوو ئاراستەبڕ بە ئەندازەیی دەتوانی ڕێگای **لەسەرەوە بۆ کلك** یان ڕێگای **لاتەریب** بەکاربێنێت.



کۆکردنەوەی ئاراستەبڕەکان

ڕێگاکە	نموونە
ڕێگای لەسەرەوە بۆ کلك	
خاڵی سەرەتای **ئاراستەبڕی دووەم** لەسەر خاڵی کۆتایی **ئاراستەبڕی یەکەم** دابنێ. **بەرەنجامەکە** بریتییە لەو ئاراستەبڕەی خاڵی سەرەتاکەی خاڵی سەرەتای ئاراستەبڕی یەکەمەو خاڵی کۆتاییەکەشی خاڵی کۆتایی **ئاراستەبڕی دووەمە.**	$\vec{u}+\vec{v}$, $\vec{v}$, $\vec{u}$
ڕێگای لاتەریب	
خاڵێك وەك خاڵی سەرەتای دوو ئاراستەبڕەکە بەکاربێنە. لاتەریبەکە تەواوبکە بەزیادکردنی دانەیەك لەهەر ئاراستە بڕێك لەو خاڵە کۆتاییەدا کە خاڵی کۆتایی ئاراستەبڕێکی ترە. **بەرەنجامەکە** بریتییە لەو ئاراستەبڕەی کە خاڵی سەرەتاکەی خاڵی هاوبەشی دوو ئاراستەبڕەکەیە و خاڵی کۆتاییەکەشی لایەکەی تری تیرەکەیە.	$\vec{u}+\vec{v}$, $\vec{v}$, $\vec{u}$

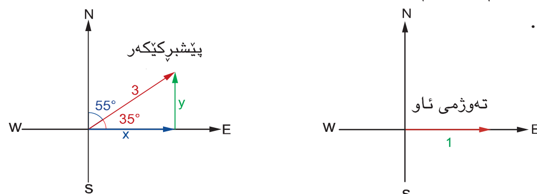
بۆئەوەی دوو ئاراستەبڕ بەجەبری کۆبکەیتەوە دوو پێکنەرەکەی کۆبکەوە ئەگەر $\vec{u}=\langle x_1, y_1\rangle$ و $\vec{v}=\langle x_2, y_2\rangle$ ئەوا $\vec{u}+\vec{v}=\langle x_1+x_2, y_1+y_2\rangle$

نموونــــە 5

جێبەجێکردن لەسەر وەرزش

بەلەمێك بەخێرایی 3 km/h بە ئاراستەی باکور - 55° - خۆرهەڵات. کەوتە ڕێ خێرایی تەوژمی ئاوەکە یەك کیلۆمەترلەهەر کاتژمێرێکدا بەئاراستەی خۆرهەڵات. خێرایی بەلەمەکە دەبێتە چەندە و ئاراستەکەی چۆنە؟ خێراییەکەی بۆ نزیکترین دەو ئاراستەکەی بۆ نزیکترین پلە نزیکبکەوە.

هەنگاوی 1: ئەو دوو ئاراستەبڕە بکێشە کە جووڵەی بەلەمەوانەکە و جووڵەی تەوژمی ئاوەکە دەنوێنن.



هەنگاوی 2: ئاراستەبڕی جووڵەی بەلەمەوانەکە بەهەردوو پێکنەرەکانییەوە بنووسە. درێژی ئەو ئاراستەبڕەی جووڵەی بەلەمەوانەکە دەنوێنێ بریتییە لە 3 km/h کە گۆشەیەك پێکدێنێ پێوانەکەی 35° لەگەڵ ئاراستەی موجەبی تەوەری یەکەم.

$\cos 35° = \frac{x}{3}$ لەمەوە دەست دەکەوێت کە $x = 3\cos 35° \approx 2.5$

$\sin 35° = \frac{y}{3}$ لەمەوە دەست دەکەوێت کە $y = 3\sin 35° \approx 1.7$

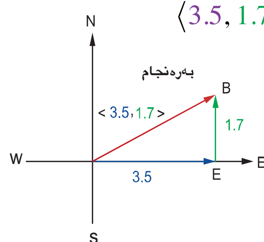
ئەو ئاراستەبڕەی جوڵەی بەلەمەوانەکە دەنوێنێت بریتییە لە $\langle 2.5, 1.7\rangle$

هەنگاوی 3: ئاراستەبڕی جوڵەی تەوژمەکە بەهەردوو پێکنەرەکانییەوە بنووسە. لەبەرئەوەی تەوژمەکە بەخێرایی **یەك کیلۆمەتر** بە ئاراستەی خۆرهەڵات دەجوڵێت ئەوا پێکنەری یەکەم یەکسانە بە 1 و پێکنەری دووەم یەکسانە بە 0 ئەو ئاراستەبڕەی جوڵەی تەوژمەکە دەنوێنێت بریتییە لە $\langle 1, 0\rangle$

هەنگاوی 4: بەرەنجامی دوو ئاراستەبڕەکە بدۆزەوە وێنەی بکێشە دوو پێکنەری ئاراستەبڕی یەکەم لەگەڵ دوو پێکنەری ئاراستەبڕی دووەم کۆبکەوە

$$\langle 2.5, 1.7\rangle + \langle 1, 0\rangle = \langle 3.5, 1.7\rangle$$

بەرەنجامی دوو ئاراستەبڕەکە بریتییە لە ئاراستەبڕی $\langle 3.5, 1.7\rangle$



هەنگاوی 5: درێژی بەرەنجامەکە و ئاراستەکەی بدۆزەوە.

درێژی بەرەنجامەکە بریتییە لە خێرایی ڕاستینەی بەلەمەوە ئەکاتە $|\langle 3.5, 1.7\rangle| = \sqrt{(3.5-0)^2 + (1.7-0)^2} \approx 3.9$

خێرایی ڕاستینەی بەلەماوانەکە بریتییە لە 3.9 km/h بەنزیکەیی ئاراستەی بەرەنجامەکە بەو گۆشەیەی لەگەڵ بەشی موجەبی تەوەری یەکەم دروستی دەکات دیاری دەکرێت.

$\tan \hat{A} = \frac{1.7}{3.5}$ لەمەوە دەستدەکەوێت کە $m\hat{A} = \tan^{-1}\left(\frac{1.7}{3.5}\right) \approx 26°$ ئاراستەی بەرەنجامەکە بریتییە لە باکوور $64°$ خۆرهەڵات بەنزیکەیی لەبەرئەوەی $90° - 26° = 64°$

> **لەبیرت بێت**
>
> نوسینی ئاراستەبڕ بەپێکنەرەکانی یارمەتیت دەدات بۆ دیاریکردنی جوڵانی ستوونی و ئاسۆیی لە گواستنەوە لە خاڵی سەرەتاوە بۆ خاڵی کۆتایی.



5. **چی دەبێت ئەگەر ...؟** گریمان بەلەماوانەکە بەخێرایی $4\ km/h$ بەئاراستەی باکور -$55°$- خۆرهەڵات جووڵانەوەی خێرایی ڕاستینەی بەلەمەوانەکە چەندە؟ و ئاراستەی جووڵەکەی چەندە؟ خێراییەکەی بۆ نزیکترین دە و ئاراستەکەی بۆ نزیکترین پلە بدۆزەوە

بیربکەوە و تاوتوێبکە

1. ڕوونیبکەوە هۆی چییە ئەو پارچە ڕاستەهێڵەی دوو سەرەکانی $(0, 0)$ و $(1, 4)$ نابێتە ئاراستەبڕ.
2. گریمان دوو پێکنەری ئاراستەبڕێك دەزانیت بەبێ بەکارهێنانی یاسای دووری چۆن درێژییەکەی دەدۆزیتەوە؟
3. ڕوونیبکەوە چۆن دوو ئاراستەبڕ جەبریانە کۆدەکەیتەوە؟
4. ڕێکخەربە ئەم هێلکارییە دروستبکەوە پاشان تەواوی بکە.

پێناسە	ناوەکان
ئاراستەبڕ	
نموونەکان	دژە نموونەکان



4-1 ڕاهێنانەکان

ڕاهێنانی ئاراستەکراو

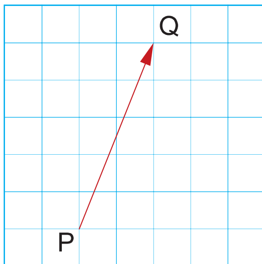
زاراوەکان **زاراوەکانی وانەکە بۆ وەڵامدانەوەی هەریەکە لەم پرسیارانە بەکاربێنە.**

1. ئەگەر دوو ئاراستەبڕ هەمان درێژی و هەمان ئاراستەیان هەبێت ___؟___ (یەکسانن، تەریبن).
2. ئەگەر دوو ئاراستەبڕ هەمان ئاراستەیان هەبێت یان لە ئاراستەدا پێچەوانەبن___؟___ (یەکسانن، تەریبن).
3. ___؟___ ئاراستەبڕ نیشانەی گەورەییەتی (درێژی ، ئاراستەی).

نموونە بڕوانە 1

هەر ئاراستەبڕێك بەدوو پێکنەرەکەی بنووسە.

4. $\overrightarrow{AC}$ کاتێك $A(1, 2)$ و $C(6, 5)$
5. ئەو ئاراستەبڕەی خاڵی سەرەتای $M(-4, 5)$ وخاڵی کۆتایی $N(4, -3)$
6. ئاراستەبڕی $\overrightarrow{PQ}$ ی بەرامبەر.



نموونە بڕوانە 2

هەر ئاراستەبڕێك لە ڕووتەختی پۆوتانەکاندا بکێشە درێژییەکەی بۆ نزیکترین دەیی بدۆزەوە.

7. $\langle 1, 4\rangle$
8. $\langle -3, -2\rangle$
9. $\langle 5, -3\rangle$

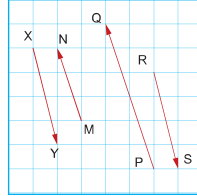
نموونە بڕوانە 3

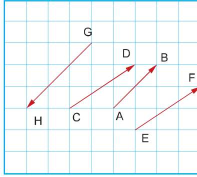
هەر ئاراستەبڕێك لە ڕووتەختی پۆوتانەکاندا بکێشە ئاراستەکەی بۆ نزیکترین پلە بدۆزەوە.

10. ئاراستەبڕی $\langle 4, 6\rangle$ تەوژمی ئاوی ڕووبارێك دەنوێنێت.
11. ئاراستەبڕی $\langle 5, 1\rangle$ جوولەی فڕۆکەیەك دەنوێنێت.
12. ئاراستەبڕی $\langle 6, 3\rangle$ جوولەی تیرێك دەنوێنێت.

4 بڕوانە نموونـە

هەریەك لەمانەی خوارەوە جیابكەوە.





13 ئاڕاستەبڕە یەكسانەكان لەوێنەی 1 دا.

14 ئاڕاستەبڕە تەریبەكان لەوێنەی 1 دا.

15 ئاڕاستەبڕە یەكسانەكان لەوێنەی 2 دا.

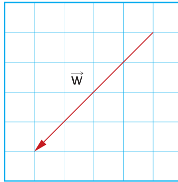
16 ئاڕاستەبڕە تەریبەكان لەوێنەی 2 دا.

ڕاهێنان و جێبەجێكردنەكان

ڕاهێنانی ئازاد

بۆ شیكاركردنی پرسیارەكان	تەماشای نموونەی
19–17	1
22–20	2
25–23	3
29–26	4
30	5

هەر ئاڕاستەبڕێك بەدوو پێكنەرەكەی بنووسە.



17 $\overrightarrow{JK}$ كاتێك $J(-6, -7)$ و $K(3, -5)$

18 $\overrightarrow{EF}$ كاتێك $E(1.5, -3)$ و $F(-2, 2.5)$

19 $\vec{W}$ (لەوێنەی بەرامبەر)

وێنەی هەر ئاڕاستەبڕێك لە ڕووتەختی پۆوتاندا بكێشە درێژییەكەی بۆ نزیكترین دەیەك نزیكبكەرەوە.

20 $\langle -2, 0\rangle$ **21** $\langle 1.5, 1.5\rangle$ **22** $\langle 2.5, -3.5\rangle$

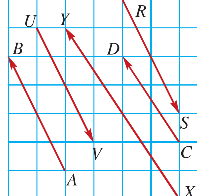
وێنەی هەر ئاڕاستەبڕێك لە ڕووتەختی پۆوتاندا بكێشە ئاڕاستەكەی بۆ نزیكترین پلە نزیكبكەوە.

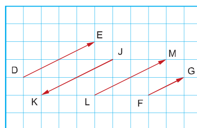
23 ئاڕاستەبڕی $\langle 4, 1.5\rangle$ جوولەی پاپۆڕێك دەنوێنێت.

24 ئاڕاستەبڕی $\langle 3.5, 2.5\rangle$ جوولەی ژێردەریاییەك دەنوێنێت.

25 ئاڕاستەبڕی $\langle 2, 5\rangle$ جوولەی موشەكێك دەنوێنێت.

هەریەك لەمانەی خوارەوە جیابكەوە.





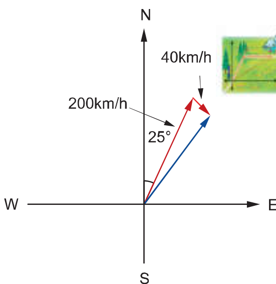
26 ئاڕاستەبڕە یەكسانەكان لەوێنەی 1 دا.

27 ئاڕاستەبڕە تەریبەكان لەوێنەی 1 دا.

28 ئاڕاستەبڕە یەكسانەكان لەوێنەی 2 دا.

29 ئاڕاستەبڕە تەریبەكان لەوێنەی 2 دا.

30 **فڕین** فڕۆكەوانێك فڕۆكە تایبەتییەكەی بەخێراییەكی نەگۆڕی 200 km/h بەئاڕاستەی باكوور - $25°$ - ڕۆژهەڵات لێدەخوڕێ، فڕۆكەكە ڕووبەڕووی بایەك دەبێتەوە كە خێراییەكەی 40 km/h بەئاڕاستەی باشوور - $45°$ - ڕۆژهەڵات. خێرایی ڕاستینەی فڕۆكەكە چەندە؟ ئاڕاستە ڕاستینەكەی چەندە؟



هەردوو ئاڕاستە بڕ كۆبكەوە.

31 $\langle 1, 2\rangle + \langle 0, 6\rangle$ **32** $\langle -3, 4\rangle + \langle 5, -2\rangle$

33 $\langle 0, 1\rangle + \langle 7, 0\rangle$ **34** $\langle 8, 3\rangle + \langle -2, -1\rangle$

35 **بیری ڕەخنەگر** ئایا كۆكردنەوە لە ئاڕاستەبڕەكاندا ئاڵوگۆڕە؟ واتە ئایا ئاڕاستەبڕەكانی $\vec{u}+\vec{v}$ و $\vec{v}+\vec{u}$ یەكسانن؟ ڕێگای لەسەرەوە بۆ كلك بەكاربێنە بۆ كۆكردنەوەی ئاڕاستەبڕەكان بەمەبەستی ڕوونكردنەوەی وەڵامەكان.

هەر ئاڕاستەبڕێك بەدوو پێكنەرەكەی بنووسە، بۆ نزیكترین دەیەك نزیكرابێتەوە.

36 درێژی 15 ئاڕاستە 42°

37 درێژی 7.2 ئاڕاستە 9°

38 درێژی 12.1 ئاڕاستەی باكور ـ 57° ـ خۆرهەلأت

39 درێژی 5.8 ئاڕاستەی باكوور ـ 22° ـ خۆرهەلأت.

40 **فیزیا** ژووری پۆلێك پەنجەرەیەكی تێدایە لە بنمیچەكەوە نزیكە بۆ داخستنی داردەستێك بەكاردێت.



أ هۆژین دارەكەی بەئاڕاستەیەك گرتووە 45° لەگەڵ زەوی ژوورەكەدا دروستدەكات. بەهێزێك برەكەی 44 نیوتن (N) بوو، پاڵی بەلێواری سەرەوەی پەنجەرەكەوە نا. ئەو پێكنەرە ستونییەی ئاڕاستەبڕەكە بدۆزەوە كە هێزی پاڵنانی سەرپەنجەرەكە دەنوێنێت. وەلأمەكەت بۆ نزیكترین دەیەك نزیكبكەوە.

ب نەشمیل دارەكەی بەئاڕاستەی 75° لەگەڵ ڕووی زەوی ژوورەكە گرت و بەهێزێك برەكەی 44 نیوتن (N) بوو پاڵی بەلێواری سەرەوەی پەنجەرەكەوە تا ئەو پێكنەرە ئەستونییەی ئاڕاستەبڕەكە بدۆزەوە كە هێزی پاڵنانی سەر پەنجەرەكە دەنوێنێت. وەلأمەكەت بۆ نزیكترین دەیەك نزیكبكەوە.

ج بۆ داخستنی پەنجەرەكە، كام لەم دوو خوێندكارە ڕووبەرووی دژواری كەمتر دەبێتەوە؟ كام لەو دوو پێكنەرە ئەستونییە هێزی پاڵپێوەنانیان گەورەترە؟

41 **ئەگەر** دڵسۆز ژمارەكانی 1 و 2 و 3 و 4 لەسەر چەند پارچە كاغەزێك نووسی و لەناو توورەكەیەكدا داینا، بە هەڕەمەكی پارچە كاغەزێكی ڕاكێشا وای دانا كە ئەمە پێكنەری ئاسۆیی دەنوێنێ، پاشان كاغەزێكی تری ڕاكێشا بێ ئەوەی كاغەزی یەكەم بگەڕێنێتەوە بۆ ناو تورەگەكە وای دانا كە ئەوەیان پێكنەری ستونی دەنوێنێت بۆ هەمان ئاڕاستەبڕ.

أ ئەگەری ئەوەی ئاڕاستەبڕەكە $\langle 1, 2\rangle$ بێت چەندە؟

ب ئەگەری ئەوەی ئاڕاستەبڕەكە تەریب بێت بە ئاڕاستەبڕی $\langle 1, 2\rangle$ چەندە؟

42 **خەملأندن** ئاڕاستەبڕی $\langle 4, 6\rangle$ بۆ تەواوكردنی هەریەك لەمانەی خوارەوە بەكاربێنە.

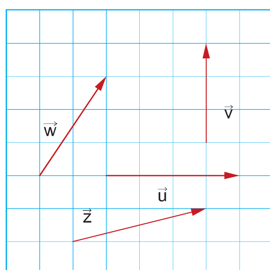
أ وێنەی ئاڕاستەبڕەكە لەسەر كاغەزی ڕوونكردنەوەیی بكێشە.

ب خەملأندنی ئاڕاستەی ئاڕاستەبڕەكە بۆ نزیكترین پلە نزیكرابێتەوە.

ج پێوانەی ئەو گۆشەیەی ئاڕاستەبڕەكە لەگەڵ ڕاستەهێڵی ئاسۆیدا دروستیدەكات بە بەكارهێنانی گۆشەپێو.

د هەژماركردنی ئاڕاستەی ئاڕاستەبڕەكە بەبەكارهێنانی پێكنەرەكانی.

هـ بەراوردبكە لەنێوان ئەو خەملأندنەی نێوان لقی (ب)دا و ئەو پێوانەیەی لە لقی (ج)دا كردووتە، و ئەو هەژمارەی لە لقی (د)دا ئەنجامتداوە.



هەنگاوی جۆراوجۆر درێژی هەریەكە لەم ئاڕاستەبڕانە بدۆزەوە ئاڕاستەكەی دیاریبكە. درێژییەكەی بۆ نزیكترین دەیەك و ئاڕاستەكەی بۆ نزیكترین پلە نزیكبكەوە.

43 $\vec{u}$

44 $\vec{v}$

45 $\vec{w}$

46 $\vec{z}$

بۆ هەر ئاڕاستەبڕێك ئاڕاستەبڕێكی تر بدۆزەوە كەهەمان درێژی هەبێت بەڵام ئاڕاستەكەی جیاوازبێت پاشان ئاڕاستەبڕێك بدۆزەوە كە هەمان ئاڕاستەی هەبێت بەڵام لەدرێژیدا جیاوازبن.

47 $\langle 2, 0\rangle$ **48** $\langle -3, 6\rangle$

49 $\langle 12, 5\rangle$ **50** $\langle 8, -11\rangle$

هەنگاوی جۆراوجۆر دوو ئاڕاستەبڕەكە كۆبكەوە پاشان درێژی بەرەنجام و ئاڕاستەكەی بدۆزەوە درێژییەكەی بۆ نزیكترین دە و ئاڕاستەكەی بۆ نزیكترین پلە نزیكبكەوە.

51 $\vec{u}=\langle 1, 2\rangle$ و $\vec{v}=\langle 2.5, -1\rangle$ **52** $\vec{u}=\langle -2, 7\rangle$ و $\vec{v}=\langle 4.8, -3.1\rangle$

53 $\vec{u}=\langle 6, 0\rangle$ و $\vec{v}=\langle -2, 4\rangle$ **54** $\vec{u}=\langle -1.2, 8\rangle$ و $\vec{v}=\langle 5.2, -2.1\rangle$

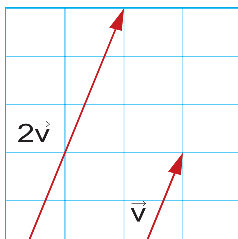
دەروازەیەك

لەسەر مێژووی بیركاری



موبیوس بەو پەتەی لەوێنەكەدا دیارە ناوبانگی دەركرد كە بریتییە لە شێوەیەكی ئەندازەیی سێ دووری یەك ڕوو و یەك لای هەیە.

55 **مێژووی بیركاری** ئۆگەست موبیوس August Möbius لە ساڵی 1827 كتێبێكی بڵاوكردەوە تیایدا باسی پارچە ڕاستەهێڵە ئاڕاستەكراوەكان دەكات ئەوەی ئەمڕۆ بە ئاڕاستەبڕەكان دەناسرێت ئەو زانایە لە كتێبەكەیدا باسی كردووە چۆن ئاڕاستەبڕێك لێكدانی ژمارەیەكی ڕاستی دەكرێت بۆ نموونە: ئەگەر ئاڕاستەبڕی $\vec{v}$ جوولەی ئۆتومبیلێك بنوێنێت ئەوا ئاڕاستەبڕی $2\vec{v}$ جوولەی ئاڕاستەبڕی دووەم دەنوێنێت كە بەهەمان ئاڕاستە دەڕوات و خێراییەكەی دوو ئەوەندەی خێرایی یەكەمە.



أ پێكنەری هەریەك لەودوو ئاڕاستەبڕی $\vec{v}$ و $2\vec{v}$ بنووسە.

ب درێژی هەریەكە لەو دوو ئاڕاستەبڕە بدۆزەوە و بەراورد لەنێوان درێژییەكانیدا بكە.

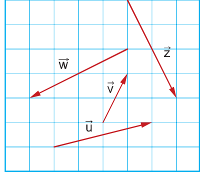
ج ئاڕاستەی هەریەك لەم ئاڕاستەبڕە بدۆزەوەو بەراورد لەنێوان ئاڕاستەكانیدا بكە.

د ڕوونیبكەوە چۆن دوو پێكنەرەكەی ئاڕاستەبڕی $\overrightarrow{kv}$ دەدۆزیەوە كاتێك k ژمارەیەكی ڕاستی بێت و دوو پێكنەرەكەی $\vec{v}$ زانراوبێت.

هـ ئاڕاستەبڕەكە لێكدانی $k=-1$ بكە بۆ نووسینی دژی $\vec{v}$ بە دوو پێكنەرەكەیەوە.

56 **بیركردنەوەی ڕەخنەگرانە** ئاڕاستەبڕی $\vec{u}$ كە درێژییەكەی u بەئاڕاستەی خۆرئاوایە كەچی ئاڕاستەبڕی $\vec{v}$ كە درێژییەكەی v ڕووە و خۆرهەڵاتە.
باسی هەرسێ ئەنجامی كۆكردنەوەی ئەم دوو ئاڕاستەبڕە بكە.

57 **بنووسە** بەراوردبكە لەنێوان پارچە ڕاستەهێڵ و تیشك و ئاڕاستەبڕدا .



58 کام لەم ئاراستەبڕانە بە ئاراستەبڕی $\langle 2, 1\rangle$ تەریبە؟

أ) $\vec{u}$ ج) $\vec{w}$

ب) $\vec{v}$ د) $\vec{z}$

59 ئاراستەبڕی $\langle 7, 9\rangle$ جووڵەی هەلیکۆپتەرێك دەنوێنێت ئاراستەی ئەو ئاراستەبڕە بۆ نزیکترین پلە چەندە؟

أ) $38°$ ب) $52°$ ج) $128°$ د) $142°$

60 ئاراستەبڕی $\langle 5, 11\rangle$ جوولەی کەشتیەك دەنوێنێت درێژی ئاراستەبڕەکە بۆ نزیکترین یەکە نزیکبکەوە.

أ) 6 ب) 8 ج) 12 د) 16

61 **تەنها وەڵام** $(-3, 6)$ خاڵی سەرەتای ئاراستەبڕی $\overrightarrow{AB}$ و $(-2, -5)$ خاڵی کۆتاییەکەیەتی، درێژی $\overrightarrow{AB}$ بۆ نزیکترین دەیەك بدۆزەوە.

بەرەنگاری و فراوانکردن

بیرت بێتەوە ئەو گۆشەیەی ئاراستەی ئاراستەبڕ دیاریدەکات لەبەشی موجەبی تەوەرەی یەکەمەوە دەردەچێت بە ئاراستەی پێچەوانەی میلی کاتژمێر دەپێورێت. ئاراستەی هەریەك لەم ئاراستەبڕانە بدۆزەوە بۆ نزیکترین پلە نزیکیبکەوە.

62 $\langle -2, 3\rangle$ **63** $\langle -4, 0\rangle$ **64** $\langle -5, -3\rangle$

65 **دەریاوانی** فەرماندەی پاپۆڕێك پلاندادەنێت بۆ ئەوەی لەناوچەیەکدا کە تەوژمی ئاوی دەریا بەئاراستەی خۆرهەڵات بەخێرایی $4\ km/h$ دەڕوات دەریاوانی بکات. ئاراستەی جولەی پاپۆڕەکە و خێراییەکەی بدۆزەوە بۆئەوەی خێراییە ڕاستییەکەی بکاتە $10\ km/h$ و ئاراستە ڕاستییەکەی باکور $75°$ خۆرهەڵات بێت (تەوژمی ئاوی دەریاکە بەهەند وەرگیراوە) خێراییەکەی بۆ نزیکترین دەیەك و ئاراستەکەی بۆ نزیکترین پلە نزیکبکەوە.

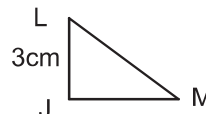
66 بۆ گەیشتن بەباخی گشتی، شوان دووری $3\ km$ بەئاراستەی باکور $30°$ خۆرهەڵات پاشان $6\ km$ بەئاراستەی خۆرهەڵات پاشان $4\ km$ بەئاراستەی باکور $80°$ خۆرهەڵات ڕۆیشت. درێژی ئەو ئاراستەبڕە چەندە کە ڕۆیشتنی شوان لەماڵەکەیەوە بۆ باخی گشتی دەنوێنێت؟ ئاراستەکەی چەندە؟ درێژییەکەی بۆ نزیکترین دەیەك و ئاراستەی بۆ نزیکترین پلە نزیکبکەوە.

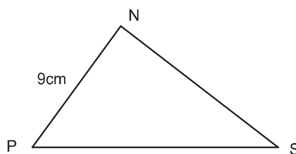
پێداچوونەوەی لولپێچی

هەریەکە لەم سستەمی هاوکێشە هێڵییانە بە ڕوونکردنەوەیی شیکاربکە (پۆلەکانی پێشوو)

67 $\begin{cases} x - y = -5 \\ y = 3x + 1 \end{cases}$ **68** $\begin{cases} x - 2y = 0 \\ 2y + x = 8 \end{cases}$ **69** $\begin{cases} x + y = 5 \\ 3y + 15 = 2x \end{cases}$

دوو سێگۆشەی JLM و NPS هاوشێوەن، چێوەی سێگۆشەی JLM $12cm$ و ڕووبەرەکەی $6\ cm^2$ پێوانەی داواکراو بدۆزەوە (پۆلەکانی پێشوو)





70 چێوەی سێگۆشەی NPS

71 ڕووبەری سێگۆشەی NPS

بەشی 1

تاقیکردنەوەی نیوەی بەش

تاقیکردنەوەی بەش وانەکان 1-1 تا 4-1.

1-1 بۆشایی پۆوتان

هەریەکە لەم خاڵانەی خوارەوە لە بۆشایی پۆوتاندا بنوێنە.

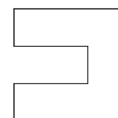
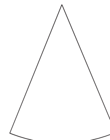
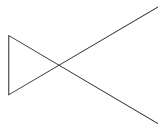
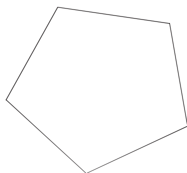
1 $(-3, 2, 1)$ 2 $(2, -3, -2)$ 3 $(3, 1, -3)$

لەبۆشایی پۆوتاندا وێنەی هەریەك لەم هاوکێشە هێلییانە (رووتەختانە)ی خوارەوە بە ڕوونکردنەوەیی بکێشە.

4 $2x-2y+4z=8$ 5 $2x+y-2z=-4.5$ 6 $x+5y+3z=15$

2-1 چەندلایەکان

ئەگەر شێوەکە چەندلایە دیارییکە، ئەگەر وابوو ناوی بنێ.

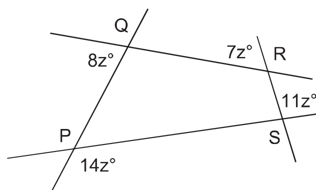
7  8  9  10 

11 سەرجەمی پێوانەی گۆشەکانی ناوەوەی چەندلایەکی قۆقزی 16 لا بدۆزەوە.

12 ستونێك بنکەکەی شەشلایەکی ڕێکە پێوانەی هەر گۆشەیەکی ناوەوەی چەندە؟

13 وێنەی بەرامبەر هێلکاری باخێکی پەرژین کراو پیشاندەدات پێوانەی هەریەکە لە دەرە گۆشەکانی بدۆزەوە.

14 پێوانەی هەریەکە لەگۆشەکانی دەرەوەی دەلایەکی ڕێك بدۆزەوە.

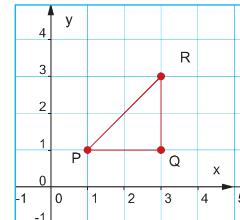


3-1 هاوڕێژەی ئەندازەیی

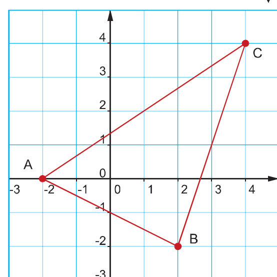
15 بیسەلمێنە دوو سێگۆشەی ABC و ADE کاتێك $A(-1, 2)$، $B(-3, -2)$، $C(3, 0)$، $D(-2, 0)$، $E(1, 1)$ هاوشێوەن

وێنەی هەر سێگۆشەیەك بەو هاوڕێژە ئەندازەییەی ڕێژەکەی دیاریکراوە بکێشە. ساغیبکەوە سێگۆشە بنەڕەتییەکە و وێنەکەی هاوشێوەن.

16 ڕێژەی گەورەکردنەکە 3 بێت.



17 ڕێژەی گەورەکردنەکە 1.5 بێت.



4-1 ئاڕاستەبڕەکان

وێنەی هەریەك لەم ئاڕاستەبڕانە لە ڕووتەختی پۆوتاندا بکێشە، درێژییەکەی بۆ نزیکترین دەیەك هەژماربکە.

18 $\langle 3, 1\rangle$ 19 $\langle -2, -4\rangle$ 20 $\langle 0, 5\rangle$

وێنەی هەریەك لەم ئاڕاستەبڕانە لە ڕووتەختی پۆوتاندا بکێشە، لارییەکەی بۆ نزیکترین پلە هەژماربکە.

21 خێرایی با بە ئاڕاستەبڕی $\langle 2, 1\rangle$ نوێنراوە.

22 تەوژمی ئاوی ڕووبارێك بەئاڕاستەبڕی $\langle 5, 3\rangle$ نوێنراوە.

23 هێزی سپرینگ بەئاڕاستەبڕی $\langle 4, 4\rangle$ نوێنراوە.

5-1 ڕووبەری بازنە و چەندلاڕێکەکان

Area of circles and regular polygons



کێ ئەمە بەکاردەهێنێت؟

تەپڵ ژەنەکان بۆ دەستکەوتنی دەنگە دیاریکراوەکان تەپڵی پێوانە جیاواز بەکاردێنن، ئەو دەنگانەی تەپڵەکان دەریدەکەن بەندە بە ڕووبەری ڕووە بازنەییەکەیەوە. (نموونەی 2).

ئامانجەکان

- دۆزینەوەی یاسایەك بۆ هەژمارکردنی ڕووبەری بازنەو یاسایەك بۆ هەژمارکردنی چێوەکەی و بەکارهێنانیان
- دۆزینەوەی یاسایەك بۆ هەژمارکردنی ڕووبەری چەندلاڕێکەکان و بەکارهێنانی.

زاراوەکان
Vocabulary

بازنە
Circle

چەقی بازنە
Center of a circle

نیوەتیرەی بازنە
Radius of a circle

تیرەی بازنە
Diameter of a circle

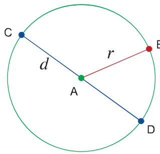
چەقی چەندلای ڕێك
Center of a regular polygon

ئەستوندەگی چەندلای ڕێك
Apothem of regular polygon

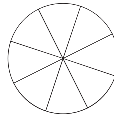
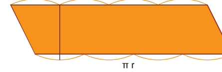
چەقەگۆشە لەچەندلای ڕێك
Central angle of a regular polygon

بازنە Circle کۆمەڵە خاڵێکە لە ڕووتەختدا دووری هەریەکیان لەخاڵێکی زانراوەوە کە پێی دەوترێت **چەقی بازنە** یەکسانە بە **نیوەتیرەی بازنە** (درێژی **تیرەی بازنە** دوو ئەوەندەی نیوەتیرەکەیەتی، (ئەو پارچە . لەوێنەی بەرامبەردا، A چەقی بازنەکەیە و نیوەتیرەکەی بریتییە لە $r = AB$ و تیرەکەی بریتییە لە $d = CD$.

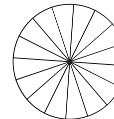
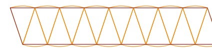
ڕێژەی چێوەی بازنەی C بۆ درێژی تیرەکەی d ژمارەیەکی نەگۆڕە و ناگۆڕێت بەگۆڕانی نیوەتیرەکەی ئەو ڕێژەیەش ژمارەیەکی نارێژەییە بە پای π دەخوێنرێتەوە بەجۆرێك دەتوانیت بنووسیت $\pi = \frac{C}{d}$. ئەگەر C مان بەپێی d هەژمارکرد ئەوا ڕێسای چێوەی بازنەمان دەستدەکەوێت $C = \pi d$ یان $C = 2\pi r$ لەبەرئەوەی $d = 2r$



دەتوانین چێوەی بازنە بەکاربێنین بۆ دۆزینەوەی ڕووبەرەکەی. بازنەکە دابەشبکە وپارچەکان ڕێکبخە بەجۆرێك شێوەیەکت بۆ دەربچێت هاوشێوەی لاتەریبێك بێت وەك لە شێوەکەدا دیارە.

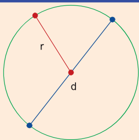
بنکەی لاتەریبەکە یەکسانە بەنیوەی چێوەی بازنەکە بەنزیکەیی یان πr . بەرزییەکەشی نیوەتیرەی بازنەکەیە بەنزیکەیی لەمەشەوە دەستدەکەوێت ڕووبەری بازنەکە بەنزیکەیی. $A \approx \pi r \times r = \pi r^2$

هەر کاتێك ژمارەی پارچەکان زیاتربێت، ڕووبەری لاتەریبەکە لە ڕووبەری بازنەکە نزیکدەبێتەوە، بەمەش بەها نزیکەییەکەی لەبەها ڕاستییەکەی نزیکتردەبێتەوە.



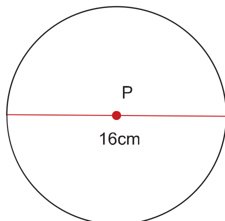
چێوە و ڕووبەری بازنە



کاتێك بازنەیەك نیوەتیرەکەی r و تیرەکەی d بێت چێوەکەی c بەیاسای $C = \pi d$ یان $C = 2\pi r$ و ڕووبەرەکەی بە یاسای $A = \pi r^2$ هەژماردەکرێت.

نموونە 1

هەژمارکردنی چێوە و ڕووبەری بازنە



داواکراو هەژماربکە.

أ ڕووبەری بازنەی بەرامبەر.

$A = \pi r^2$ یاسای ڕووبەری بازنە.

$A = \pi (8)^2$ تیرە دابەش 2 بکە بۆ دۆزینەوەی نیوەتیرە، پاشان لەجیاتی نیوەتیرەکە بەهاکەی دابنێ ئینجا سادەی بکە.

$A = 64\pi$

ڕووبەری بازنەکە $A = 64\pi\ cm^2$

ب نیوەتیرەی بازنەیەك چێوەكەی 24π m بێت.

$C = 2\pi r$	یاسای چێوەی بازنە
$24\pi = 2\pi r$	لەجیاتی چێوە بەهاكەی دابنێ.
$24 = 2r$	هەردوولا دابەشی π بكە.
$r = 12$	هەردوو لا دابەشی 2 بكە.

ج چێوەی بازنەیەك ڕووبەرەكەی $9x^2\pi$ بێت بەپێی π و x ەوە.

هەنگاوی 1: نیوەتیرە r بەپێی x هەژماربكە.

$A = \pi r^2$	یاسای ڕووبەر
$9x^2\pi = \pi r^2$	لەجیاتی A بەهاكەی دابنێ
$9x^2 = r^2$	هەردوولا دابەشی π بكە
$3x = r$	ڕەگی دووجای هەردوولا وەربگرە.

هەنگاوی 2: چێوەی بازنەكە هەژماربكە بەكارهێنانی بەهای نیوەتیرەكە.

$C = 2\pi r$	یاسای چێوە
$C = 2\pi(3x)$	بەهای نیوەتیرەكە لەجیاتی دابنێ
$C = 6x\pi$	كورتی بكەوە.



1. ڕووبەری بازنەیەك بەپێی π هەژماربكە كە چێوەكەی $(4x-6)\pi$ cm بێت.

نموونــــە 2 جێبەجێكردن لە میوزیك

جاز لەسێ تەپڵ كە تیرەكانیان لە **10**ئنج، **12**ئنج، **14**ئنج، پێكدێت ڕووبەری هەر تەپڵێك بدۆزەوە و وەڵامەكەت لە نزیكترین دەیەك نزیكبكەوە.

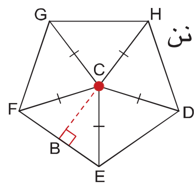
تیرە 10ئنج	تیرە 12ئنج	تیرە 14ئنج
$r = \frac{10}{2} = 5 \quad A = \pi(5)^2$	$r = \frac{12}{2} = 6 \quad A = \pi(6)^2$	$r = \frac{14}{2} = 7 \quad A = \pi(7)^2$
$A \approx 78.5$	$A \approx 113.1$	$A \approx 153.9$
ڕووبەر 78.5 ئنج دووجایە.	ڕووبەر 113.1 ئنج دووجایە	ڕووبەر 153.9 ئنج دووجایە.

لەبیرت بێت

كلیلی π لە بژمێری ڕونكردنەوەدا باشترین نزیكەرەوەیە بۆ بەهای π چاوەڕوان بە تا لە هەژماركردنی تەواودەبێت پێش ئەوەی نزیكیبكەیت.



2. چێوەی هەر تەپڵێكی نمونەی 2 هەژماربكە.



چەقی Center چەندلای ڕێك خاڵێكی ناوەوەیەتی، دوورییەكەی لەسەرەكانییەوە یەكسانن **ئەستوندەكی Apothem** چەندلای ڕێك دووری نێوان چەق و یەكێك لەلایەكانییەتی، ئەو گۆشەیەی سەرەكی چەقی چەندلاڕێكەكە بێت و لایەكانی بەدوو سەری هاوسێی یەكتریدا بڕۆن **چەقەگۆشەی Central angle** چەندلاڕێكەكەیە.

هەموو چەقەگۆشەكانی چەندلای ڕێك لە پێوانەدا یەكسانن. پێوانەی هەریەكێكیان $\frac{360^\circ}{n}$ كاتێك n ژمارەی لایەكانی چەندلاڕێكەكە بێت.

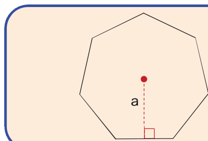
بۆ دۆزینەوەی ڕووبەری چەندلای ڕێك كەژمارەی لایەكانی n و ئەستوندەكەی a و درێژی لایەكی s بێت چەندلایەكە دابەش بكە بە n سێگۆشەی دوولایەكسان ڕووبەری هەرسێگۆشەیەك دەكاتە $\frac{1}{2}as$.

ڕووبەری چەندلایەكە $A = n\left(\frac{1}{2}as\right) = \frac{1}{2}a(ns)$ یان $A = \frac{1}{2}ap$ $p = ns$ هێمابێت بۆ چێوەی چەندلاڕێكەكە.



ڕووبەری چەندلای ڕێك

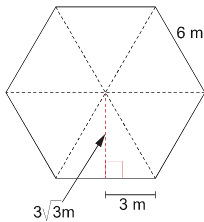
ڕووبەری چەندلایەكی ڕێك كە چێوەكەی p و ئەستوندەكەی (بەرزییەكەی) a بێت، بەیاسای $A = \frac{1}{2}ap$ هەژماردەكرێت.



نموونـــــه 3 دۆزینەوەی ڕووبەری چەندلای ڕێك

ڕووبەری هەریەکە لەم چەندلاڕێکانە بدۆزەوە وەڵامەکەت نزیکبکەرەوە بۆ نزیکترین دەیەك.

أ شەشلایەکی ڕێك درێژی لایەکەی **6 m** بێت.



چێوەی چەندلایەکە دەکاتە $36\ m\ (6\times6)$ شەشلای ڕێك دابەش دەبێت بۆ 6 سێگۆشەی ڕێك درێژی بنکەکەی $6\ m$. لەوەشەوە دەردەچێت کە ئەستوندەکی شەشلاڕێکەکە بریتییە لە $3\sqrt{3}$

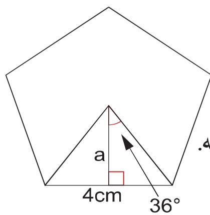
$A=\frac{1}{2}ap$ یاسای ڕووبەری چەندلا.

$A=\frac{1}{2}3\sqrt{3}\times36$ لەجیاتی دابنێ.

$A=54\sqrt{3}\approx93.5$ سادەبکە ونزیکیبکەوە بۆ نزیکترین دەیەك.

ڕووبەری شەشلایەکی ڕێك بەنزیکەیی دەکاتە $93.5\ m^2$

ب پێنجلایەکی ڕێك درێژی لایەکی **8 cm** بێت.



هەنگاوی 1 وێنەی پێنجلایەك بکێشە، سێگۆشەیەکی دوولایەکسان بکێشە سەرەکەی چەقی چەندلایەکە بێت و بنکەکەی یەکێ لەلایەکانی پێنجلایەکە بێت. پێوانەی چەقەگۆشەی چەندلایەکە $\frac{360°}{5}=72°$. لەتکەری چەقەگۆشەکە بکێشە تا سێگۆشەیەکی گۆشەوەستاوت دەستبکەوێت.

هەنگاوی 2: ڕێژەی سێگۆشەیی tan بەکاربێنە بۆ دۆزینەوەی ئەستوندەك a.

$\tan36°=\frac{4}{a}$ پێناسەی ڕێژەی سێگۆشەیی tan)

$a=\frac{4}{\tan36°}$ بەهای a هەژماربکە.

هەنگاوی 3: ئەستوندەك و درێژی لایەکی بەکاربهێنە بۆ هەژمارکردنی ڕووبەری 5 لاڕێکەکە.

$A=\frac{1}{2}ap$ یاسای ڕووبەری چەندلا.

$A=\frac{1}{2}\left(\frac{4}{\tan36°}\right)(5\times8)$ لەجیاتی دابنێ.

$A\approx110.1$ سادەبکە ونزیکیبکەوە بۆ نزیکترین دەیەك

ڕووبەری 5 لایەکە بەنزیکەیی دەکاتە $110.1\ cm^2$

لەبیر بێت

لە سێگۆشەی گۆشە وەستاودا تانجنتی گۆشە

$=\frac{\text{لای بەرامبەر}}{\text{لای تەنیشت}}$



3. ڕووبەری هەشتلایەکی ڕێك هەژماربکە کە درێژی لایەکی $4\ m$ بێت.

بیربکەوە و تاوتوێبکە

1. پەیوەندی نێوان π وچێوەی بازنە ڕوونبکەوە.
2. باسی چۆنیەتی هەژمارکردنی چەقەگۆشەی چەندلایەکی ڕێك بکە کە لە n لا پێکهاتبێت.
3. ڕێکخەریە ئەم خشتەیە دروست بکەو و تەواوی بکە.



چەندلای ڕێك درێژی لایەکەی 1 بێت					
چەندلا	ژمارەی لایەکان	چێوەکەی	پێوانەی چەقەگۆشەی	ئەستوندەك	ڕووبەر
سێگۆشە					
چوارگۆشە					
شەشلا					

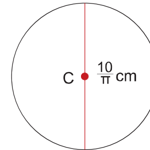
5-1 ڕاهێنانەکان

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

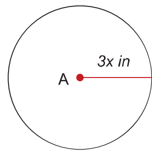
1 **زاراوەکان** چۆن ئەستوندەکی چوارگۆشەیەك دەدۆزیتەوە درێژی لایەکی 5 یەکە بێت؟

بڕوانە نموونە 1 بدۆزەوە.

2 چێوەی ئەم بازنەیەی خوارەوە.



3 ڕووبەری ئەم بازنەیەی خوارەوە.



4 چێوەی بازنەیەك ڕووبەرەکەی 36π m^2

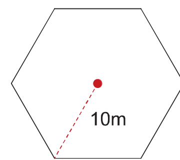
بڕوانە نموونە 2

5 **خواردن** چێشتخانەی پیتزای فورات سێ قەبارەی جیاواز لە پیتزا پێشکەش دەکات کەتیرەکانی یەك لەدوایییان 15 cm و25 cm و 40 cm ڕووبەری هەر پیتزایەك هەژماربکە و نزیکیبکەوە بۆ نزیکترین دەیەك

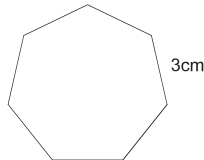
بڕوانە نموونە 3

ڕووبەری هەریەك لەم چەندلاڕێکانە بدۆزەوە و نزیککرابێتەوە بۆ نزیکترین دەیەك

6



7



8 سێگۆشەیەکی ڕێك ئەستوندەکەی 2 cm بێت.

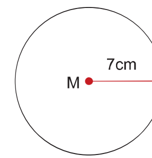
9 بازنەیەك چێوەکەی 5 m بێت.

ڕاهێنان و جێبەجێکردنەکان

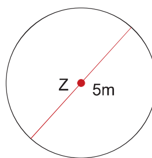
ڕاهێنانی ئازاد	
بۆ شیکارکردنی پرسیارەکان	سەیری نموونەی
12-10	1
13	2
17-14	3

بەپێ ی π ئەو ئەنجامانەی خوارەوە بدۆزەوە.

10 ڕووبەری ئەم بازنەیە



11 چێوەی ئەم بازنەیە

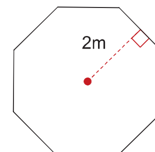


12 تیرەی بازنەیەك چێوەکەی 10 m بێت.

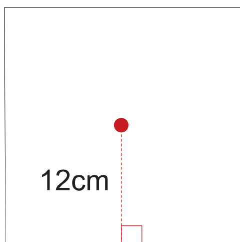
13 **وەرزش** ڕاهێنەرێکی ئەسپ سێ حەلەبەی جیاواز بەکاردەهێنێت کەیەك لەدوای یەك تیرەکانیان 7 m و 10 m و13 m . ڕووبەری هەریەکە لە حەلەبەکان بدۆزەوە و نزیکیبکەوە بۆ نزیکترین دەیەك.

ڕووبەری هەریەك لەم چەندلاڕێکانە بدۆزەوە نزیکیبکەرەوە بۆ نزیکترین دەیەك.

14



15



16 نۆلایەکی ڕێك چێوەکەی 144 m بێت.

17 پێنجلایەکی ڕێك ئەستوندەکەی 2 km

چەقەگۆشەی هەریەك لەم چەندلا ڕێكانەی خوارەوە بدۆزەوە.

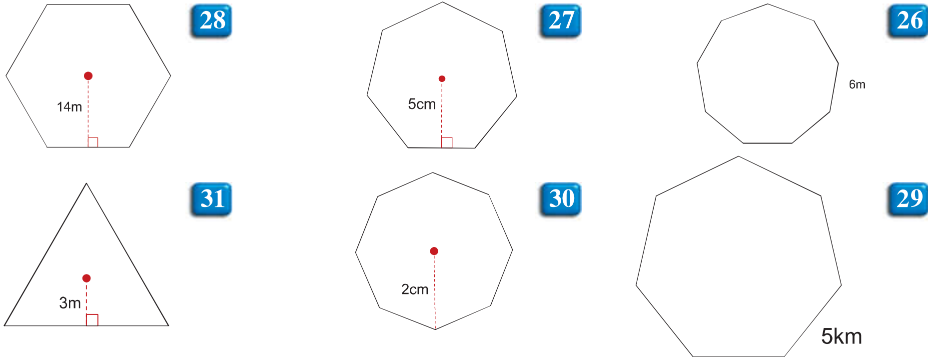
18 سێگۆشەیەكی ڕێك **19** چوارگۆشە **20** پێنجلا **21** شەشلا

22 حەوتلا **23** هەشتلا **24** نۆلا **25** دەلا.

ڕووبەری هەریەك لەم چەندلا ڕێكانە بۆ نزیكترین دەیەك بدۆزەوە.

26 **27** **28**

29 **30** **31**





دەروازەیەك

لەسەر زیندەزانی

زاناكانی ڕووەك ناسی لێكۆڵینەوە لەسەر ئەڵقەكانی درەختەكان دەكەن بۆ دەرئەنجامهێنانی ئەو گۆڕانانەی كە لە شێوازەكانی نموونەكانیان ڕوویانداوە.

32 **زیندەزانی** دەتوانرێت تەمەنی درەختێك بخەمڵێنرێت بەبەكارهێنانی یاسای $a=\frac{r}{w}$ كاتێك r هێمای نیوەتیرەی درەختەكە بێتوێكڵەكەی بێت و w هێمای ناوەندە ژمێرەیی ئەستووری ئەڵقەكانی درەختەكەبێت. تەمەنی داری (سندیان) بە ڕوویەك بخەمڵێنە كە چێوەكەی $150\ cm$ و ئەستووری توێكڵەكەی 0.2 cm وپانی ئەڵقەكانی 0.5 cm بێت.

33 **هەڵە لە شیكردنداوەدا** دوو خوێندكار ڕووبەری بازنەیەكیان بەو دوو شێوەیەی خوارەوە دۆزییەوە كامیان توشی هەڵەبوون؟ لەكوێ؟

أ
نیوەتیرەی بازنەكە $2m$ لەبەر
ئەوەی چێوەكەی $2\pi m$ ڕووبەرەكەی
$A=\pi(2^2)=4\pi$ مەتر دووجا.

ب
نیوەتیرەی بازنەكە یەك مەترە لەبەر
ئەوەی چێوەكەی $2\pi m$ ڕووبەرەكەی
$A=\pi(1^2)=4\pi$ مەتر دووجا

پێوانە نادیارەكان بەپێی ی π بدۆزەوە.

	تیرە	نیوەتیرە	ڕووبەر	چێوە
34	6	■	■	■
35	■	■	100	■
36	■	17	■	■
37	■	■	■	36π

38 **هەنگاوی جۆراوجۆر** سالار نەخشە بۆ باخچەیەك دەكێشێت بەدەوری گۆمێك ئاو كە لەشێوەی شەشلایەكی ڕێك دابێت درێژی لایەكی 60 m بێت. ئەگەر باخچەكە لەشێوەی بازنەیەك دابێت و 10 m دووربێت لە هەرسەرێك لەسەرەكانی گۆمەكە ڕووبەری باخچەكە چەندە؟ وەڵامەكەت بۆ نزیكترین دەیەك نزیكبكەوە.

39 بۆ هێمای وەستان لەیاسای هاتوچۆدا شێوەی هەشتلایەكی ڕێك بەدو جۆر پێوانە هەیە 30 cm و 36 cm



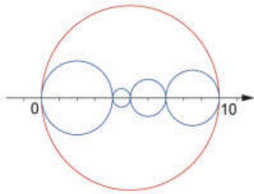
أ ڕووبەری هێمای یەكەم بۆ نزیكترین دەیەك بدۆزەوە.

ب ڕووبەری هێمای دووەم بۆ نزیكترین دەیەك بدۆزەوە.

ج ڕێژەی سەدی بۆ ڕووبەری زیادكراو لە كانزای پێویست بۆ دروستكردنی جۆری دووەم لەباتی جۆری یەكەم چەندە؟

40 **پێوانە** هەندێك لەئەندازیاران ڕەوڕەوەیەك بەكاردەهێنن كە بە دەوری تەوەرەیكدا دەخولێتەوە بۆ پێوانی دوورییەكان بەخولانەوەی ڕەوڕەوەكە و ژماردنی جاری خولانەوەكەی تیرەی ئەو ڕەوڕەوەیە بدۆزەوە ئەگەر بزانیت چێوەكەی یەك مەترە.

41 **بیری ڕەخنەگر** کام یەکێك لەم دوو مێزە زۆرترین خەڵك دەگرن مێزێکی لاکێشەیی درێژییەکەی 6 m وپانییەکەی 4 m بێت یان مێزێکی خڕ تیرەکەی 6 m بێت؟ بەنزیکەیی چەند کەس لەسەر مێزەکان دادەنیشن؟ بیرۆکەکان ڕوونبکەوە.

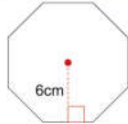




42 **بنووسە** چەقی هەر بازنەیەك لە وێنەی بەرامبەر دەکەوێتە سەر ڕاستەهێڵی ژمارەکان. پەیوەندی نێوان چێوەی بازنە گەورەکە و چێوەی هەریەك لە بازنەکانی تر ڕوونبکەوە.



ئامادەکردن بۆ تاقیکردنەوە



43 چێوەی هەشتلایەکی ڕێکی بەرامبەر بۆ نزیکترین سانتیمەتر چەندە؟

(أ) 5 (ب) 40 (ج) 20 (د) 68

44 کام لەم ڕێژانەی خوارەوە π دەنوێنێت کاتێك C چێوەی بازنەکە و d تیرەکەی بێت.

(أ) $\frac{C}{d}$ (ب) $\frac{4C}{d^2}$ (ج) $\frac{d}{C}$ (د) $\frac{d}{2C}$

45 ئاراس مێزێکی بازنەیی هەیە تیرەکەی 2 m . دەیەوێت لەسەر ڕووەکەی وێنەی لاکێشەیەك کە درێژییەکەی 2 m وپانییەکەی 1 m بێت و 4 گۆشە کە درێژی هەرلایەکی $\frac{1}{2}$m بێت بکێشێت. کام یەکێك لەمانە ئەستەمی ویستی ئاراس دەردەبڕێت.

(أ) دوای کێشانی وێنەی لاکێشەکە هیچ جێگایەك نامینێتەوە.

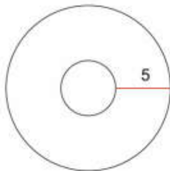
(ب) ئاراس ناتوانێت لاکێشەیەك لەسەر ڕووی مێزەکە بکێشێت درێژیەکەی 2 m بێت.

(ج) ناتوانرێت وێنەی چوارگۆشەکان بکێشرێت.

(د) هیچ جێگایەك لەسەر ڕووی مێزەکە نامینێتەوە بۆ کێشانی 4 چوارگۆشەکە درێژی لای هەریەکەیان $\frac{1}{2}$ m بێت

بەرەنگاری و فراوانکردن

46 وێنەی بەرامبەر دوو بازنە دەنوێنێت کە هەمان چەقیان هەیە نیوەتیرەی گەورەکە5 cmی زیاترە لەنیوەتیرەی بچوکەکە جیاوازی نێوان چێوەی هەردوو بازنەکە بەپێی π بدۆزەوە.



47 **جەبر** یاسایەك بۆ هەژمارکردنی ڕووبەری بازنە بەپێی چێوەکەی بنووسە.

48 **بیری ڕەخنەگر** ڕوونیبکەوە کە ڕووبەری ئەو چەندلا ڕێکەی ژمارەی لایەکانی n لە ڕووبەری بازنەیەك نزیکدەبێتەوە هەتا ژمارەی n زیادبکات.

پێداچونەوەی لولپێچی

ئەو نەخشە هێڵییە بنووسە کە هەر خشتەیەك دەینوێنێت. (پۆلەکانی پێشوو)

49

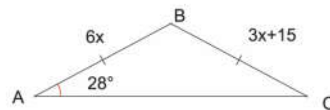
x	−2	0	5	10
y	−19	−13	2	17

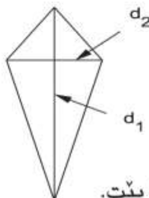
50

x	−3	0	4	9
y	2	−1	−5	−10

ئەمانە بدۆزەوە. (پۆلەکانی پێشوو)

51 $m\hat{B}$ **52** AB





ئەمانە بدۆزەوە. (پۆلەکانی پێشوو)

53 d_2 ئەگەر بزانیت $d_1 = 20$ و ڕووبەرەکەی $A = 14$ یەکەی ڕووبەر

54 ڕووبەری نیمچەلاتەریبەکە بنکەکانی یەك لەدوای یەك 3 m و 6 m و بەرزییەکەی 4 m بێت.

6-1

هەندێك لە یاساكانی بۆشایی

Formulas in 3 dimensions



كێ ئەمە بەكاردەهێنێت؟

مەلەوانەكانی ژێرئاو پۆوتانەكانی بۆشایی بەكاردەهێنن بۆ دۆزینەوەی دووری نێوان دوخاڵی ژێرئاو (نموونە 5)

ئامانجەكان

- یاسای ئۆلەر بۆ دۆزینەوەی ژمارەی سەرولایەكان و ڕووەكانی چەندڕوو بەكاردەهێنێت.
- یاسای دووری پەرەپێدەدات لە بۆشاییدا و بەكاریدەهێنێت.
- یاسای پۆوتانی ناوەراستی پارچە راستەهێڵ لەبۆشاییدا پەرەپێدەدات و بەكاری دەهێنێت.

زاراوەكان
Vocabulary

چەندڕوو
Polyhedron

چەندڕوو Polyhedron لەچوار ڕوو یان زیاتر پێكدێت كە تەنها لە لایەكانیدا یەكتری دەبڕن. پوازك و هەرەم چەندڕوون بەڵام لوولەك و قوچەك بەچەند ڕووا دانانرێت.

ئەم شێوە ئەندازەییانە چەندڕوو نین	ئەم شێوە ئەندازەییانە چەندڕوون
(لوولەك، قوچەك، گۆ)	(پوازك، هەرەم، چەندڕوو)

پەیوەندییەك هەیە كە ژمارەی سەرەكان و ژمارەی لایەكان و ژمارەی ڕووەكان لەچەند ڕوودا بەیەكەوە دەبەستێت.



یاسای ئۆلەر Euler's formula

ئەگەر V ژمارەی سەرو E ژمارەی لایەكانی و F ژمارەی ڕووەكانی چەندڕوویەك بن ئەوا.

$$V - E + F = 2$$

نموونـــە 1

بەكارهێنانی یاسای ئۆلەر

ژمارەی سەرەكان ولایەكان و ڕووەكانی بدۆزەوە و بەكاریان بێنە بۆ پاسادان لەڕاستی یاسای ئۆلەر.

أ

$F = 4 \quad E = 6 \quad V = 4$

$4 - 6 + 4 \stackrel{?}{=} 2$ *یاسای ئۆلەر بەكاربێنە*

$2 = 2$ ✓   *سادەبكە.*

ب

$F = 7 \quad E = 15 \quad V = 10$

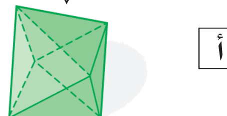
$10 - 15 + 7 \stackrel{?}{=} 2$ *یاسای ئۆلەر بەكاربێنە*

$2 = 2$ ✓   *سادەبكە.*

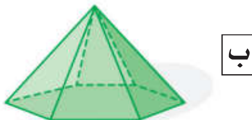


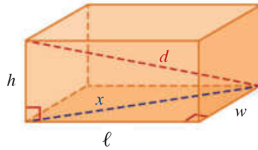
1. ژمارەی سەرەكان ولایەكان و ڕووەكانی بدۆزەوە و بەكاریان بهێنە بۆ پاسادان لە ڕاستی یاسای ئۆلەر.

أ



ب





تیرەی چەندڕوو ئەو پارچە ڕاستەهێڵەیە دوو سەر بەیەك دەگەیەنێت و ناکەوێتە هیچ ڕوویەك لە ڕووەکانی. وێنەی بەرامبەر یەکێك لەتیرەکانی d لاکێشە تەریبەکە ڕووندەکاتەوە بۆ ئەوەی درێژی تیرەکە هەژماربکەیت دووجار سەلمێنراوی ڤیثاگۆرس بەکاربێنە.
$d^2 = h^2 + x^2$ و $x^2 = \ell^2 + w^2$ پاش لەجیاتی دانانی x^2 بە بەهاکەی دەردەچێت کە $d^2 = h^2 + \ell^2 + w^2$



تیرەی لاکێشە تەریب

درێژی تیرەی لاکێشە تەریبێك کە درێژییەکەی ℓ وپانییەکەی w و بەرزییەکەی h بێت بریتییە لە

$$d = \sqrt{h^2 + \ell^2 + w^2}$$

نموونـــــە 2 بەکارهێنانی سەلمێنراوی ڤیساگۆرس لە بۆشاییدا بدۆزەوە

ئەمانە بدۆزەوە.

أ درێژی تیرەی ئەولاکێشە تەریبە بدۆزەوە کەدرێژی **3 cm** وپانی **4 cm** بەرزی **5 cm**

$d = \sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2}$ بەهای ℓ و w و h لەجیاتی بکە.

$= \sqrt{9 + 16 + 25}$ سادەبکە.

$= \sqrt{50} \approx 7.1$

درێژی تیرەکە بەنزیکەیی 7.1 cm

ب بەرزی لاکێشە تەریبێك کە درێژی **12 m** وپانی **8 m** و درێژی تیرەکەی **18 m** بێت.

$18 = \sqrt{8^2 + 12^2 + h^2}$ بەهای ℓ و w و h لەجیاتی بکە.

$(18)^2 = 8^2 + 12^2 + h^2$ هەردولا دوجابکە.

$324 = 64 + 144 + h^2$ سادەبکە

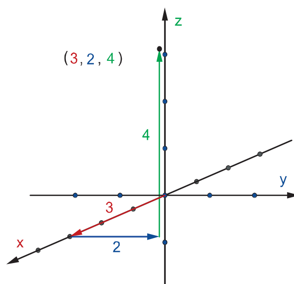
$h^2 = 116$ بەهای h^2 هەژماربکە.

$h = \sqrt{116} \approx 10.8$ ڕەگی دوجای هەردولا وەربگرە.

بەرزی لاکێشە تەریبەکە بەنزیکەیی 10.8 m

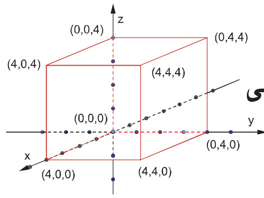


2. درێژی تیرەی خشتەکێك بدۆزەوە کەدرێژی لایەکی 5 cm بێت.



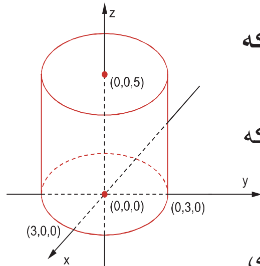
لەبیرت بێت بۆ دیاریکردنی شوێنی خاڵێك لەسەر ڕووتەختی پۆتانەکان پێویستت بە پۆتانەکەی هەیە و بۆ دیاریکردنی خاڵێك لە بۆشاییدا 3 جێکەوتت پێویستە. هەروەها لەبیرت بێت تەوەری بۆشایی پێویستی بە 3 تەوەرە هەیە وەك لەوێنەی بەرامبەردا دیارە. هەموو سیانە ڕێکخراوێك (x, y, z) تەنها خاڵێك دیاریدەکات لەتەوەری بۆشاییدا. هەروەها هەموو خاڵێك سیانە ڕێکخراوێك دیاریدەکات. بۆ دیاریکردنی خاڵی $(2, 3, 4)$ لەخاڵی بنەڕەتەوە $(0, 0, 0)$ دوو یەکە بجولێ بۆ پێشەوە لەسەر تەوەری یەکەم، پاشان سێ یەکە بۆ لای ڕاست تەریب بەتەوەری دووەم پاشان 4 یەکە بۆ سەرەوە تەریب بەتەوەری سێیەم.

نموونـــه 3 وێنەکێشانی تەنێك لەبۆشایی پۆوتاندا.



أ خشتەکێك بکێشە درێژی لایەکەی 4 یەکەو پۆوتانی سەرەکانی سالب نەبن، یەکێك لەسەرەکانی خاڵی بنەڕەت بێت.

خشتەك 8 سەری هەیە کە بریتیین لە خاڵەکانی $(0, 0, 0)$،
$(0, 4, 0)$، $(0, 0, 4)$، $(4, 0, 0)$، $(4, 4, 0)$، $(4, 0, 4)$، $(0, 4, 4)$، $(4, 4, 4)$

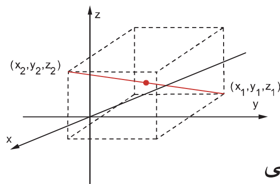


ب لوولەکێك بکێشە بەرزیەکەی 5 یەکەو نیوەتیرەی بنکەکەی 3 یەکە بێت و چەقی بنکەی خوارەوەی خاڵی بنەڕەت $(0, 0, 0)$ بێت

چەقی بنکەی خوارەوە $(0, 0, 0)$ دیاریبکە لەبەرئەوەی بەرزی لولەکەکە 5 یەکەیە، ئەوا چەقی بنکەی سەرەوەی لەسەر خاڵی $(0, 0, 5)$ ـە خاڵەکە دیاریبکە لەلایەکی تریشەوە نیوەتیرەی بنکەکەی 3 یەکەیە ئەوەش واتا بنکەی خوارەوە تەوەری دووەم لەخاڵی$(0, 3, 0)$ وتەوەرەی یەکەم لەخاڵی $(3, 0, 0)$دەبڕێت. نکەی خوارەوە بکێشە پاشان بنکەی سەرەوە تەریب بە بنکەی خوارەوە بکێشە بنکەکانی بەیەك بگەیەنە.



3. وێنەی قوچەکێکی بازنەیی وەستاو بکێشە کە بەرزییەکەی 7 یەکە و نیوەتیرەی بنکەکەی 5 یەکەو چەقەکەی خاڵی بنەڕەت $(0, 0, 0)$ بێت.



بۆ ئەوەی دووری نێوان دوخاڵی$A(x_1, y_1, z_1)$ و $B(x_2, y_2, z_2)$ لەبۆشاییدا بدۆزێتەوە وێنەی لاکێشە تەریبێك بکێشە یەکێك لەتیرەکانی $\overline{AB}$ بێت. یاسای هەژمارکردنی درێژی تیرە بەکاربهێنە. هەروەها دەتوانیت یاسایەکی هاوشێوەی یاسای دووری لە ڕووتەختی پۆوتانەکاندا بەکاربێنیت هەروەها بۆ هەژمارکردنی پۆوتانەکانی ناوەڕاستی پارچە ڕاستەهێڵ یاسایەکی هاوشێوەی یاسای پۆوتانی خاڵی ناوەڕاستی پارچە ڕاستەهێڵ لە ڕووتەختی پۆوتانەکاندا بەکاربهێنێت.



یاسای دووری و پۆوتانی ناوەراست لەبۆشایی بۆوتاندا.

یاسای $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ بەکاربێنە بۆ هەژمارکردنی دووری نێوان دوو خاڵی $A(x_1, y_1, z_1)$ و $B(x_2, y_2, z_2)$.

ناوەراستی ئەو پارچە راستەهێلەی سەرەکانی دووخاڵی$A(x_1, y_1, z_1)$ و $B(x_2, y_2, z_2)$ بریتییەلە $M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right)$

نموونـــه 4 هەژمارکردنی دووری و پۆوتانی ناوەراست لە بۆشایی پۆوتاندا

دووری نێوان دووخاڵیA و B و پۆوتانی ناوەراستی $\overline{AB}$ بدۆزەوە. وەڵامەکەت لە نزیکترین دەیەك نزیکبکەوە.

أ $A(0, 0, 0)$، $B(3, 4, 12)$

دووری

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$
$$= \sqrt{(3-0)^2 + (4-0)^2 + (12-0)^2}$$
$$= \sqrt{9 + 16 + 144}$$
$$= \sqrt{169} = 13$$

پۆوتانی ناوەراست

$$M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right)$$
$$M\left(\frac{0+3}{2}, \frac{0+4}{2}, \frac{0+12}{2}\right)$$
$$M(1.5, 2, 6)$$

ب $B(7, 12, 15)$ ، $A(3, 8, 10)$

دووری

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$
$$=\sqrt{(7-3)^2+(12-8)^2+(15-10)^2}$$
$$=\sqrt{16+16+25}$$
$$=\sqrt{57}\approx 7.5$$

پۆوتانی ناوەراست

$$M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right)$$
$$M\left(\frac{3+7}{2}, \frac{8+12}{2}, \frac{10+15}{2}\right)$$
$$M(5, 10, 12.5)$$

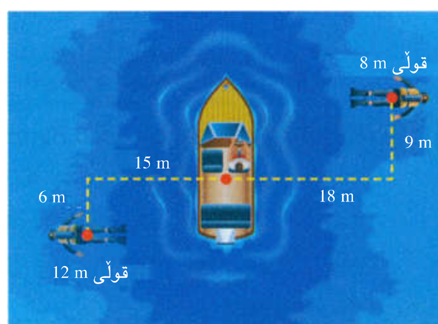


4. دووری نێوان دوو خاڵی A و B و پۆوتانی ناوەراستی $\overline{AB}$ بدۆزەوە وەڵامەکەت لەنزیکترین دەیەك نزیکبکەوە.

أ $A(0, 9, 5)$، $B(6, 0, 12)$ ب $A(5, 8, 16)$ ، $B(12, 16, 20)$

نموونـــە 5 جێبەجێکردن

دوو مەلەوانی ژێرئاو چوونە دوو شوێن وەك لەوێنەی بەرامبەردا دیارە دووری نێوانیان چەندە؟



وای دادەنێین شوێنی بەلەمەکەیان خاڵی بنەرەتە $(0, 0, 0)$. شوێنی دوو مەلەوانەکە دوو خاڵی $(18, 9, -8)$ و $(-15, -6, -12)$

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$
$$=\sqrt{(-15-18)^2+(-6-9)^2+(-12+8)^2}$$
$$=\sqrt{1330}\approx 36.5$$

دووری نێوان دوو مەلەوانەکە نزیکەی 36.5 m



5. **چی دەبێت ئەگەر** دوو مەلەوانەکە بەرێکی سەرکەوتنە سەرئاوەکە دووری نێوانیان چەند دەبێت.

بیربکەوە و تاوتوێبکە

1. چۆن دووری نێوان دوو خاڵ لەبۆشایی پۆوتانەکاندا هەژماردەکەیت.

2. ڕێکخەربە ئەم خشتەیە دروستبکە و پاشان تەواوی بکە.



	پوازکێکی وەستاوی بنکە لاکێشە	هەرەمێکی وەستاوی بنکە لاکێشە
ژمارەی سەرەکان		
ژمارەی لایەکان		
ژمارەی ڕووەکان		
$V-E+F$		

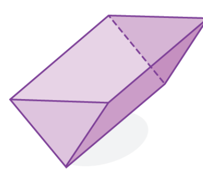
6-1 ڕاهێنانەكان

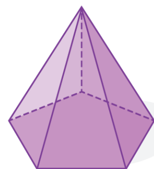
ڕاهێنانی ئاڕاستەكراو

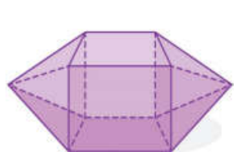
1 **زاراوەكان** ڕوونبكەوە بۆچی لولەك بەچەند ڕوو دانانرێت.

بڕوانە نموونە 1

ژمارەی سەرەكان و لایەكان و ڕووەكان بدۆزەوە و بەكاریانبێنە بۆ پاسادان لەڕاستی یاسای ئۆلەر.

2 

3 

4 

بڕوانە نموونە 2

پێوانەی ئەمانە بۆ نزیكترین دەیەك بدۆزەوە.

5 تیرەی لاكێشە تەریبێك درێژی 8 cm وپانی 4 cm و بەرزی 12 cm بێت.

6 بەرزی لاكێشە تەریبێك درێژی 10 cm و پانی 6 cm وتیرەكەی 13 cm بێت.

7 تیرەی پوازكێكی وەستاوی بنكە چوارگۆشەیی درێژی لایەكی بنكەكەی 12 cm و بەرزییەكەی 10 cm بێت.

بڕوانە نموونە 3

وێنەی ئەمانە بكێشە.

8 قوچەكێك بەرزییەكەی 4 یەكە و نیوەتیرەی بنكەكەی 8 یەكە و چەقی بنكەكە خاڵی $(0, 0, 0)$ بێت.

9 لولەكێك بەرزییەكەی 4 یەكەو نیوەتیرەی هەردوو بنكەكەی 3 یەكە و چەقی بنكەی خوارەوەی خاڵی $(0, 0, 0)$ بێت.

10 خشتەكێك درێژی لایەكی 7 یەكەو یەكێك لەسەرەكانی خاڵی بنەڕەت $(0, 0, 0)$ بێت.

بڕوانە نموونە 4

دووری نێوان هەردوو خاڵی A و B و پۆوتانی ناوەڕاستی $\overline{AB}$ بدۆزەوە وەڵامەكەت لە نزیكترین دەیەك نزیكبكەوە.

11 $A(0, 0, 0)$ ، $B(9, 5, 10)$

12 $A(0, 3, 8)$ ، $B(7, 0, 14)$

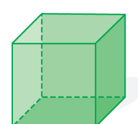
13 $A(4, 6, 10)$ ، $B(9, 12, 15)$

بڕوانە نموونە 5

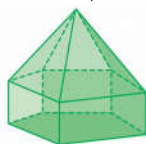
14 **بۆخۆشی** دوای ڕۆژێك لەئەنجامدانی وەرزشی ڕێڕۆشتن لەشاخەكاندا تیمەكە خێوەتگەیەكیان بۆ پشووهەڵدا كە 3 km ڕووەو ڕۆژهەڵات و 7 km ڕووەو باكوری خاڵی جوڵان دووربێت و بكەوێتە سەر بەرزاییەك كە 0.6 km بەرزتربێت لە خاڵی جووڵانەوە دووری نێوان خاڵی جوڵان و خێوەتگەكە چەندە؟

جێبەجێكردنەكان

ژمارەی سەرەكان ولایەكان و ڕووەكان بدۆزەوەو بەكاریان بێنە بۆ پاسادانی لەڕاستی یاسای ئۆلەر.

15 

16 

17 

پێوانەی ئەمانە بۆ نزیكترین دەیەك بدۆزەوە.

18 تیرەی لاكێشە تەریبێك درێژییەكەی 7 cm وپانییەكەی 8 cm و بەرزییەكەی 16 cm بێت.

19 بەرزی لاكێشە تەریبێك درێژییەكەی 15 cm وپانییەكەی 6 cm وتیرەكەی 17 cm بێت.

20 درێژی لایەكی خشتەكێك تیرەكەی 8 cm بێت.

ڕاهێنانی ئازاد

بۆ شیكاری پرسیارەكان	سەیری نموونەی
17-15	1
20-18	2
23-21	3
26-24	4
27	5

وێنەی ئەمانە بکێشە.

21 لولەکێك بەرزییەکەی 3 یەکەو نیوەتیرەی بنکە بازنەییەکانی 5 یەکەبێت و چەقی بنکەی خوارەوەی خاڵی بنەڕەت $(0, 0, 0)$ بێت.

22 قوچەکێك بەرزییەکەی 4 یەکە و نیوەتیرەی بنکە بازنەییەکەی 2 یەکە و چەقی بنکەی خاڵی بنەڕەت $(0, 0, 0)$ بێت.

23 پوازکێکی وەستاوی بنکە چوارگۆشەیی یەکێك لەسەرەکانی خاڵی بنەڕەت $(0, 0, 0)$ بێت درێژی لایەکی بنکەی 5 یەکەو بەرزی 3 یەکە بێت.

دووری نێوان هەردوو خاڵی A و B و پۆوتانی ناوەراستی $\overline{AB}$ بدۆزەوە وەڵامەکەت لە نزیکترین دەیەك نزیکبکەوە.

24 $A(0, 0, 0)$ ، $B(4, 4, 4)$

25 $A(2, 3, 7)$ ، $B(9, 10, 10)$

26 $A(2, 5, 3)$ ، $B(8, 8, 10)$

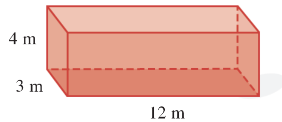
دەروازەیەك

لەسەر سەقا

کێشی هەندێ پەڵەهەوری ڕەش دەگاتە نزیکەی 635 هەزار تەن کە لە کێشی 100 هەزار فیل زیاترە.

27 **باری کەش و هەوا** بەرزی هەورێك 6500 پێیە. ئەو بارانەی هەورەکە دەیبارێنێت 700 پێیە بەئاڕاستەی باشور و 500 پێ بەئاڕاستەی ڕۆژهەڵات بادەیجولێنێت پێش ئەوەی بکەوێتە سەرزەوی. ئەو دوورییەی بارانەکە لە هەورەکەوە بۆ زەوی دەیبڕێت چەندە؟

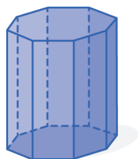
28 **هەنگاوی جۆراوجۆر** درێژی تیرەی لاکێشەتەریبی بەرامبەر بدۆزەوە دەرئەنجامی دوو ئەوەندەکردنی درێژی وپانی و بەرزی لاکێشە تەریبەکە لەسەر درێژی تیرەکە چییە؟



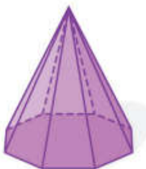
نادیار بدۆزەوە و وێنەی ئەو شێوە ئەندازەییە بکێشە کە ئەو سەرو لاو ڕووانەی هەبێت.

	ژمارەی سەرەکان	ژمارەی لایەکان	ژمارەی ڕووەکان	چەندڕووەکە
	5	8	5	
29	8	12	■	■
30	■	9	5	■
31	7	■	7	■

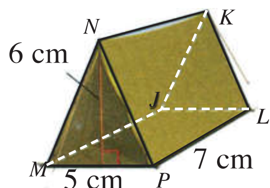
32 **جەبر** هەر بنکەیەك لەدوو بنکەی پوازکی بەرامبەر چەندلایەکە n لای هەیە بەپێ ی n ئەو بڕانە بنووسە کەژمارەی سەرەکانی پوازکەکە وژمارەی لایەکانی وژمارەی ڕووەکانی بنوێنێت. ئەو ئەنجامانەی بەدەستت هێناوە بەکاربیبێنە بۆ پاسادانی ڕاستی یاسای ئۆلەر.



33 **جەبر** بنکەی هەرەمی بەرامبەر چەندلایەکە n لای هەیە بەپێی n ئەو بڕانە دەرببڕە کە ژمارەی سەرەکانی هەرەمەکە و ژمارەی لایەکانی و ژمارەی ڕووەکانی بنوێنێت. ئەو ئەنجامانەی بەدەستت هێناوە بەکاربیبێنە بۆ پاسادانی ڕاستی یاسای ئۆلەر.



34 دەوارەکەی بەرامبەر پوازکێکە بنکەی سێگۆشەیەکی وەستاو بەجۆری $\overline{KJ} \cong \overline{KL} \cong \overline{MN} \cong \overline{NP}$



أ دەوارەکە بەشێوەیەك هەڵدرا کەسەری J خاڵی بنەڕەت $(0, 0, 0)$ بێت و سەری M خاڵی $(7, 0, 0)$ بێت پۆوتانی سەرەکانی تری بدۆزەوە.

ب پیشەوەری دەوارەکە حەزدەکات دووری نێوان K و P بزانێت تا تولێك زیادبکات بۆ پاڵپشتی دەوارەکە. KP بدۆزەوە وەڵامەکەت لەنزیکترین دەیەك نزیکبکەوە.

پێوانەی نادیاری هەریەك لەلاكێشەتەریبەكان بدۆزەوە وەڵامەكەت بەشێوەی ڕەگێكی سادە بنووسە

	درێژی ℓ	پانی w	بەرزی h	تیرە d
35	6	6	6	■
36	24	■	60	65
37	12	18	■	24
38	■	2	3	4

وێنەی ئەمانە بكێشە.

39 لولەكێك بەرزی 5 یەكەو چەقی بنكە بازنەی خوارەوە(5 ,2 ,1) ونیوەتیرەكەی 4 یەكەبێت.

40 قوچەكێك بەرزییەكەی 7 یەكەو چەقی بنكەكەی(6 ,3 ,3) ونیوەتیرەكەی 3 یەكەبێت.

41 خشتەكێك درێژی لایەكی 6 یەكەو چەقەكەی خاڵی(3 ,2 ,4) بێت.

42 لاكێشە تەریبێك سەرەكانی(5 ,2 ,4) ، (5 ,6 ,4) ، (8 ,6 ,4)، (5 ,6 ,8)، (5 ,2 ,8) .
(8 ,6 ,8) (8 ,2 ,4) (8 ,2 ,8)

43 قوچەكێك سەرەكەی (8 ,7 ,4) و بنكەكەی بازنیە چەقەكەی (1 ,7 ,4) ونیوەتیرەكەی 4 یەكەبێت.

44 لولەكێك نیوەتیرەی بنكە بازنەیەكانی 5 یەكە و چەقی بنكەكانی دووخاڵی (7 ,3 ,2) و(15 ,3 ,2) بێت

$\overline{AB}$ بكێشە پاشان درێژی ویۆتانی ناوەراستی بدۆزەوە وەڵامەكەت بونزیكترین دەیەك نزیكبكەوە

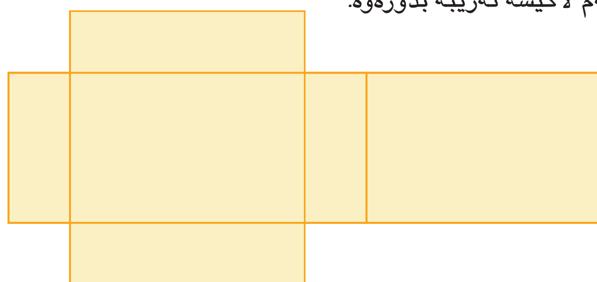
45 $A(1, 2, 3)$ ، $B(3, 2, 1)$ 46 $A(4, 3, 3)$ ، $B(7, 4, 4)$ 47 $A(4, 7, 8)$ ، $B(3, 1, 5)$

48 $A(0, 0, 0)$ ، $B(8, 3, 6)$ 49 $A(6, 1, 8)$ ، $B(2, 2, 6)$ 50 $A(2, 8, 5)$ ، $B(3, 6, 3)$

51 **هەنگاوی جۆراوجۆر**
بەهای z بدۆزەوە ئەگەر بزانیت دووری نێوان $R(6, -1, -3)$ و $S(3, 2, z)$ بكاتە 13 یەكە.

52 وێنەی شێوەیەكی ئەندازەیی بكێشە كە 6 سەرو 6 ڕووی هەبێت.

53 **خەمڵاندن** دووریەكانی ڕووی ئەم لاكێشە تەریبە بدۆزەوە.



54 **دەستەواژەیەك دابرێژە** بەرای تۆ كام پارچە ڕاستەهێڵ لەوانەی سەرەكانی دەكەونە سەرلاكێشە تەریبێك درێژترە؟ پاسادانی ڕاستی وتەكەت بكە بەبەكارهێنانی بەلایەنی كەمەوە 3 پارچە ڕاستەهێڵ كە سەرەكانی بكەونە سەر لاكێشە تەریبی $ABCDEFGH$ كاتێك $A(0, 0, 0)$ و $B(1, 0, 0)$ و $C(1, 2, 0)$ و $D(0, 2, 0)$ و $E(0, 0, 2)$ و $F(1, 0, 2)$ و $G(1, 2, 2)$ و $H(0, 2, 2)$

55 **بیركردنەوەی ڕەخنەگرانە** خاڵەكانی $A(3, 2, -3)$ و $B(5, 8, 6)$ و $C(-3, -5, 3)$ سێگۆشەیەك دەنوێنن جۆری سێگۆشەكە بەهۆی لا وگۆشەكانییەوە پۆلینبكە.

56 **بنوسە** نیوەتیرەی لولەكێك 4 cm و بەرزییەكەی 6 cm درێژی درێژترین پارچە ڕاستەهێڵ چەندە؟ كەسەرەكانی لەسەر لولەكەبن؟ شوێنی هەردوو سەری ئەو پارچە ڕاستەهێڵە دیاریبكە. ئەو هۆكارە دیاربكە كە وای لێدەكات درێژترین بێت.

57 ژمارەی سەرەکان و لایەکان و ڕووەکانی هەرەمێکی بنکە شەشلایی چەندە؟

(أ) 6 ڕوو، 10 لا، 6 سەر. (ج) 7 ڕوو، 10 لا، 7 سەر.

(ب) 7 ڕوو، 12 لا، 7 سەر. (د) 8 ڕوو، 18 لا، 12 سەر.

58 کام یەکێک لەمانە نزیکترن لەتیرەی ئەو لاکێشە تەریبەی درێژییەکەی 12 m و پانییەکەی 8 m و بەرزییەکەی 6 m.

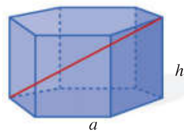
(أ) 6.6 m (ب) 44 m (ج) 15.6 m (د) 244.0 m

59 دووری نێوان دووخاڵی (7,14,8) A و (9,3,12) B چەندە؟ وەڵامەکە لەنزیکترین دەیەك نزیکبکەوە.

(9, 3, 12) (7, 14, 8)

(أ) 10.9 (ب) 11.9 (ج) 119.0 (د) 141.0

بەرەنگاری و فراوانکردن



60 **هەنگاوی جۆراوجۆر** بنکەکانی پوازکی بەرامبەر شەشلایەکی ڕێکە درێژی لایەکی a یەکە درێژی تیرە سوورەکە بەپێی درێژی لای a وبەرزی h بدۆزەوە.

61 ئایا خاڵەکانی $A(-1, 2, 4)$ و $B(1, -2, 6)$ و $C(3, -6, 8)$ لە ڕێکی یەکترن.

62 **جەبر** پۆوتانەکان ویاسای دووری بەکاربێنە بۆ سەلماندنی یاسای پۆوتانی ناوەراست.

دراو: خاڵەکانی $A(x_1, y_1, z_1)$ و $B(x_2, y_2, z_2)$ و $d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$.

$$M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right)$$

داواکراو: سێ خاڵەکە دەکەونە سەر یەك ڕاستەهێڵ و AM: MB

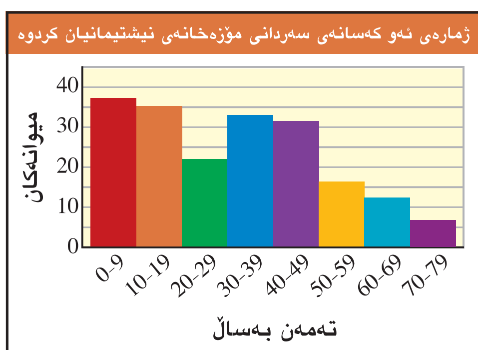
63 **جەبر** پۆوتانەکان بەکاربهێنە بۆ سەلماندنی ئەوەی تیرەکانی لاکێشەتەریب جووتن و یەکتری لەتدەکەن لە ناوەڕاستیاندا.

دراو: پوازکێکی وەستاوی بنکە لاکێشەیی سەرەکانی $A(0, 0, 0)$ و $B(a, 0, 0)$ و $C(a, b, 0)$ و $D(0, b, 0)$ و $E(0, 0, c)$ و $F(a, 0, c)$ و $G(a, b, c)$ و $H(0, b, c)$.

داواکراو: $\overline{AG}$ و $\overline{BH}$ جووتن ویەکتری لەتدەکەن.

پێداچوونەوەی لولپێچی

وێنەی ڕوونکردنەوەیی بەرامبەر ژمارەی ئەو کەسانە دەنوێنێت کەسەردانی مۆزەخانەی نیشتیمانیان کردوە بەپێی تەمەنیان. ئەمانە بدۆزەوە (پۆلەکانی پێشوو)



64 ژمارەی ئەو کەسانەی سەردانی مۆزەخانەیان کردوە تەمەنیان لەنێوان 10 سال و 29 ساڵدایە. 55

65 چەشنی ئەو تەمەنانەی کە زۆرترین سەردانکەری تیابوو. 9-0

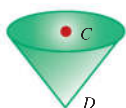
یاسایەك بۆ هەژمارکردنی ڕووبەری هەرشێوەیەکی ئەندازەیی بنووسە دوای گۆڕانی دیاریکراو. (پۆلەکانی پێشوو)

66 لاتەریبێك درێژی بنکەکەی b وبەرزییەکەی h بێت دوای دووئەوەندەکردنی بەرزییەکەی. $A = 2bh$

67 نیمچەلا تەریبێك بەرزییەکەی h وبنکەکانی b_1 و b_2 بێت، دوای لێکدانی b_1 لە $\frac{1}{2}$. $A = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}b_1+b_2\right)h$

68 بازنەیەك نیوەتیرەکەی r بێت دوای سێ جار دووئەوەندەکردنی نیوەتیرە. $A = 9\pi r^2$

وێنەی بەرامبەر بەکاربێنە بۆ شیکارکردنی پرسیارەکانی 69 تا 71 (وانەی 1-2)



69 شێوەکە پۆلینبکە. قوچەکی

70 لایەکانی ناوبنێ. بێ لا

71 بنکەکەی ناوبنێ. بازنە کە چەقەکەی c ـە

7-1 گـــۆ

Sphere

ئامانجەکان

- بیرهێنانەوەی یاسای قەبارەی گۆ و بەکارهێنانی
- بیرهێنانەوەی یاسای ڕووبەری گۆو بەکارهێنانی.

زاراوەکان Vocabulary

گۆ Sphere

چەقی گۆ Center of a sphere

نیوەتیرەی گۆ Radius of a sphere

نیوەگۆ Hemisphere

بازنەی مەزن Great circle

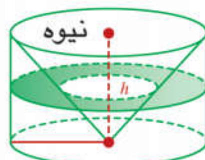
قەبارە Volume (v)

لوولەك Cylinder

قوچەك Cone

کێ ئەمە بەکاردەهێنێت؟

زانایانی زیندەزانی توێژینەوە لەسەر چاوی هەندێك لەو گیاندارانەی لەقوڵایی دەریادا دەژین ئەنجامدەدەن وەك مەرەکەبەی زەبەلاح بۆ ئەوەی زانیاریان لەسەر ئەو قوڵاییانە دەسکەوێت. (نموونە 2)



گۆ Sphere بریتییە لە کۆمەڵە خاڵێك لەبۆشاییدا کە هەمان دووریان لەخاڵێکی دیاریکراوەوە هەیە، پێی دەوترێت **چەقی گۆ Center** هەر پارچە ڕاستەهێڵێك چەقی گۆیەکە بەخاڵێکی سەرگۆیەکە بگەینێت پێی دەوترێت **نیوەتیرەی گۆ Radius** . هەر ڕووتەختێك بەچەقی گۆیەکەدا بڕوات لەبازنەیەکدا دەیبڕێت پێی دەوترێت **بازنەی مەزن Great circle** دابەشی دەکات بە دووبەشەوە بەهەریەکەیان دەوترێت **نیوەگۆ Hemisphere**

ئەم وێنەیەی خوارەوە نیوەگۆیەکە و لولەکێکە قوچەکێکی لێبڕاوە. هەر ڕووتەختێك بەبنکەی لولەکەکە و بازنەی مەزنی گۆیەکە تەریب بێت گۆیەکە و لولەکە لێبڕاوەکە لەدوو بڕگەدا دەبڕێت (بەرەنگی سەوز دیاریکراون) کە ڕووبەرەکانیان یەکسان دەبێت. لەمەوە دەستدەکەوێت کە تیرەی گۆیەکە و ئەو لولەکەی قوچەکەی لێبڕاوە لەقەبارەدا یەکسان دەبن. پاڵپشت بە ڕێسای کاڤالیرا Cavalier's Principle . یەکسانبوونی دوو ڕووبەرەکە دەسەڵمێنرێت لەپرسیاری 39 دا.

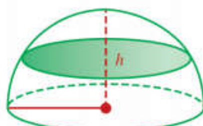
$$V \text{ (Hemisphere)} = V \text{ (Cylinder)} - V \text{ (Cone)}$$

$$V \text{ (نیوەگۆ)} = V \text{ (لوولەك)} - V \text{ (قوچەك)}$$

$$= \pi r^2 h - \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

$$= \frac{2}{3}\pi r^2 h$$

$$= \frac{2}{3}\pi r^2 (r) = \frac{2}{3}\pi r^3$$



بەرزی لولەکەکە یەکسانە بە نیوەتیرەی گۆیەکە

لەمەوە دەستدەکەوێت، قەبارەی گۆیەك نیوەتیرەکەی r بێت بریتییە لە $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ چونکە قەبارەی گۆیەکە یەکسانە بەدووئەوەندەی قەبارەی نیوە گۆیەکە.



قەبارەی گۆ

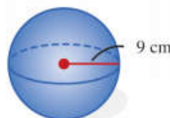


قەبارەی گۆیەك نیوەتیرەکەی r بێت بەیاسای $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ هەژماردەکرێت

نموونـــە 1 دۆزینەوەی قەبارەی گۆ

بەپێی π بدۆزەوە.

أ قەبارەی گۆی بەرامبەر



$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$V = \frac{4}{3}\pi (9)^3 = 972\pi$$

بەهای نیوەتیرەکە دابنێ وپاشان سادەی بکە.

$$V = 972\pi$$

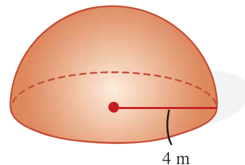
قەبارەی ئەو گۆیە دەکاتە $972\pi\ cm^3$

ب **تیرەی گۆیەك قەبارەکەی $972\pi\ cm^3$**

$972\pi = \frac{4}{3}\pi r^3$	بەهای v لە $v = \frac{4}{3}\pi r^3$ دا لەجیاتی بکە
$729 = r^3$	هەردوو لا دابەشی $\frac{4}{3}\pi$ بکە.
$r = 9$	ڕەگی سێجای هەردوو لا وەربگرە.

$d = 2 \times r = 2 \times 9 = 18$

تیرەی ئەو گۆیە دەکاتە 18 m



ج **قەبارەی نیوەگۆی بەرامبەر**

$V = \frac{2}{3}\pi r^3 = \frac{2}{3}\pi(4)^3 = \frac{128\pi}{3}$

قەبارەی نیوەگۆیەکە بریتییە لە $\frac{128\pi}{3}\ m^3$



1. نیوەتیرەی گۆیەك بدۆزەوە قەبارەکەی $2304\pi\ cm^3$ بێت.

نموونە 2

جێبەجێکردن لەسەر زیندەزانی

مەرەکەبە گیانداریکی دەریاییە و لەقوڵایی دەریادا دەژی، مەرەکەبە پێویستە چاوی فراوان بێت تابەئاسانی بتوانێت لە ڕووناکییەکی متدا کە بەسەر قوڵایی دەریادا دەکشێت نێچیرەکەی ببینێ تیرەی گۆی چاوی مەرەکەبەی زەبەلاح دەگاتە 25 cm ئەوە لەکاتێکدا تیرەی گۆی چاوی مرۆڤ 2.5 cm بەنزیکەیی ئایا قەبارەی گۆی چاوی مەرەکەبەی زەبەلاح چەندئەوەندەی قەبارەی گۆی چاوی مرۆڤە؟

قەبارەی گۆی چاوی مرۆڤ	قەبارەی گۆی چاوی مەرەکەبەی زەبەلاح
$V = \frac{4}{3}\pi r^3$	$V = \frac{4}{3}\pi r^3$
$V = \frac{4}{3}\pi(1.25)^3$	$V = \frac{4}{3}\pi(12.5)^3$

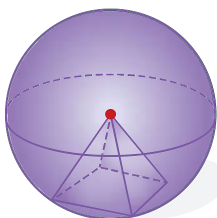
قەبارەی گۆی چاوی مرۆڤ $8.18\ cm^3$ بەنزیکەیی.

قەبارەی گۆی چاوی مەرەکەبەی زبەلاح $8181.23\ cm^3$ بەنزیکەیی.

پێوانەی قەبارەی چاوی مەرەکەبەی زەبەلاح 1000 ئەوەندەی قەبارەی چاوی مرۆڤە.



2. تیرەی گۆی چاوی باڵندەی طنان 0.6 cm بەنزیکی. قەبارەی گۆی چاوی مرۆڤ چەند ئەوەندەی قەبارەی گۆی چاوی ئەو باڵندەیە؟



لە وێنەکەی بەرامبەردا سەری هەرەمەکە دەکەوێتە چەقی گۆیەکەوە، بەرزی هەرەمەکە یەکسانە بە نیوەتیرەی گۆیەکە بەنزیکەیی. وای دابنێ گۆیەکە بە n هەرەم پڕکرا، ڕووبەری بنکەی هەر یەکێکیان B و بەرزییەکەی r بێت.

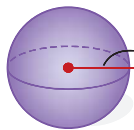
$V(\text{Sphere}) = \frac{1}{3}Br + \frac{1}{3}Br + \ldots + \frac{1}{3}Br$	قەبارەی گۆیەکە یەکسانە بە سەرجەمی قەبارەی
$\frac{4}{3}\pi r^3 = n\left(\frac{1}{3}Br\right)$	هەرەمەکان بەنزیکەیی.
$4\pi r^2 = nB$	هەردوولا دابەشی $\frac{1}{3}r$ بکە.

ئەگەر هەرەمەکان گۆیەکەیان پڕکردەوە ئەوا سەرجەمی ڕووبەری بنکەکانیان یەکسانە بە ڕووبەری گۆیەکە بەنزیکەیی واتە $S = 4\pi r^2$ تا ژمارەی هەرەمەکان زیاتربێت کۆی ڕووبەری بنکەکان لە ڕووبەری گۆیەکە نزیکتردەبێتەوە.



ڕووە ڕووبەری گۆ

ڕووبەری ڕووی گۆیەك نیوەتیرەكەی r بێت بەیاسای $S = 4\pi r^2$ هەژماردەكرێت.



نموونە 3

دۆزینەوەی ڕووبەری ڕووی گۆ

بەپێی π ئەمانە بدۆزەوە.

أ ڕووبەری ڕووی گۆیەك تیرەكەی 10 cm بێت.

$$S = 4\pi r^2 = 4\pi(5)^2 = 100\pi$$

ڕووبەری ڕووی گۆیەكە دەكاتە $100\pi \text{ cm}^2$

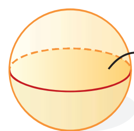
ب قەبارەی گۆیەك ڕووبەری ڕووەكەی $144\pi \text{ cm}^2$

$$S = 4\pi r^2$$
$$144\pi = 4\pi r^2$$
$$6 = r$$
$$V = \tfrac{4}{3}\pi r^3 = \tfrac{4}{3}\pi(6)^3 = 288\pi$$

قەبارەی گۆیەكە دەكاتە 288 cm^3

ج ڕووبەری ڕووی گۆیەك ڕووبەری بازنە مەزنەكەی $4\pi \text{ cm}^2$ بێت.

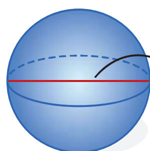
$$\pi r^2 = 4\pi$$
$$r = 2$$
$$S = 4\pi r^2 = 4\pi(2)^2 = 16\pi$$



ڕووبەری ڕووی گۆیەكە دەكاتە $16\pi \text{ cm}^2$



3. ڕووبەری ڕووی گۆی بەرامبەر بدۆزەوە.

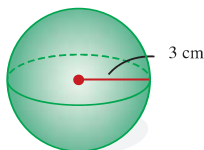


نموونە 4

دەرخستنی كاریگەری گۆڕانی پێوانەكان لەسەر قەبارەو ڕووبەری ڕووی گۆ.

نیوەتیرەی گۆیەك لە 3 درا. كاریگەری ئەوە لەسەر قەبارەكەی باسبكە.

گۆیە بنەڕەتییەكە	گۆیەكە دوای گەورەكردنی نیوەتیرەكەی
$V = \tfrac{4}{3}\pi r^3$	$V = \tfrac{4}{3}\pi r^3$
$= \tfrac{4}{3}\pi(3)^3$	$= \tfrac{4}{3}\pi(9)^3$
$= 36\pi$	$= 972\pi$



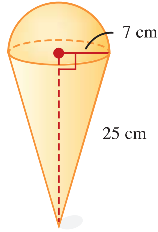
سەرنجبدە كە $(36\pi)27 = 972\pi$ واتە كاتێك نیوەتیرەكە لە 3 دەدرێت ئەوا قەبارەكەی لە 27 دەدرێت. [تێبینی بكە 27 سێجای 3 ـە]



4. چۆن قەبارەی گۆیەك دەگۆڕێت ئەگەر نیوەتیرەكەی دابەشی 3 بكرێت؟

نموونــــە 5 دۆزینەوەی قەبارە و ڕووبەری ڕووی تەنە ئاوێتەکان (پێکهاتووەکان)

ڕووبەری ڕوو و قەبارەی تەنی بەرامبەر بەپێی π بدۆزەوە.



ڕووبەری ڕووی ئەم تەنە ئاوێتەیە بریتییە لە سەرجەمی ڕووبەری نیوەگۆیەکە و تەنیشتەڕووی قوچەکەکە.

$S(\text{نیوەگۆ}) = \frac{1}{2}(4\pi r^2) = 2\pi(7)^2 = 98\pi \text{ cm}^2$

$S(\text{قوچەك}) = \pi r G = \pi(7)(25) = 175\pi \text{ cm}^2$

$S(\text{تەنە ئاوێتەکە}) = 98\pi + 175\pi = 273\pi \text{ cm}^2$

ڕووبەری ڕووی تەنە ئاوێتەکە دەکاتە $273\pi \text{ cm}^2$

دەستپێبکە بە دۆزینەوەی بەرزی قوچەکەکە.

$$h = \sqrt{25^2 - 7^2}$$

$$h = \sqrt{576} = 24 \text{ cm}$$

قەبارەی ئەم تەنە ئاوێتەیە دەکاتە کۆی هەردوو قەبارەی نیوەگۆ و قوچەکەکە

$V(\text{نیوەگۆ}) = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) = \frac{2}{3}\pi(7)^3 = \frac{686\pi}{3} \text{ cm}^3$

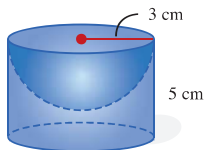
$V(\text{قوچەك}) = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi(7)^2(24) = 392\pi \text{ cm}^3$

$V(\text{تەنە ئاوێتەکە}) = \frac{686\pi}{3} + 392\pi = \frac{1862\pi}{3} \text{ cm}^3$

قەبارەی تەنە ئاوێتەکە دەکاتە $\frac{1862\pi}{3} \text{ cm}^3$.



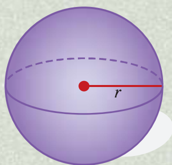
5. ڕووبەری ڕوو وقەبارەی ئەم تەنە ئاوێتەی بەرامبەر بدۆزەوە.

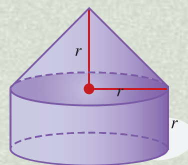


بیربکەوە و تاوتوێبکە

1. چۆن ڕووبەری ڕووی گۆیەك هەژماردەکەیت ئەگەر ڕووبەری بازنە مەزنەکەی بزانیت؟

2. بەراوردبکە لەنێوان قەبارەی گۆی بەرامبەرو قەبارەی تەنە ئاوێتەکەی تەنیشتی.







3. ڕێکخەربە ئەم هێڵكارییە دروستبکە وتەواوی بکە.

ئەگەر نیوەتیرەی گۆیەکە r بێت کەواتە

- قەبارەی گۆیەکە دەکاتە ....
- ڕووبەری ڕووی گۆ دەکاتە ....
- ڕووبەری بازنە مەزنەکە دەکاتە ....

7-1 ڕاهێنانەکان

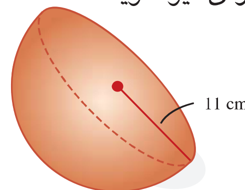
ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

1 **زاراوەکان** باسی نیوەتیرەی بازنە و هەردوو سەرەکانی بکە.

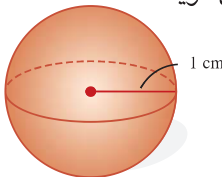
بڕوانە نموونە 1

بەپێی π بدۆزەوە.

2 قەبارەی نیوە گۆیەکە



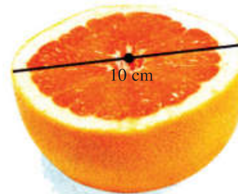
3 قەبارەی گۆیەکە

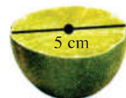


4 نیوەتیرەی گۆیەك قەبارەکەی $288\pi\ cm^3$ بێت.

بڕوانە نموونە 2

5 **خواردن** چەندجار قەبارەی نیوە لیمۆیەك دەکاتە قەبارەی نیوە پرتەقاڵەکە؟

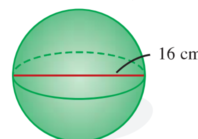




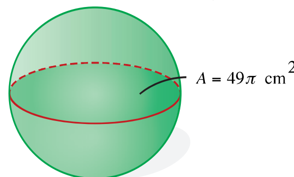
بڕوانە نموونە 3

بەپێی π بدۆزەوە.

6 ڕووبەری ڕووی گۆیەکە



7 ڕووبەری ڕووی گۆیەکە.

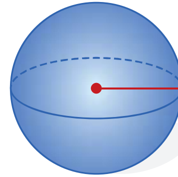


8 قەبارەی گۆیەك کە ڕووبەری ڕووەکەی $6724\pi\ m^2$

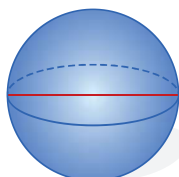
بڕوانە نموونە 4

کاریگەری هەر گۆڕانێك لەسەر پێوانەی دراو باسبکە.

9 ڕووبەری ڕووی گۆیەك دوای دوو ئەوەندەکردنی نیوەتیرەکەی.



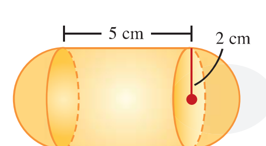
10 قەبارەی گۆیەکە دوای بچووکردنەوەی تیرەکەی بۆ چارەکێك.



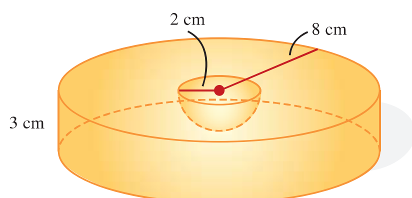
بڕوانە نموونە 5

ڕووبەری ڕوو و قەبارەی هەریەکە لەم تەنە ئاوێتانە بدۆزەوە.

11



12



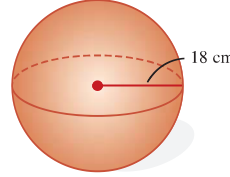
جێبەجێکردنەکان

پرسیارەکان	نموونەی
15-13	1
16	2
19-17	3
21-20	4
23-22	5

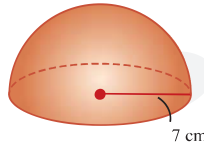
راهێنانی ئازاد
بۆ شیکارکردنی تەماشای

بەپێی π بدۆزەوە.

13 قەبارەی گۆ

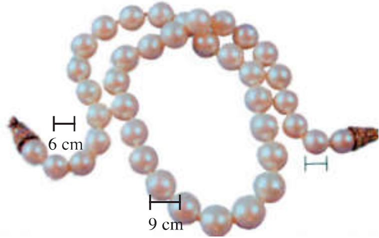


14 قەبارەی نیوەگۆکە



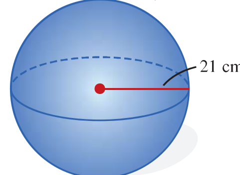
15 تیرەی گۆیەك قەبارەکەی $7776\pi\ cm^3$ بێت.

16 **خشڵ** پێوانەی مرواری بەدرێژی تیرەکەی بە میلیمەتر دیاریدەکرێت. قەبارەی مروارییەك تیرەکەی 9 mm بێت چەند جارگەورەترە لە قەبارەی مروارییەك تیرەکەی 6 mm بێت.

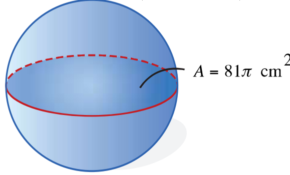


بەپێی π بدۆزەوە.

17 ڕووبەری ڕووی گۆیەکە



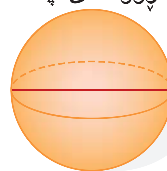
18 ڕووبەری ڕووی گۆیەکە



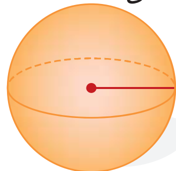
19 قەبارەی گۆیەك ڕووبەرەکەی $625\pi\ m^2$ بێت.

کاریگەری هەر گۆڕانێك لەسەر پێوانەی دراو باسبکە.

20 کاریگەری لێکدانی نیوەتیرە لە $\frac{1}{5}$ لەسەر ڕووبەری ڕووەکەی چەندە؟

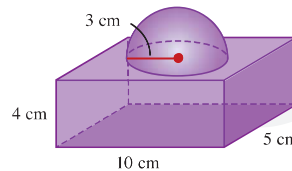


21 کاریگەری لێکدانی تیرە لە 6 لەسەر قەبارەکەی.

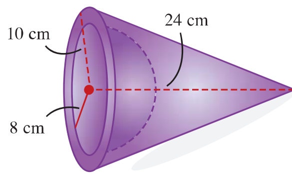


قەبارەو ڕووبەری هەرتەنێکی ئاوێتە بدۆزەوە.

22



23



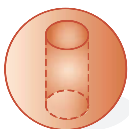
24 نیوەتیرەی نیوەگۆیەك بدۆزەوە قەبارەکەی $144\pi\ cm^3$ بێت.

25 چێوەی بازنەی مەزنی گۆیەك بدۆزەوە کەڕووبەری ڕووەکەی $60\pi\ cm^2$ بێت.

26 قەبارەی گۆیەك بدۆزەوە کە چێوەی بازنەی مەزنەکەی 36π cm بێت.

27 ڕووبەری ڕوو و قەبارەی ئەو گۆیە بدۆزەوە کەچەقەکەی دەکەوێتە سەرخاڵی بنەڕەت $(0, 0, 0)$ لەبۆشایی پۆوتاندا و بەخاڵی $(2, 3, 6)$ دا دەڕوات.

28 **خەملاندن** مروارییەکی گۆیی تیرەکەی 8 mm بەچاڵکردنی بە لولەکێکی بازنەیی تیرەکەی 2 mm بوو لەناوەوە کونکرا. ڕووبەری ڕوو و قەبارەی مرواریە کونکراوەکە بخەملێنە.



وەرزش پێوەرەنادیارەکانی هەر تۆپێك لەتۆپەکانی هەندێك لە یارییە وەرزشەییەکان بدۆزەوە.

	وەرزش	تۆپ	تیرە	چێوەی بازنەی مەزن	ڕووبەر	قەبارە
29	گۆلف		4.27 cm	■	■	■
30	کریکت		■	22.86 cm	■	■
31	تێنس		6.35 cm	■	■	■
32	بۆلینگ		74 mm	■	■	■

دەروازەیەك

زانستی زیندەی ئاوی

ژێردەریای باتسفیر لەساڵی 1934 گەیشتە قوڵایی 923 m پەستانی ئاوەکە لەسەری گەیشتە 34 یەکەی پەستانی کەش.

33 **زیندەزانی** ژێردەریای باتسفیر یەکەم ژێردەریای توێژینەوەکانی ئاوی بوو. لەسەر شێوەی گۆیەك لەساڵی 1930 دروستکرا، تیرەی ناوەوەی ئەم ژێردەریاییە نزیکەی 137 cm بوو، ئەستووری ئەو پۆڵایەی کەپێی دروستکرابوو 3.8 cm بوو، ئەم ژێردەریایە 3 پەنجەرەی بازنەیی هەبوو کەتیرەی هەر یەکێکیان نزیکەی 30 cm بوو، قەبارەی ئەو پۆڵایەی کەبەکارهێنراوە بۆ دروستکردنی ئەم ژێردەریایە بخەمڵێنە.

34 **جوگرافیا** نیوەتیرەی گۆی زەوی دەگاتە 6437 km بەنزیکەیی. $\frac{2}{3}$ی ڕووی زەوی بەئاو داپۆشراوە ڕووبەری وشکانییەکە بخەمڵێنە.

گەردون ئەم خشتەیە بەکاربهێنە بۆ شیکارکردنی پرسیارەکانی 35 تا 38

هەسارە	تیرە بە میل
عەتارد	3032
زوهرە	7521
زەوی	7926
مەریخ	4222
مشتەری	88846
زوحەل	74898
ئورانوس	31763
نبتون	30775
بلوتو	1485

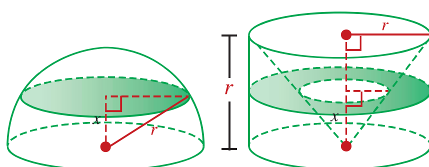
35 قەبارەی مشتەری چەند ئەوەندەی قەبارەی زەوییە؟

36 کام هەسارە قەبارەکەی بەنزیکەیی دەکاتە سەرجەمی هەردوو قەبارەی زوهرە و مەریخ؟

37 کامیان گەورەترە ڕووبەری زوحەل یان سەرجەمی هەردوو ڕووبەری ئورانوس و نبتون؟

38 ڕووبەری عەتارد چەند ئەوەندەی ڕووبەری بلوتۆیە؟

39 **بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە** نیوەگۆکە و لولەکەکە هەمان نیوەتیرەیان هەیە لەوێنەی بەرامبەر. ڕوونیبکەوە دووبرگە ڕەنگکراوەکە هەمان ڕووبەریان هەیە.



40 **بنووسە** وایدابنێ گۆیەك و خشتەکێك هەمان ڕووبەری ڕوویان هەیە هاوکێشەیەك بنووسە پەیوەندی نێوان نیوەتیرەی گۆیەکە r و درێژی لایەکی خشتەکەکە s پیشان بدات.

41 کارگەیەکی شەربەتی پرتەقاڵ دەفری گۆیی شێوە پرتەقاڵی بەکاردەهێنا لەپڕکردنەوەی بەرهەمەکەی ڕووبەری ڕووی دەفرە گۆییەکە $324.5\ cm^2$ بەنزیکەیی.

أ قەبارەی ئەو دەفرە گۆییە چەندە؟ وەڵامەکەت نزیکبکەوە لە نزیکترین دەیەك.

ب کارگەکە بڕیاریدا نیوەتیرەی دەفرە گۆیەکە بەڕێژەی 10% زیادبکات. قەبارەی دەفرە تازەکە چەندە؟

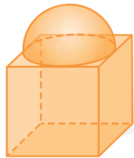
42 گۆیەك نیوەتیرەکەی 8 cm بەخشتەکێك دەوردراوە ڕێژەی قەبارەی خشتەکە بۆ گۆیەکە چەندە؟

أ $2:\frac{1}{3}\pi$ ب $2:3\pi$ ج $1:\frac{4}{3}\pi$ د $1:\frac{2}{3}\pi$

43 ڕووبەری ڕووی گۆیەك چەندە؟ قەبارەکەی $10\frac{2}{3}\pi\ cm^3$ بێت

أ $8\pi\ cm^2$ ب $10\frac{2}{3}\pi\ cm^2$ ج $16\pi\ cm^2$ د $32\pi\ cm^2$

44 کام بڕیە قەبارەی تەنی ئاوێتەی بەرامبەر کە لەنیوە گۆیەك نیوەتیرەکەی r وخشتەکێك درێژی لایەکی $2r$ پێکدێت دەنوێنێت.



أ $\left(\frac{2}{3}\pi+8\right)r^3$ ج $2(2\pi+12)r^2$

ب $\frac{4}{3}\pi r^3+2r^3$ د $\frac{4}{3}\pi r^3+8r^3$

بەرەنگاری و فراوانکردن



45 **خواردن** ئامێری بەشینەوەی بنیشتی گۆیی، لەگۆیەك پێکدێت تیرەکەی18 cm ئامێرەکە 1 300 بنیشتی گۆیی تێدایە 57% قەبارەکەی دەگرێتەوە. تیرەی هەر بنیشتێکی گۆیی بخەمڵێنە.

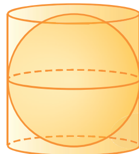
46 دەتوانرێت ڕووبەری ڕووی گۆ بۆ دۆزینەوەی قەبارەکەی بەکاربهێنرێت.

أ یاسای ڕووبەری ڕووی گۆ بۆ هەژمارکردنی نیوەتیرەکەی r بەپێی ڕووبەری S بەکاربهێنە

ب لەیاسای قەبارەی گۆدا لەجیاتی r ئەو بەهایە دابنێ کە لە پرسیاری پێشودا دۆزیتەوە

ج وێنەی ڕوونکردنەوەیی ئەو نەخشەیە بکێشە کە قەبارەی گۆیەکە بەپێی ڕووبەری ڕووی گۆیەکەی دەردەبڕێت باسی ڕوونکردنەوەی وێنەکە بکە.

وێنەی بەرامبەر بەکاربێنە بۆ شیکارکردنی هەردوو پرسیاری 47 و 48 .



47 پەیوەندی لەنێوان قەبارەی گۆو قەبارەی لولەك چییە؟

48 پەیوەندی نێوان ڕووبەری ڕووی گۆیەکەو تەنیشتە ڕووبەری لولەکەکە چییە؟

پێداچوونەوەی لولپێچی

نەخشەیەك بنووسە کە وێنە ڕوون کردنەوەییەکەی بەم خاڵانەی خوارەوەدا بڕوات. (پۆلەکانی پێشوو)

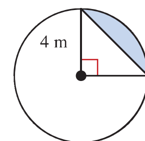
> **بۆ لێدوان**
>
> ئایا ئەتوانیت نەخشە دابنێین ئەگەر خاڵەکانمان زانی.

49 $\{(0,1),(1,2),(-1,2),(2,5),(-2,5)\}$

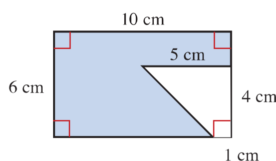
50 $\{(-1,9),(0,10),(1,11),(2,12),(3,13)\}$

ڕووبەری بەشە ڕەنگراوەکە بدۆزەوە وەڵامەکەت بۆ نزیکترین دەیەك نزیکبکەوە. (پۆلەکانی پێشوو)

51



52



کاریگەری هەر گۆڕانێك لەسەر قەبارە باسبکە. (پۆلەکانی پێشوو)

53 قەبارەی خشتەکێك دوای لێکدانی لایەکی لە $\frac{3}{4}$

54 قەبارەی پوازکێك دوای لێکدانی هەریەکە لەبەرزی و ڕووبەری بنکەکەی لە 5.

8-1

کەرتە بازنەییەکان و کەوانەکان

Sector and arcs



کێ ئەمە بەکاردەهێنێت

جوتیارەکان نیوەتیرەی بازنە بەکاردەهێنن بۆ هەژمارکردنی ڕووبەری ئەو ناوچەیەی کە ئاودێری دەیانگرێتەوە. (نموونە 3)

ئامانجەکان

- ڕووبەری کەرتی بازنەیی هەژماردەکات
- درێژی کەوانە هەژماردەکات.

زاراوەکان
Vocabulary

کەرتە بازنە
Sector of a circle

پارچە بازنەیی
Segment of a circle

درێژی کەوانە
Arc length

ڕووبەری کەرتە بازنەیی بەشێکە لە ڕووبەری ئەو بازنەیەی کە تیایەتی بۆ ئەوەی ڕووبەری کەرتە بازنەیەك کە گۆشەکەی $m°$ یە هەژماربکەیت ڕووبەری بازنەکە لە $\frac{m°}{360°}$ بدە.



کەرتە بازنەیی

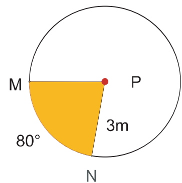
پێناسە	ناولێنان	وێنە	ڕووبەر
کەرتە بازنەیی **Sector of a circle** بەشێکی دیاریکراوە لەبازنەکە بە دوو نیوەتیرە ئەو کەوانەیەی پێیان سنووردراوە دیاری دەکرێت.	کەرتی BCD		$A=\pi r^2\left(\frac{m°}{360°}\right)$

نموونـــــە 1

دۆزینەوەی ڕووبەری کەرتە بازنەیی

ڕووبەری هەریەکە لەم کەرتە بازنەییانە بەپێی π بدۆزەوە و ئەنجامەکە بۆ نزیکترین بەش لە سەد نزیکبکەوە.

أ کەرتی MPN



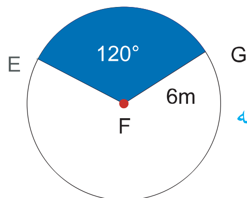
$A=\pi r^2\left(\frac{m°}{360°}\right)$ یاسای ڕووبەری کەرتە بازنەیی.

$A=\pi(3)^2\left(\frac{80°}{360°}\right)$ لەجیاتی هەریەکە لە نیوەتیرە وپێوانەی گۆشەکە بەهاکەی دابنێ.

$A=2\pi$ سادەبکە.

ڕووبەری ئەو کەرتە $2\pi\ \text{m}^2 \approx 6.28\ \text{m}^2$

ب کەرتی GFE



$A=\pi r^2\left(\frac{m°}{360°}\right)$ یاسای ڕووبەری کەرتە بازنەیی.

$A=\pi(6)^2\left(\frac{120°}{360°}\right)$ لەجیاتی هەریەکە لە نیوەتیرە وپێوانەی گۆشەکە بەهاکەی دابنێ.

$A=12\pi\ \text{cm}^2$ سادەبکە.

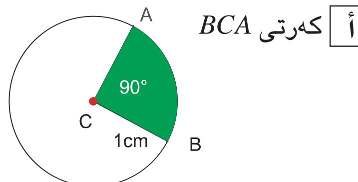
ڕووبەری ئەو کەرتە دەکاتە $12\pi\ \text{cm}^2 \approx 37.70\ \text{cm}^2$

> **ئاگاداربە!**
> هێمای پلە لەدوای m لە یاساکەدا بنووسە بۆ ئەوەی بیرتبێتەوە کەپێوانەی کەوانەکەت بەکارهێناوە نەك درێژیەکەی.

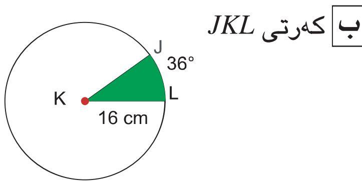


1. ڕووبەری ئەم کەرتە بازنەییانە بدۆزەوە پاشان بۆ نزیکترین بەش لە سەدە نزیککەوە.

أ کەرتی BCA



ب کەرتی JKL



نموونە 2 جێبەجێکردن لە کشتوکاڵدا



تیرەی بازنەی ئاودێری دەگاتە 120m ڕووبەری ئەو کەرتە بازنەییەی ئامێرە ئاودێرییەکە ئاوی دەدات کاتێک °50 دەسوڕێ هەژماربکە و وەڵامەکە بەنزیکترین مەتر دووجا بدۆزەوە.

$A=\pi r^2\left(\frac{m^\circ}{360^\circ}\right)$ یاسای ڕووبەری کەرتە بازنەیی

$A=\pi(60)^2\left(\frac{50^\circ}{360^\circ}\right)$ $r = 360$ cm

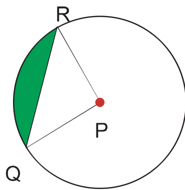
$A=500\pi$ سادەبکە.

ڕووبەری کەرتە دەکاتە $1\ 571\ m^2$ بەنزیکەیی.



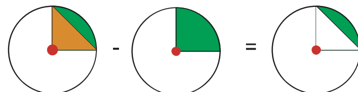
2. ئەو ڕووبەرە چەندە کاتێك ئامێرەکە نیوخول بسوڕێتەوە؟

پارچەی بازنەیی segment of a Circle بریتییە لە ناوچەیەکی دیاریکراو لەبازنەکە بەژێی و ئەو کەوانەیی کەهەردوو سەری ژێیەکەی گەیاندووە دیاریدەکرێت.





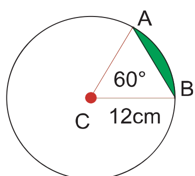
ڕووبەری پارچە بازنەیی



ڕووبەری پارچە بازنەیی = ڕووبەری کەرتی بازنەیی − ڕووبەری سێگۆشە

نموونە 3 دۆزینەوەی ڕووبەری پارچەی بازنەیی

ڕووبەری پارچەی بازنەیی ACB بدۆزەوە، بۆ نزیکترین بەش لەسەد نزیککرابێتەوە.

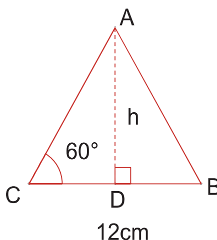


هەنگاوی 1 ڕووبەری کەرتی بازنەیی ACB بدۆزەوە.

$A_1=\pi r^2\left(\frac{m^\circ}{360^\circ}\right)$ یاسای ڕووبەری کەرتە بازنەیی

$A_1=\pi(12)^2\left(\frac{60^\circ}{360^\circ}\right)$

$= 24\pi\ cm^2$ سادەبکە.



هەنگاوی 2 ڕووبەری سێگۆشەی ACB بدۆزەوە بەرزی $\overline{AD}$ بکێشە.

$A_2=\frac{1}{2}bh=\frac{1}{2}(12)(6\sqrt{3}$

$A_2=36\sqrt{3}\ cm^2$

لەبیرت بێت

لەسێگۆشە وەستاوی 30 − 60 − 90 دا درێژی لای بەرامبەر گۆشەی °60 لە لێکدانی لای تەنیشتی لە $\sqrt{3}$ پەیدابووە.

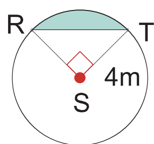
هەنگاوی 3 ڕووبەری پارچەکە = ڕووبەری کەرتەکە − ڕووبەری سێگۆشە

$A = 24\pi - 36\sqrt{3} \approx 13.04$

ڕووبەری کەرتەکە $13.04\ cm^2$ بەنزیکەیی.



3. ڕووبەری پارچە بازنەیەکە بۆ نزیکترین بەش لەسەد بدۆزەوە.



هەروەك چۆن کەرتی بازنەیی بەشێکە لە ڕووبەری بازنەکە، هەروەها درێژی کەوانەکەشی بەشێکە لەچێوەکەی.



درێژی کەوانە

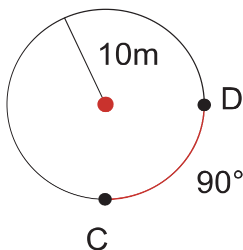
پێناسە	وێنە	درێژی
درێژی کەوانە Arc length بریتییە لە درێژی ئەو داوە دەزووەی نوساوە بەکەوانەکەوە و هەردوو لاکەی دەگەیەنێت.	A, m, B, r	$L=2\pi r\left(\frac{m^\circ}{360^\circ}\right)$

* تێبینی ئەوە بکە درێژی کەوانە و نیوەتیرەی بازنە هەمان یەکەی درێژییان هەیە.

نموونـــــــە 4 دۆزینەوەی درێژی کەوانە

درێژی هەر کەوانەیەك بەپێی π بدۆزەوە پاشان بۆ نزیکترین بەش لە سەد نزیکیبکەوە.

أ $\overset{\frown}{CD}$



$L=2\pi r\left(\frac{m^\circ}{360^\circ}\right)$

$L=2\pi(10)\left(\frac{90^\circ}{360^\circ}\right)$

$L=5\pi \approx 15.71$

درێژی کەوانەکە $15.71\ m$ بەنزیکەیی.

ب **لەبازنەیەکدا نیوەتیرەکەی $3\ m$ و پێوانەی کەوانەکەی35°یە.**

$L=2\pi r\left(\frac{m^\circ}{360^\circ}\right)$

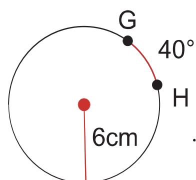
$L=2\pi(3)\left(\frac{35^\circ}{360^\circ}\right)$

$L=\frac{7}{12}\pi\approx 1.83$

درێژی کەوانەکە دەگاتە $1.83\ m$ بەنزیکەیی.



4. **درێژی هەر کەوانەیەك بەپیی π بدۆزەوە پاشان بۆ نزیکترین بەش لە سەد نزیکیبکەوە.**



أ لەبازنەیەکدا پێوانەی کەوانەکەی40°ونیوەتیرەکەی $6\ cm$ بێت.

ب لە بازنەیەکدا پێوانەی کەوانەکەی135°ونیوەتیرەکەی $4\ cm$ بێت.

بیربکەوە و تاوتویێبکە

1. جیاوازی لەنێوان درێژی کەوانە وپێوانەکەیدا چییە؟
2. کاتێك پیتزایەك بۆ چەند کەرتێکی بازنەیی یەکسان دابەشدەکەی هەریەکەیان کەرتێکی بازنەیی دەبێت. ئەو زانیاریانە کامانەن کەپێویستە بۆ دۆزینەوەی پارچەیەك لەپارچەکانی پیتزاکە؟
3. ڕێکخەربە ئەم خشتەیەی خوارەوە بنووسە و تەواویبکە.



	یاساکەی	وێنەکەی
ڕووبەری کەرتی بازنەیی		
ڕووبەری پارچەی بازنەیی		
درێژی کەوانە		

8-1 ڕاهێنانەکان

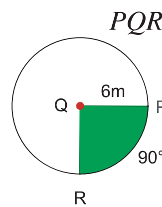
ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

1 **زاراوەکان** ئەو ناوچەیەی بەدوو نیوەتیرە لەنیوەتیرەکانی بازنەیەك و ئەو کەوانەیەی سنوریان دەدات بریتییە لە ___?___ (کەرتی بازنەیی یان پارچەی بازنەیی).

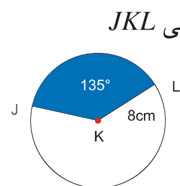
بڕوانە نموونە 1

ڕووبەری هەرکەرتێکی بازنەیی بەپێی π بدۆزەوە، پاشان بۆ نزیکترین بەش لە سەد نزیکبکەوە.

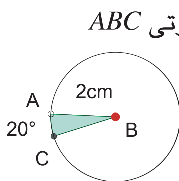
2 کەرتی PQR



3 کەرتی JKL



4 کەرتی ABC



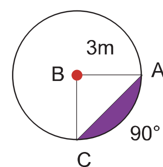
بڕوانە نموونە 2

5 **دەریاوانی** تیشکی منارەیەك بەگۆشەیەك پێوانەکەی $150°$ دەسووڕێتەوە. تیشکەکەی تا دووری 3 km دەگات، ئەو ڕووبەرەی تیشکەکە بەسەریدا دەروات هەژماربکە بۆ نزیکترین کیلۆمەتر دووجا نزیککرابێتەوە.

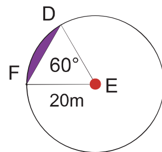
بڕوانە نموونە 3

هەنگاوی جۆراوجۆر ڕووبەری هەرپارچە بازنەیەك بدۆزەوە بۆ نزیکترین بەش لەسەد نزیککرابێتەوە.

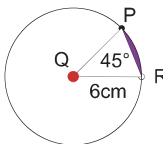
6



7



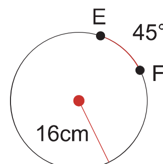
8



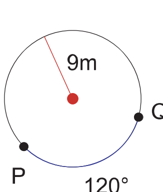
بڕوانە نموونە 4

درێژی هەر کەوانەیەك بەپێی π بدۆزەوە و بۆ نزیکترین بەش لە سەد نزیککرابێتەوە.

9 $\widehat{EF}$



10 $\widehat{PQ}$



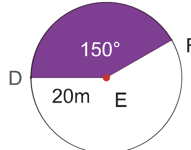
11 درێژی کەوانەیەك پێوانەکەی $20°$ بێت، لەو بازنەیەدا نیوەتیرەکەی 6 m بێت.

ڕاهێنان وشیکارکردنی پرسیارەکان

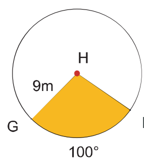
ڕاهێنانی ئازاد	
بۆ شیکاری پرسیارەکان	تەماشای نموونە
14–12	1
15	2
18–16	3
21–19	4

ڕووبەری هەر کەرتە بازنەییەك بەپێی π بدۆزەوە و بۆ نزیکترین بەش لە سەد نزیکبکەوە.

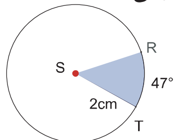
12 کەرتی DEF



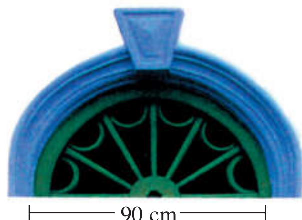
13 کەرتی GHJ



14 کەرتی RST

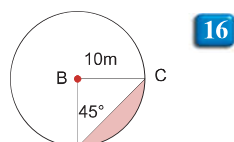


15 **تەلارسازی** تاقی (قمرە) سەر پەنجەرەیەك لەشێوەی نیوبازنەدایە، هەروەك چۆن لەسەر دەرگای ماڵان هەیە، ڕووبەری ئەو تاقە هەژماربکە بۆ نزیکترین سانتیمەتر دووجا نزیککرابێتەوە.

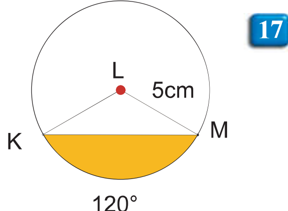


هەنگاوی جۆراوجۆر ڕووبەری هەرپارچە بازنەیەك بدۆزەوە و بۆ نزیکترین بەش لەسەد نزیکبکەوە.

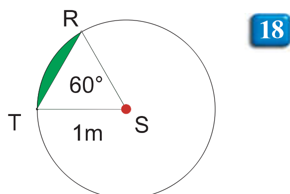
16



17

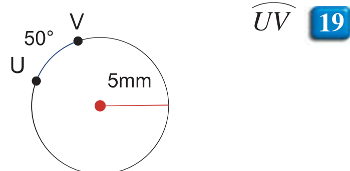


18

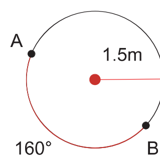


درێژی هەر کەوانەیەك بەپێی π بدۆزەوە و بۆ نزیکترین بەش لەسەد نزیکبکەوە.

19 $\widehat{UV}$



20 $\widehat{AB}$

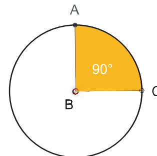


21 لەبازنەیەکدا پێوانەی کەوانەکەی 9° وتیرەکەی 6 m بێت.

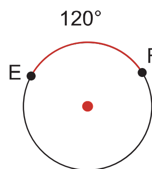
22 **مێژووی بیرکاری** زانایانی بیرکاری گریکییەکان لەشێوەی بەرامبەر کەناویان ناوە سالینۆن کۆڵیونەتەوە چێوەی سالینۆنی بەرامبەر هەژماربکە نزیکیبکەوە لەنزیکترین دەیەك.

نیوەتیرەی هەر بازنەیەك بدۆزەوە.

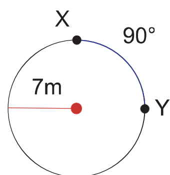
23 ڕووبەری کەرتی ABC یەکسانەبە 9π یەکە دووجا



24 درێژی کەوانەی EF یەکسانەبە 8πm



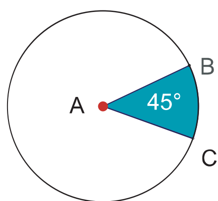
25 **خەمڵاندن** کەرتی $\frac{22}{7}$ بەهای نزیکەیی ژمارە π یە.



أ ئەو بەهایە بەکاربێنە بۆ دۆزینەوەی بەهای نزیکەیی درێژی کەوانەی $\widehat{XY}$

ب کلیلی بژمێر بەکاربێنە بۆ دۆزینەوەی درێژی کەوانەی $\widehat{XY}$ لەگەڵ وەرگرتنی 8 ڕەنووس دوای فاریزەکە.

ج ئایا ئەوبەها نزیکەییەی لەلقی أ دا دۆزیتەوە گەورەترە لەوەی لە لقی ب دا دۆزینەوە یان بچووکترە؟



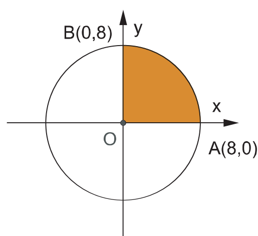
26 **بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە** نیوەتیرەی بازنەیەك بدۆزەوە ئەگەر بزانی ڕووبەرەکەی $24\ cm^2$ پاشان کاتێك ڕووبەری کەرتە سەوزەکە $3\ m^2$ بێت.



27 **بنووسە** چۆن نیوەتیرەی بازنەیەك هەژماردەکەی ئەگەر درێژی کەوانەو پێوانەکەی بزانیت؟



ئامادەکردن بۆ تاقیکردنەوە



28 ڕووبەری کەرتی AOB چەندە؟

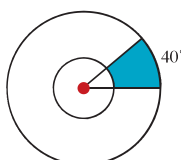
(أ) 4π (ب) 16π (ج) 32π (د) 64π

29 درێژی کەوانەی AB چەندە؟

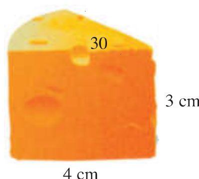
(أ) 2π (ب) 4π (ج) 8π (د) 16π

30 **کورتە وەڵام** ڕووبەری کەرتێکی بازنەیی چەندە کە بەکەوانەیەك پێوانەکەی $38°$ بێت سنووردراوە لەو بازنەیەدا نیوەتیرەکەی $12\ cm$ بێت؟

بەرەنگاری و فراوانکردن



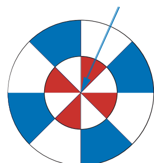
31 ڕووبەری بەشە شینەکە چەندە؟ ئەگەر بزانی نیوەتیرەی بازنە گەورەکە $5\ cm$ ونیوەتیرەی بچووکەکە $2\ cm$ ؟



32 پارچە پەنیری بەرامبەر کەرتێکە لەلولەك.

أ) قەبارەی ئەو پارچەیە چەندە؟ بۆ نزیکترین دەیەك نزیکبکەوە.

ب) ڕووبەری ڕووی سەرەوەی بدۆزەوە بۆ نزیکترین دەیەك نزیکبکەوە.



33 **ئەگەر** پێوانەی هەر چەقەگۆشەیەکی لە وێنەی بەرامبەر $45°$ یە، نیوەتیرەی بازنە بچووکەکە یەك گرێیە نیوەتیرەی گەورەکە دوو گرێیە ئەگەری ئەوەی تیرەکە یەکێك لەو ناوچانەی خوارەوە بپێکی چەندە؟

أ) ناوچەی سوور ب) ناوچەی شین ج) ناوچەی سوور یان شین؟

پێداچوونەوەی لولپێچی

دیاریبکە ئایا هەریەك لەم ڕاستەهێڵانە تەریبە بە ڕاستەهێڵی $y=4x-5$ یان ئەستوونە یان هیچیان نییە. (پۆلەکانی پێشوو)

34 $8x-2y=6$.

35 ئەو ڕاستەهێڵەی بە دوو خاڵی $\left(\frac{1}{2},0\right)$ و $\left(1\frac{1}{2},2\right)$ دا دەڕوات.

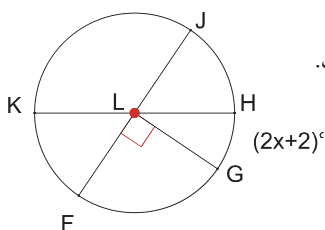
36 ئەو ڕاستەهێڵەی تەوەری یەکەم لە (4)دا تەوەری دووەم لە (1)دا دەبڕێت.

بەپێی π بدۆزەوە (وانەی 1-7)

37 قەبارەی گۆیەك نیوەتیرەکەی $3\ cm$ بێت.

38 چێوەی (بازنەی مەزن)ی گۆیەك ڕووبەری ڕووەکەی $4\pi\ m^2$ بێت.

هەژماربکە. (پۆلەکانی پێشوو)



39 $m\widehat{KLJ}$ **40** $m\widehat{KJ}$ **41** $m\widehat{JFH}$

بەشی 1

ڕێبەری خوێندن: پێداچوونەوە

شوێنی هەرخاڵێك لەبۆشایی پۆوتاندا دیاریبكە.

1 $(-1, 0, 3)$

2 $(2, -2, 1)$

3 $(0, -1, 1)$

4 $(3, 1, 0)$

وێنەی هەر ڕووتەختێك لەبۆشایی پۆوتاندا بكێشە.

5 $x-3y+2z=6$

6 $2x-4y-2z=4$

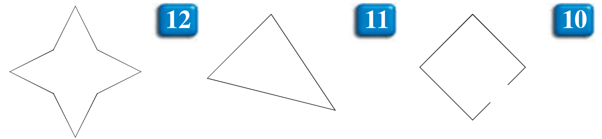
7 $-x+y-5z=5$

8 $3x+2y+z=-6$

9 **ئابوری بەكاربەر** روناك 35 000 دیناری پێیە دەیەوێت ساردەمەنی وپیتزاو شیرینی بكڕێت نرخی قوتویەك ساردەمەنی 2 000 دینارو كولێرەیەكی پیتزا 9 000 دینار وپاكەتێك شیرینی 4 000 دینارە هاوكێشەیەك بەسێ نەزانراو بۆ دەربەڕینی ئەوەی سەرەوە بنووسە.

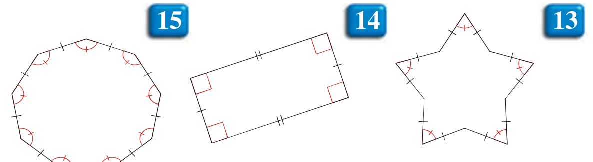
ئەگەر ئەم شێوانە چەندلابوون بەپێی ژمارەی لایەكانی ناویان بنێ.

10 11 12



ئەگەر چەندلاكە ڕێكە یان نارێكە قۆپاوە یان قۆقزە دیاریبكە.

13 14 15

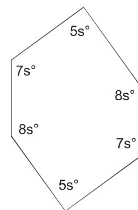


بدۆزەوە.

16 كۆی پێوانەی گۆشەكانی ناوەوەی دوازدەلایەك.

17 پێوانەی هەرگۆشەیەكی ناوەوە لەچەندلایەكی ڕێكدا 20 لای هەبێت.

18 پێوانەی هەر گۆشەیەكی ناوەوەی چەندلای بەرامبەر.

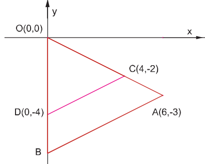


19 پێوانەی گۆشەكانی دەرەوەی چوارلایەكی ڕێك.

20 بیسەلمێنە دوو سێگۆشەی RST و RUV هاوشێوەن كاتێك $R(1, -3)$ و $S(-1, -1)$ و $T(2, 0)$ و $U(-3,1)$ و $V(3,3)$.

21 بیسەلمێنە دوو سێگۆشەی JKL و JMN هاوشێوەن كاتێك $J(4, 4)$ و $K(2, 3)$ و $L(4,2)$ و $M(-4, 0)$ و $N(4, -4)$.

22 $O(0, 0)$و$A(6, -3)$و$C(4, -2)$و$D(0, -4)$پۆوتانی خاڵی B بدۆزەوە ئەگەر بزانیت دوو سێگۆشەی AOB و COD هاوشێوەن.



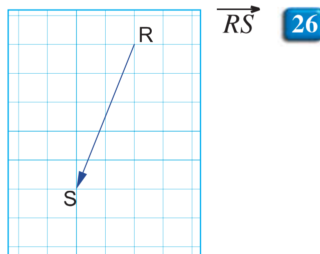
23 وێنەی سێگۆشەی KLM كاتێك $L(0, 0)$ و $K(0, 3)$ و $M(4, 0)$ بێت. پاشان وێنە گەورەكراوەكەی بەرێژەی 3 بكێشە ڕوونیبكەوە دوو سێگۆشەكە هاوشێوەن.

هەر ئاڕاستەبرێك بە دوو پێكهێنەرەكەی بنووسە.

24 $\overrightarrow{AB}$ كاتێك $A(5, 1)$ و $B(2, 3)$.

25 $\overrightarrow{MN}$ كاتێك $M(2, 4)$ و $N(1, 2)$.

26 $\overrightarrow{RS}$



وێنەی هەر ئاڕاستەبرێك لە ڕووتەختی پۆوتاندا بكێشە ودرێژییەكەی بۆ نزیكترین دەیەك نزیكبكەوە.

27 $\langle -5, -3\rangle$

28 $\langle -2, 0\rangle$

29 $\langle 4, -4\rangle$

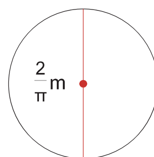
30 $\langle 4, 4\rangle$

وێنەی هەر ئاراستەبڕێك لە ڕووتەختی پۆوتاندا بکێشە لارییەکەی بۆ نزیکترین پلە نزیکبکەوە.

31 خێرایی کۆپتەرێك بەئاراستەبڕی $\langle 4, 5 \rangle$ نوێنرابێت.

32 فڕۆکەیەك بەخێرایی 600 km/h بەئاراستەی باکوور-°55- خۆرهەڵات دەفڕێت، ئەمە لە کاتێکدا خێرایی بایەك 50 km/h بەئاراستەی خۆرهەڵات بێت خێرایی ڕاستینەی فڕۆکەکە چەندە؟ لارییە ڕاستینەکەی چەندە؟ خێراییەکە بۆ نزیکترین دەیەك ولارییەکەی بۆ نزیکترین پلە نزیکبکەوە.

هەر پێوانەیەك بدۆزەوە، لەکاتی پێویستدا وەڵامەکەت بۆ نزیکترین دەیەك نزیکبکەوە.



33 چێوەی بازنەی بەرامبەر.

34 ڕووبەری بازنەیەك چێوەی 14π m

35 تیرەی بازنەیەك ڕووبەری $64x^2\pi$ cm^2 بێت.

36 ڕووبەری پێنجلایەکی ڕێك درێژی لایەکی 4 cm بێت.

37 ڕووبەری سێگۆشەیەکی ڕێك لایەکی 4 km بێت.

38 ڕووبەری هەشتلایەکی ڕێك لایەکی 8 cm بێت.

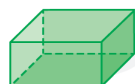
39 ڕووبەری چوارگۆشەیەك تیرەکەی 12 mm.

ژمارەی ڕووەکان ولایەکان و سەرەکان لەهەر چەند ڕوویەکدا بدۆزەوە پاسادانی یاسای ئۆلەر بکە.

40



41



دووری نێوان هەردوو خاڵەکەو پۆوتانی ناوەڕاستی ئەو پارچە ڕاستەهێڵەی دووخاڵەکە سنووریداوە بدۆزەوە بۆ نزیکترین دەیەك نزیکبکەوە.

42 $(7, 1, 1)$ ، $(2, 6, 4)$

43 $(5, 7, 8)$ ، $(0, 3, 0)$

44 $(9, 1, 5)$ ، $(7, 2, 6)$

45 $(2, 7, 4)$ ، $(6, 2, 8)$

بەپێی π ئەمانە بدۆزەوە.

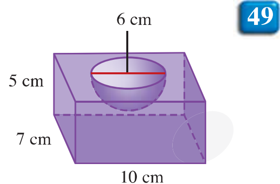
46 قەبارەی گۆیەك ڕووبەری ڕووەکەی 100π cm^2 بێت.

47 ڕووبەری گۆیەك قەبارەکەی 288π cm^3 بێت.

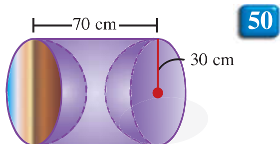
48 تیرەی گۆیەك ڕووبەرەکەی 256π cm^2 بێت.

ڕووبەری ڕوو و قەبارەی هەریەك لەم تەنە ئاوێتانە بدۆزەوە.

49

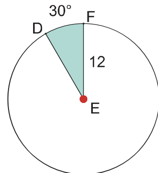


50

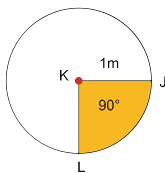


ڕووبەری هەر کەرتێکی بازنەیی بەپێی π بدۆزەوە پاشان بۆ نزیکترین بەش لەسەد نزیکبکەوە.

51 کەرتی DEF

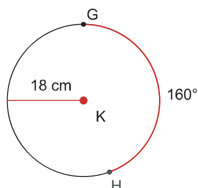


52 کەرتی LKJ

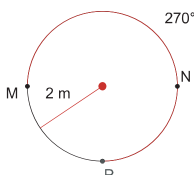


درێژی هەر کەوانەیەك بەپێی π بدۆزەوە پاشان بۆ نزیکترین بەش لەسەد نزیکبکەوە.

53 $\widehat{GH}$



54 $\widehat{MNP}$



بەشی 1

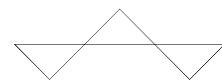
تاقیکردنەوەی بەش

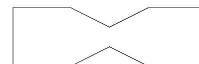
شوێنی هەرخاڵێك لەبۆشایی پۆوتاندا دیاریبکە.

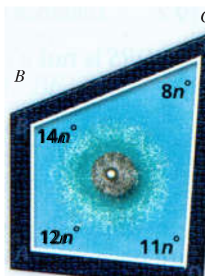
1 $(2, -1, 3)$ **2** $(0, -1, 3)$

3 $(-2, 1, -1)$

شێوەکە چەندلایە یان نا، ئەگەر وایە بەپێی ژمارەی لایەکان ناوی بنێ.

4 

5 



6 گۆمەئاوێك لەشێوەی چوارلادایە هەروەك لەوێنەی بەرامبەر دیارە پێوانەی هەر گۆشەیەکی ناوەوەی هەژماربکە.

7 کۆی پێوانەی گۆشەکانی ناوەوەی نۆلایەکی قۆقز بدۆزەوە.

8 پێوانەی گۆشەی دەرەوەی چەندلایەکی رێك ژمارەی لایەکانی 15 بێت بدۆزەوە.

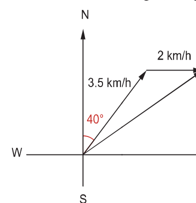
وێنەی هەر ئاراستەبرێك لە رووتەختی پۆوتانەکاندا بکێشە و درێژییەکەی بۆ نزیکترین دەیەك هەژماربکە.

9 $\langle 1, 3\rangle$ **10** $\langle -4, 1\rangle$ **11** $\langle 2, -3\rangle$

وێنەی هەر ئاراستەبرێك لە رووتەختی پۆوتانەکاندا بکێشەو درێژییەکەی بۆ نزیکترین پلە هەژماربکە.

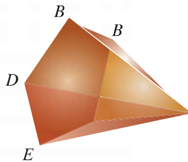
12 خێرایی فرۆکەیەك بەئاراستەبری $\langle 1, 3\rangle$ نوێنراوە.

13 خێرایی با بەئاراستەبری $\langle 4, 1\rangle$ نوێنراوە.



14 سەرجۆن بەسوار پایسکیلەکەی بە خێراییەکی نەگۆڕ برەکەی $3.5\ km/h$ بە ئاراستەی باکوور $40°$ خۆرهەڵات کەوتەرێ لەوکاتەدا خێرایی با $2\ km/h$ بە بە ئاراستەی خۆرهەڵات بوو،خێرایی راستینەی سەرجۆن بۆ نزیکترین دەیەك و ئاراستەکەی بۆ نزیکترین پلە نزیککرابێتەوە چەندە؟

15 چێوە و رووبەری ئەو بازنەیەی تیرەکەی 12m بەپێی π بدۆزەوە.

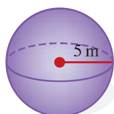


16 ژمارەی رووەکان ولایەکان وسەرەکان لەم تەنە ئەندازەییەی بەرامبەر چەندە؟ یاسای ئۆلەر پاسادان بکە؟

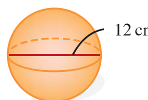
دووری نێوان دووخاڵ ویۆوتانی خاڵی ناوەراستی ئەو پارچە راستەهێڵەی بە دوو خاڵەکە سنووردراوە بدۆزەوە. وەڵامەکەت بۆ نزیکترین دەیەك نزیکبکەوە.

17 $(0, 0, 0)$ $(5, 5, 5)$ **18** $(6, 0, 9)$ ، $(7, 1, 4)$

19 $(-1, 4, 3)$ ، $(2, -5, 7)$

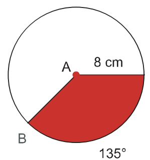


20 رووبەری گۆی بەرامبەر بدۆزەوە بۆ نزیکترین دەیەك نزیکبکەوە.



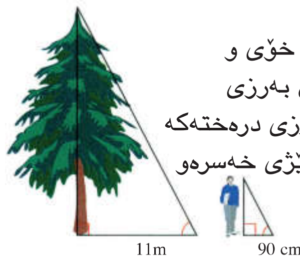
21 قەبارەی گۆ بەرامبەر بدۆزەوە بۆ نزیکترین دەیەك نزیکبکەوە.

22 رووبەری شەشلایەکی رێك درێژی لایەکی 4 m بێت بۆ نزیکترین دەیەك نزیککرابێتەوە.



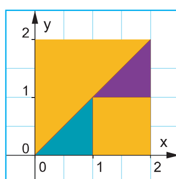
23 رووبەری کەرتی بازنەیی بەرامبەر بەپێی π بدۆزەوەو بۆ نزیکترین بەش لە سەد نزیکبکە.

24 درێژی کەوانەی BC بەپێی π بدۆزەوە و نزیکبکەوە بۆ نزیکترین بەش لەسەد.



25 خەسرەو درێژی سێبەری خۆی و درەختێکی پێوا بۆ ئەوەی بەرزی درەختەکە بدۆزێتەوە بەرزی درەختەکە چەندە؟ ئەگەر بزانیت درێژی خەسرەو 175 cm

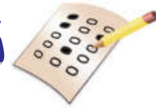
26 بیسەلمێنە دوو سێگۆشەی ABC و ADE هاوشێوەن کاتێك $A\ (6, 5)$ و $B\ (3, 4)$. $C\ (6, 3)$ و $D\ (-3, 2)$ و $E\ (6, -1)$.



27 وێنەی دروشمی بەرامبەر دروستبکە دوای گەورەکردنی بەرێژەی $\frac{3}{2}$.

بەشی 1

تاقیکردنەوەی کەڵەکەبوو



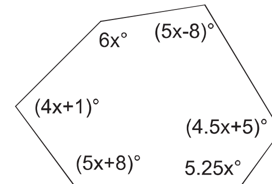
هەڵبژاردن لە وەڵامی جۆراوجۆر

1 کام لەمانەی خوارەوە یەکتربڕینەکانی ڕووتەختی $2x+y-5z=20$ دەنوێنێت.

(أ) $x=0, y=0, z=0$ (ج) $x=10, y=20, z=-4$

(ب) $x=2, y=1, z=-5$ (د) $x=10, y=20, z=4$

2 بەهای x لەم چەندلایەی خوارەوەدا چەندە؟



(أ) 12 (ج) 24

(ب) 18 (د) 36

3 پێوانەی هەر گۆشەیەکی ناوەوەی دوازدە لایەکی ڕێك چەندە؟

(أ) $30°$ (ج) $150°$

(ب) $144°$ (د) $162°$

4 کام لەم ئاراستەبڕانەی خوارەوە یەکسانە بە ئاراستەبڕی $\overrightarrow{AB}$ کاتێك $A(2, -1)$ و $B(-2, 4)$ بێت؟

(أ) $\langle -4, -5\rangle$ (ج) $\langle 5, -4\rangle$

(ب) $\langle -4, 5\rangle$ (د) $\langle 5, 4\rangle$

5 پێنجلایەکی قۆقزە $ABCDE$ ، $\hat{A}\cong\hat{B}\cong\hat{C}$ ، $\hat{D}\cong\hat{E}$ پێوانەی C چەندە؟ $m\,\hat{A}=2\,m\,\hat{D}$

(أ) $67.5°$ (ج) $154.2°$

(ب) $135°$ (د) $225°$

6 جۆری ئەو سێگۆشەیە چییە پێوانەی گۆشەکانی ناوەوەی $(2x)°$ و $(3x\text{-}9)°$ و $(x+27)°$ بێت.

(أ) دوولایەکسانی گۆشە تیژە.

(ب) دوولایەکسانی وەستاوە.

(ج) جیالای گۆشە تیژە.

(د) جیالای گۆشەیەکی کراوەیە.

7 بەهای x لەوێنەی بەرامبەردا کامەیە؟



(أ) $22.5°$ (ج) $90°$

(ب) $45°$ (د) $135°$

8 شارەوانی باخچەیەکی لەسەرشێوەی شەشلایەك بۆ چاندنی گوڵ تەرخانکرد، ڕووبەری ئەو شوێنە بۆ نزیکترین دەیەك نزیکرابێتەوە چەندە ئەگەر بزانی درێژی لایەکی شەشلاکە 5 m بێت.

(أ) $32.5\ m^2$ (ج) $75.0\ m^2$

(ب) $65.0\ m^2$ (د) $129.9\ m^2$

9 چۆن ڕێژەی قەبارەی گۆیەك بۆ ڕووبەرەکەی دەگۆڕێت ئەگەر نیوەتیرەکەی دووهێندکرا.

(أ) ڕێژەکە ناگۆڕێت. (ج) لە 4 دەدرێت.

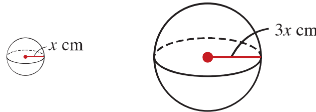
(ب) دوو هێندە دەبێت. (د) لە 8 دەدرێت.

10 $M(2, -6, 3)$ ناوەڕاستی $\overline{AB}$ کاتێك $A(x, y, z)$ و $B(-2, 6, 13)$ پۆوتانی خاڵی A چەندە؟

(أ) $A(-6, 18, 23)$ (ج) $A(2, -6, 19)$

(ب) $A(0, 0, 8)$ (د) $A(6, -18, -7)$

11 قەبارەی گۆیە گەورەکە چەندە؟ ئەگەر قەبارەی بچووکەکە $288\ cm^3$ بێت.



(أ) $864\ cm^3$ (ج) $7776\ cm^3$

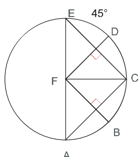
(ب) $2827\ cm^3$ (د) $23\ 328\ cm^3$

12 کام لەم ئاراستەبڕانەی خوارەوە درێژییەکەی یەکسانە بە $3\sqrt{5}$

(أ) $\langle -4, -5\rangle$ (ج) $\langle 5, -4\rangle$

(ب) $\langle -3, 6\rangle$ (د) $\langle 5, 5\rangle$

13 ڕووبەری کەرتە بازنەیی EFD چەندە؟ ئەگەر پێوانەی $\widehat{BC}$ 6π cm بێت؟

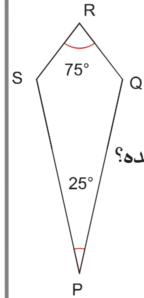


(أ) $20\pi\ cm^2$ (ج) $120\pi\ cm^2$

(ب) $72\pi\ cm^2$ (د) $240\pi\ cm^2$

تەنها وەڵام

14 ژمارەی لایەکانی چەندلایەکی قۆقز چەندە ئەگەر سەرجەمی پێوانەی گۆشەکانی ناوەوەی $1260°$ بێت؟



15 پێوانەی $\widehat{PQR}$ لەچەندلای بەرامبەردا چەندە؟

16 درێژی لاوێن 1.6 m ودرێژی سێبەرەکەی 3.5 m بەرزی درەختێك چەندە؟ ئەگەر سێبەرەکەی 17.5 m درێژبووبێتەوە.

17 ژمارەی ئەو پارچە راستەهێڵانەی لەئەنجامی گەیاندنی دووخاڵ لەنێوان 6 خاڵدا لە رووتەختێکدا پەیدادەبن چەندە؟ ئەگەر زانیت هیچ سێ خاڵێکیان لەرێکی یەکتری نەبن.

18 نیوەتیرەی بازنەیەك چەندە؟ ئەگەر رێژەی رووبەرەکەی بۆ چێوەکەی یەکسان بێت بە 2.5

19 درێژی بەرەنجامی دوو ئاراستەبری $\vec{u} = \langle 3, -7 \rangle$ و $\vec{v} = \langle -6, 5 \rangle$ چەندە؟ وەڵام بۆ نزیکترین دەیەك نزیکبکەوە.

20 ژمارەی لایەکانی زۆر روو چەندە؟ کە 12سەر و 8 رووی هەبێت؟

21 رووبەری شەشلایەکی رێك کە درێژی لایەکی 2 cm بێت چەندە؟ وەڵامەکەت بۆ نزیکترین دەیەك نزیکبکەوە.

22 درێژی ئەو کەوانەیەی نیوە بازنەیەك لە بازنەیەکدا نیوەتیرەکەی5 mmبێت دروستی دەکات چەندە؟

کورتە وەڵام

23 بیسەلمێنە دوو سێگۆشەی ABC و DEC هاوشێوەن کاتێك$A(-2, 0)$ و $B(2, 2)$ و $C(2, -2)$ و $D(0, -1)$ و$E(2, 0)$بێت.

24 نیوەتیرەی گۆیەك چەندە؟ ئەگەر رێژەی رووبەری بۆ چێوەکەی یەکسان بێت بەرێژەی 2.5 بۆ 1 یەکەی درێژی.

25 وێنەی سێگۆشەی ABC بکێشە کاتێك $A(1, -2)$ و$B(-2, -3)$ و$C(-2, 2)$ بێت.

أ وێنەی$A'B'C'$ بۆ سێگۆشەی نموونەی پێشوو بە گەورەکردنێك رێژەکەی$\frac{3}{2}$ بێت بکێشە.

ب بیسەلمێنە رێژەکانی $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{A'B'}$ و $\overleftrightarrow{BC} \parallel \overleftrightarrow{B'C'}$ و $\overleftrightarrow{AC} \parallel \overleftrightarrow{A'C'}$ یەکسانن بە بەکارهێنانی لاری.

26 سەرەکانی سێگۆشەیەك بریتیین لە$A(1, -2)$ و$B(-2, -3)$ و$C(-2, 2)$ سێگۆشەی$A'B'C'$بریتییە لە وێنەی سێگۆشەی ABC بەهاورێژەیەکی ئەندازەیی رێژەکەی$\frac{3}{2}$ بێت.

أ لەهەمان رووتەختی پۆوتاندا وێنەی دوو سێگۆشەیABCو$A'B'C'$بکێشە.

ب روونیبکەرەوە $\overleftrightarrow{A'B'} \parallel \overleftrightarrow{AB}$ و $\overleftrightarrow{A'C'} \parallel \overleftrightarrow{AC}$ و $\overleftrightarrow{B'C'} \parallel \overleftrightarrow{BC}$ یەکسانن بۆ پشتیوانیکردنی وەڵامەکەت لاری بەکاربێنە.

27 دوو وێستگەی سووتەمەنی لەسەر رێگایەکی خێران دووری نێوانیان 8 km بەهۆی تەواوبوونی سوتەمەنی ئۆتۆمبیلێك لەنێوان دوو وێستگەکەدا وەستا ئەگەری ئەوەی ئەو خاڵەی ئۆتۆمبیلەکەتییدا وەستاوە بەلایەنی کەمەوە دوورییەکەی لە 2 km کەمتر نەبێت لەهەردوو وێستگەکەوە چەندە؟ هێڵکارییەك بکێشە باسی ئەوە بکە چۆن وەڵامەکەت دۆزیەوە.

درێژە وەڵام

28 نەوزاد وسالار پێکەوە دەژین بریاریاندا لەگەڵ سامانی ئامۆزایاندا سەردانی ناوچەیەکی گەشتیاری بکەن. نەوزاد راستەوخۆ چوو بۆ ناوچە گەشتیاریەکە بەلام سالار چوو بۆ ماڵی ئامۆزاکەی تا لەگەڵ خۆی بیبات. سالار 90 km بەئاراستەی باکور $25°$- خۆرهەلات بۆ ماڵی سامان بری پاشان لەگەڵ کورەمامەکەیدا 50 km بەئاراستەی خۆرهەلات بری تا گەیشتە ناوچە گەشتیارەکە.

أ ئەو دوو ئاراستەبرە بەپێکنەرەکانییەوە بنووسە کە گەشتەکەی نەوزاد و سالار لە ماڵی خۆیانەوە بۆ ماڵی سامان وە لەماڵی سامانەوە بۆ ناوچە گەشتیاریەکە دەنوێنێت.

ب لاری ئەو ئاراستەبرەی گەشتەکەی سالار لە ماڵەکەیەوە بۆ ناوچەی گەشتیاریەکە دەنوێنێت چەندە؟ درێژییەکەی چەندە؟

ج نەوزاد و سالار لەهەمان کاتدا ماڵیان بەجێهێشت لەهەمان کاتدا گەیشتنە ناوچە گەشتیارییەکە نەوزاد بەخێراییەکی نەگۆڕ 50 km/hدەرۆیشت خێرایی سالار چەندبووە؟

بەشی 2

سیستمی هاوکێشەکان و لاسەنگە هێڵییەکان

Systems of Linear Equations and Inequalities

بەشی دووەم

وانەکان

دەنگت بەرزبکەوە

دەتوانیت سیستمەکانی هاوکێشە هێڵییەکان بەمەبەستی پلاندان بۆ کۆکردنەوەی پارەیەکی ئەوتۆ بۆ پارێزگاریکردن لەو باڵندانەی مەترسی لە ناوچوونیان هەیە بەکاربێنیت ئەویش لەڕێگای فرۆشتنی ساڵنامەوە کە وێنە جوانەکانی ئەو باڵندانەیان لەسەر بێت.

ئایا تۆ ئامادەیت؟

زاراوەکان

هەر زاراوەیەك بەپێی پێناسەکەی کە لەلای چەپدا هاتووە ببەستەوە.

1 هاوکێشە
2 لاسەنگە
3 کۆمەڵەی شیکار
4 لاری
5 خاڵە ڕوونکردنەوەییەکان

أ هاوکێشەی دوو نەزانراو، ئەو خاڵانەی شیکارەکە دەنوێنن ڕاستەهێڵێك پێکدێنن
ب لێژی ڕاستەهێڵ بریتییە لە ڕێژەی لای بەرامبەر بۆ بەردەمەکەی
ج نووسینی دوو بڕی جەبری کە یەکێك لە هێمایەکانی نایەکسانی پێکەوەیان دەبەستێتەوە
د نووسینی دوو بڕی جەبری کە هێمای یەکسانی پێکەوەیان دەبەستێتەوە
هـ کۆمەڵە بەهایەکن، هاوکێشەکە یان لاسەنگەکە پاسەدان دەکەن.
و کۆمەڵە خاڵێکن لە ڕووتەختی پۆتانەکاندا پەیوەندی لە نێوان دوو کۆمەڵە پێدراودا دەنوێنێت.

بچووکترین چەند جارەی هاوبەش

بۆ هەر جووتێك لەم ژمارانە بچووکترین چەند جارەی هاوبەش بدۆزەوە.

6 3 و 18   7 28 و 8   8 8 و 36   9 15 و 27

لارییەکانی ئەو ڕاستەهێڵانەی بەیەکتری تەریبن ولەسەر یەکتری ئەستوونن

ئەم دوو ڕاستەهێڵانە تەریبن یان ئەستوون یان پەیوەندیەکی ترە.

10 $\begin{cases} y = 5x - 4 \\ y = -\frac{1}{5}x - 4 \end{cases}$

11 $\begin{cases} 5x - 10y = 3 \\ y = \frac{1}{2}x - 6 \end{cases}$

12 $\begin{cases} x - y = 3 \\ x + y = -4 \end{cases}$

13 $\begin{cases} 2x - 3y = -4 \\ 3y - x = 5 \end{cases}$

هەژمارکردنی بەهاکانی بڕە جەبرییەکان بە لەجیاتیدانان.

بە دانانی بەهای هەر گۆڕاوێك بڕەکە هەژمار بکە

14 $1.5x + 3y$ ؛ $x = 8$ ، $y = 14$

15 $5x - \frac{3}{4}y$ ؛ $x = 6$ ، $y = -4$

16 $4x - \sqrt{2}y$ ؛ $x = 0.25$ ، $y = \sqrt{2}$

17 $-\frac{75x}{3y}$ ؛ $x = 1$ ، $y = \frac{1}{3}$

شیکارکردنی هاوکێشە فرە هەنگاوەکان

هەریەك لەم هاوکێشانە شیکاربکە.

18 $8x + 19 = -5$ 19 $5x + 4 = 25 - 2x$ 20 $9x - (x + 12) = -13$ 21 $-3(4x - 5) - 1 = 20$

شیکارکردنی ئەو هاوکێشانەی کەرتیان تێدایە

هەریەك لەم هاوکێشانە شیکاربکە.

22 $\frac{1}{4}x + \frac{2}{3}x = 8$ 23 $\frac{2}{5}x + \frac{1}{6} = -4$ 24 $x + \frac{1}{2} = -\frac{1}{5}$ 25 $-\frac{1}{2} = 3x - \frac{1}{3}x$

بەشی 2

ڕێبەری خوێندن: تێڕوانین لەسەر بەشەکە

لە ڕابردوودا

ئەمانەت خوویندووە

- نەخشە هێڵییەکانت بە ڕوونکردنەوەیی نواند.
- لاسەنگە هێڵییە یەك نەزانراوەکانت بە ڕوونکردنەوەیی شیکارکرد.
- سیستەمە هێڵییەکانی 2×2ت شیکارکرد.
- تەنە ئەندازەیییەکانی وەك شەشپاڵو و پوازکت خوێندووە.

لەم بەشەدا

ئەمانە فێردەبیت

- لاسەنگەی هێڵی بە دوو نەزانراو بە ڕوونکردنەوەیی شیکاربکەیت.
- سیستەمی لاسەنگە هێڵییەکان بەڕوونکردنەوەیی شیکاربکەیت .
- پرسیاری پرۆگرامی هێڵی شیکاربکەیت.
- سیستەمی هاوکێشە هێڵییەکانی 3×3شیکاربکەیت
- نموونە هێڵییەکان بۆ نواندنی کۆمەڵەی پێدراوەکان.
- پێوانە ئامارییەکان بۆ کۆمەڵەی پێدراوەکان
- بەشینەوە ئامارییە دووانییەکان

لە داهاتوودا

دەتوانیت کارامەییەکانی ئەم بەشە بەکاربێنیت بۆ

- شیکارکردنی سیستەمی ئەو هاوکێشانەی ئاڵۆزیان زۆرترە.
- تێگەیشتنی نموونە هێڵییەکان لە بابەتەکانی تردا، وەك: کیمیا و فیزیا و ئابووری.
- پلاندانی کردارەکان لە ژیانی ڕۆژانەدا، وەك کۆکردنەوەی پارە و ماڵ یان هەڵسان بەگشتوگوزار یان کەمکردنەوەی خەرجییەکان.

زاراوەکان — Vocabulary

زاراوەکان	Vocabulary
مەرج	Constraint
لابردن	Elimination
ناوچەی بەسوود (ناوچەی گونجاو)	Feasible region
پرۆگرامی هێڵی	Linear programming
سیستەمی هێڵی	Linear system
لەجیاتیدانان	Substitution
سیستەمی هاوکێشەکان	System of equations
سیستەمی لاسەنگە هێڵییەکان	System of linear inequalities
پەیوەستی	Correlation
ڕاستەهێڵی باشترین نواندن	Line of best fit
لێژبوونەوە (دابەزین)	Regrssion

دەروازەیەك لەسەر زاراوەکان

بۆ ئەوەی لەگەڵ هەندێك لەم زاراوانەدا رابێی کە لەم بەشەدا هاتووە ئەم هەنگاوانە پەیڕەوبکە:

1. وشەی گەڕانەوە واتای گەڕانەوە بۆ دواوەیە، چۆن واتای ئەم وشەیە بۆ تێگەیشتنی واتای **لێژبوونەوە** لە بیرکاریدا بەکاردێنیت؟
2. وشەی لابردن چی دەگەیەنێت؟ کاریگەری کرداری **لابردن** لە شیکارکردنی هاوکێشە بیرکارییەکاندا چییە؟
3. وشەی **مەرج** ئاماژەیە بۆ کورتکردنەوە یان دیاریکردنی سنووردارکردن، ڕۆڵی کورتکردنەوەکان لە بیرکاریدا چییە؟ بە نموونە ڕوونیبکەوە.
4. وشەی بەسوود مانای بوونی شتێکی بەسوود دەگەیەنێت، نموونە لە سەرەتای ڕستەدا بهێنەوە کە ئەم وشەی تێدابێت، دوای ئەوەی **گفتوگۆ** لەسەر ئەوەی کە ناوچەی بەسوود ئاماژەی بۆ دەکات دیاربکە.

بەشی
2

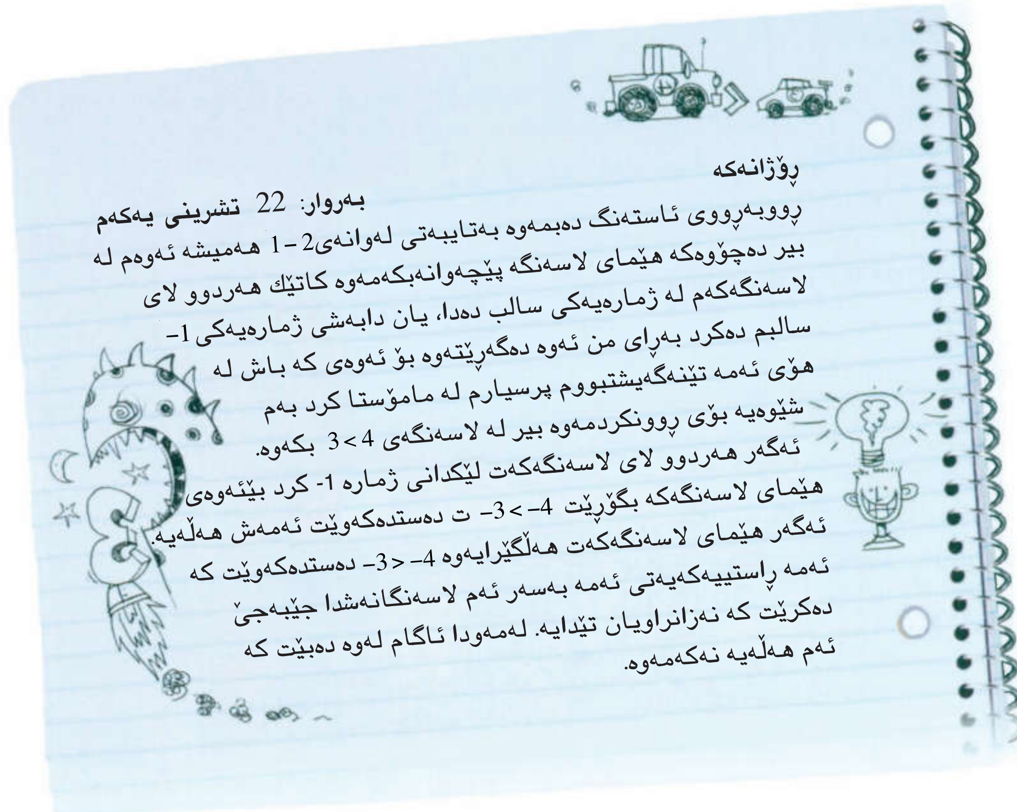
بیرکاری
بە خوێندنەوە و نووسین



ستراتیژیەتی وانە: نووسینی ڕۆژانەی بیرکاری

نووسینی ڕۆژانەی بیرکاری یارمەتیدەرە بۆ چاککردنی کارامەییەکانی نووسین و دەرەنجامهێنانی، کاتێك بە نووسین ڕۆژانەیەك دەردەبڕێت، بۆت دەردەکەوێت کە هەندێك بابەت هەیە لە بیرکاری باش نایزانی، یان بەلاتەوە شاراوەن دەتوانیت ئەو ڕۆژانەیە بۆ ڕەنگدانەوەی ئەو وانانەی لە بیرکاریدا فێریان بووی بەکاربێنیت. خاڵەکانی ئەو وانەیەی ئاستەنگت بۆ دروست دەکات، کورتکراوەی ئەو چەمك و زاراوانەیە، دەربڕینی ڕایەکەت پەیوەندی بەوانەکەوەیە و ئەوەی لەوەش گرنگترە لە ڕۆژانەی بیرکاریدا، ڕەنگدانەوەی لەسەر پێشکەوتنت لە فێربوونی بیرکاریدا دەبێت.

لاپەڕەیەك لە ڕۆژانەکانی خوێندکار: ئەم لاپەڕەیە لە خوارەوە هاتووە لە ڕۆژانەکانی خوێندکارێکە، بیخوێنەوە.



ڕۆژانەکە

بەروار: 22 تشرینی یەکەم

ڕووبەڕووی ئاستەنگ دەبمەوە بەتایبەتی لەوانەی 1-2 هەمیشە ئەوەم لە بیر دەچۆوەکە هێمای لاسەنگە پێچەوانەبکەمەوە کاتێك هەردوو لای لاسەنگەکەم لە ژمارەیەکی سالب دەدا، یان دابەشی ژمارەیەکی 1- سالبم دەکرد بەڕای من ئەوە دەگەڕێتەوە بۆ ئەوەی کە باش لە هۆی ئەمە تێنەگەیشتبووم پرسیارم لە مامۆستا کرد بەم شێوەیە بۆی ڕوونکردمەوە بیر لە لاسەنگەی $3 < 4$ بکەوە. ئەگەر هەردوو لای لاسەنگەکەت لێکدانی ژمارە 1- کرد بێئەوەی هێمای لاسەنگەکە بگۆڕێت $-3 < -4$ ت دەستدەکەوێت ئەمەش هەڵەیە. ئەگەر هێمای لاسەنگەکەت هەڵگێرایەوە $-3 > -4$ دەستدەکەوێت کە ئەمە ڕاستییەکەیەتی ئەمە بەسەر ئەم لاسەنگانەشدا جێبەجێ دەکرێت کە نەزانراویان تێدایە. لەمەودا ئاگام لەوە دەبێت کە ئەم هەڵەیە نەکەمەوە.

هەوڵبدە

بە نووسینی ڕۆژانەکانی بیرکاری دەستپێکە، ئەو بیرۆکانەی لە خوارەوە هاتوون بۆ نووسینی ڕۆژانەکانت بەکاربێنە، لەم هەفتەیەوە ڕۆژ دوای ڕۆژ ڕۆژانەکانت بنووسەوە، دڵنیابە لەنووسینی بەروار و لاپەرە و ژمارەکەی.

- ئەوەی لەوانەی ئەمڕۆ دەمزانی.
- ئەوەی نا دڵنیابوونم لە تێگەیشتنی وانەی ئەمڕۆ.
- بۆ کۆتایی پێهێنانی وانەی ئەمڕۆ پێویستم بەم کارامەییانەی خوارەوەیە.

(1) ئەو ئاستەنگانەی هاتوونەتە ڕێگام چین؟ چۆن دەتوانم بەسەریاندا زاڵبم؟

(2) چی لەوانەی ئەمڕۆ سەرەنجی ڕاکێشام؟ چیم بەلاوە پەسەند نەبوو؟

1-2

لاسەنگە هێڵییە دوو نەزانراوەکان
Linear inqualities in two unknowns



کێ ئەمە بەکاردەهێنێت؟

بەڕێوەبەرانی ناوەندەکانی شانۆ لاسەنگە هێڵییەکان بۆ دیاریکردنی ژمارەی بلیتەکانی چوونەژوورەوە کە بەنرخی جیاجیا دەیانفرۆشن بۆ دەستکەوتنی قازانج بەکاردێنن (نموونەی 3)

ئامانجەکان

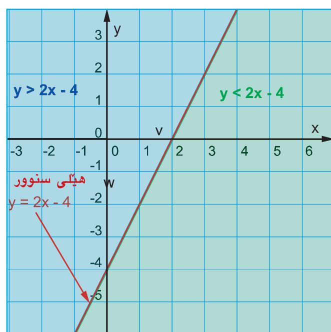
- شیکارکردنی لاسەنگەی هێڵی دوونەزانراو بەڕوونکردنەوەی
- پرسیارەکان بە بەکارهێنانی لاسەنگە هێڵییەکان کە دوو نەزانراویان تێدایە شیکاردەکات.

زاراوەکان
Vocabulary

لاسەنگە هێڵییەکان
Linear inequality

هێڵی سنوور
Boundary line

نەخشە هێڵییەکان بنچینەی لاسەنگە هێڵییە دوو نەزانراوەکان پێکدێنن. **لاسەنگەی هێڵی دوو نەزانراو** پەیوەندی نێوان دوو گۆڕاو دەردەبڕێت کە هێمایەک لە هێمایەکانی لاسەنگەی تێدایە وەک $y > 2x - 4$ کۆمەڵە شیکاری لاسەنگەی هێڵی دوو نەزانراو لە هەموو ئەو جووتە ڕێکخراوانەی(x, y) پێکدێن کە پاسادانی لاسەنگەکە دەکەن. و ئەو خاڵانەی شیکارە جیاجیاکانی لاسەنگە کە دەنوێنن بەشێکن لە ڕووتەختی پۆتانەکان ئەویش ڕاستەهێڵێکە و ڕووتەختەکە دەکات بە دوو بەشەوە بۆ نموونە ڕاستە هێڵی $y = 2x - 4$ ڕووتەختی پۆتانەکان دەکات بە دوو بەشەوە.



هەروەک لەوێنەی بەرامبەردا دیارە. پۆتانەکانی خاڵەکانی یەکێک لەبەشەکان پاسادانی لاسەنگەی $y > 2x - 4$ دەکات. لەهەمان کاتدا پۆتانەکانی خاڵەکانی بەشەکەی تر پاسادانی لاسەنگەی $y < 2x - 4$ دەکات. بەشی یەکەم کۆمەڵە شیکاری لاسەنگەی $y > 2x - 4$ بە ڕوونکردنەوەیی دەنوێنێت ئەویش ناوچەی شیکاری ئەم لاسەنگەیە. ڕاستەهێڵی $y = 2x - 4$ هێڵی سنووریی **ناوچەی شیکار** پێکدێنێت. وێنەی هێڵە سنوورییەکە بە خاڵخاڵ بکێشە. ئەویش مانای وایە خاڵەکان ناکەونە ناوچەی شیکارەوە.

بۆ شیکاری لاسەنگەی $y > 2x - 4$ هێڵی سنوور بەخاڵخاڵ بکێشە و ناوچەی سەرەوەی ڕەنگ بکە.

ڕۆشنایی

بیرت بێتەوە کە ئەو هێڵەی دەکەوێتە ژێر هەریەک لە دوو هێمای ⩾ و ⩽ نیشانەی ئەوەیە کە هێڵی سنوور هێڵێکی نەپساوەیە و خاڵخاڵ نییە.

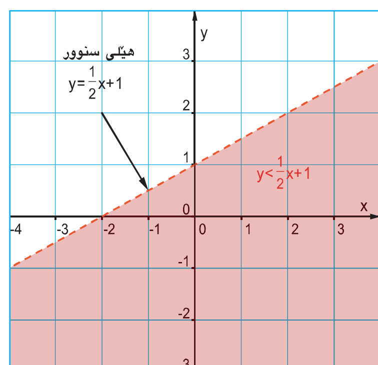
نموونە 1

شیکارکردنی لاسەنگە هێڵییەکانی دوو نەزانراو بە ڕوونکردنەوەیی.

بە ڕوونکردنەوەیی هەریەك لەم لاسەنگانە شیکاربکە.

أ $y < \frac{1}{2}x + 1$.

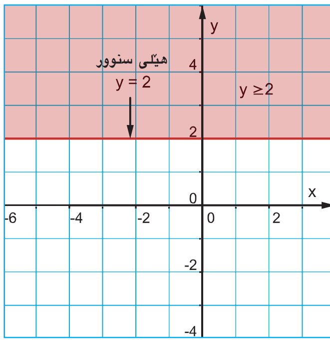
هێڵی سنوور بریتییە لە$y = \frac{1}{2}x + 1$ کە لارییەکەی $\frac{1}{2}$ و تەوەرەی y لە 1 دادەبڕێت.
هێڵی سنوور بە خاڵخاڵ بکێشە، چونکە ناکەوێتە ناوچەی شیکارەوە. ناوچەی ژێر هێڵەی سنوور ڕەنگ بکە.



ساغکردنەوە خاڵێك لە ناوچەی شیکار هەڵبژێرە، بۆ نموونە $(0,0)$ تاقیبکەوە، ئایا شیکاری لاسەنگەکە دەنوێنێت

$$y < \frac{1}{2}x + 1$$
$$0 \overset{?}{<} \frac{1}{2}0 + 1$$
$$0 \overset{?}{<} 1 \checkmark$$

لەبەر ئەوەی خاڵی تاقیکردنەوە پاسەدانی لاسەنگەکە دەکات ئەوا ناوچەڕەنگ کراوەکە شیکارە.



ب $y \geq 2$.

بیرت بێتەوە کە ڕاستەهێڵی $y=2$ ڕاستەهێڵێکی ئاسۆییە

هەنگاوی 1 ڕاستەهێڵێك بکێشە بەبەکارهێنانی هێڵێکی نەپساوە چونکە هێڵی سنوور بەشێکە لە ناوچەی شیکار.

هەنگاوی 2 ناوچەی سەروو هێڵی سنوور ڕەنگ بکە بۆ دیارکردنی خاڵەکان کاتێك $y > 2$.

ساغکردنەوە خاڵی $(0,4)$ دەکەوێتە ناوچەی شیکارەوە چونکە $4 \geq 2$ ،سەرەنج بدە هەر خاڵێك بکەوێتە سەرهێڵی سنوور یان سەرەوەی شیکاری لاسەنگەکە دەنوێنێت، بەهای x هەرچەندبێت.



1. هەر لاسەنگەیەك بە ڕوونکردنەوەیی شیکاربکە.

أ $y \geq 3x - 2$ **ب** $y < -3$

ئەگەر هاوکێشەی هێڵی سنوور بە شێوەی لاری – یەکتربڕین نەنوسرابوو، دەتوانیت خاڵێك هەڵبژێری نەکەوێتە سەر هێڵی سنوور بۆ دیاریکردنی هەر ناوچەیەك کەدەبێ ڕەنگی بکەیت. ئەگەر خاڵەکە پاسەدانی لاسەنگەکەی کرد، ئەو ناوچەیەی خاڵەکەی تێدەکەوێت ڕەنگی بکە، ئەگەر نا، ناوچەکەی تر ڕەنگ بکە.

نموونـــــه 2

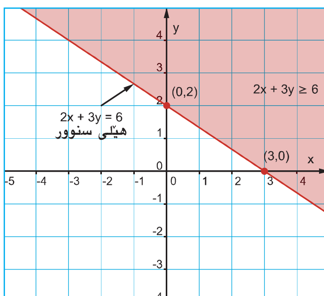
شیکارکردنی لاسەنگە هێڵییەکان بە دوو نەزانراو بە ڕوونکردنەوەیی بەبەکارهێنانی یەکتربڕینەکان لەگەڵ دوو تەوەرەی پۆوتانەکان.

لاسەنگەی $2x + 3y \geq 6$ بە بەکارهێنانی یەکتربڕینی لەگەڵ هەریەك لە دوو تەوەرەی پۆتانەکان شیکار بکە.

هەنگاوی 1 دوو یەکتربڕینەکان بدۆزەوە .

بۆ دۆزینەوەی یەکتربڕینی هێڵی سنوور لەگەڵ هەریەك لە دوو تەوەری پۆتانەکان، لە جیاتی x سفردا بنێ، پاشان لە جیاتی y سفر دابنێ

یەکتربڕین لەگەڵ تەوەری دووەم (ستوونی) y	یەکتربڕین لەگەڵ تەوەری یەکەم (ئاسۆیی) x
$2x + 3y = 6$	$2x + 3y = 6$
$2 \times 0 + 3y = 6$	$2x + 3 \times 0 = 6$
$3y = 6$	$2x = 6$
$y = 2$	$x = 3$



هەنگاوی 2 هێڵی سنووری بکێشە

هێڵی سنوور ئەو ڕاستەهێڵەیە بە دووخاڵی $(0,2)$ و $(3,0)$ دادەڕوات، ئەم ڕاستەهێڵە بە هێڵێکی نەپساو بکێشە، چونکە بەشێکە لە ناوچەی شیکار.

هەنگاوی 3 ئەم ناوچەیە دیاربکە کە پێویستە ڕەنگی بکەیت.

خاڵی$(0,0)$ لە لاسەنگەکەدا دابنێوە. لەبەر ئەوەی لاسەنگە $0 + 0 \geq 6$ هەڵەیە، واتە خاڵەکە ناکەوێتە ناوچەی شیکارەوە، بۆیە دەبێت ئەو ناوچەیەی دەکەوێتە سەرووی هێڵی سنوور ڕەنگ بکەیت.

ڕۆشنایی

$(0,0)$ وەك خاڵی تاقیکردنەوە بەکاربێنە، تەنها ئەو کاتەنەبێت کە دەکەوێتە سەر هێڵی سنوور.



2. **لاسەنگەی $3x - 4y > 12$ بەبەکارهێنانی دوو یەکتربڕەکانی (ئاسۆیی و ستوونی) بەڕوونکردنەوەی شیکاربکە.**

نموونـــــه 3 جێبەجێکردنی بازرگانی



لە شانۆگەریەکدا بلیتی چوونە ژوورەوەی گەورەکان بە 8000 دینارە و بلیتی منداڵان 5000 دینارە بەڕێوەبەری شانۆگەریەکە هەموو جارێ لەهەر ئاهەنگێکدا 240 000 دینار خەرجدەکات، دەبێ بەڕێوەبەر چەند بلیتی چوونە ژوورەوە لەهەرجۆرێك بفرۆشێت تا قازانج بکات؟ بەڕێوەبەرەکە 20 بلیتی منداڵانەی فرۆشت، دەبێت چەند بلیتی گەورەکان بفرۆشێت تا قازانج بکات؟

1 لە پرسیارەکە تێبگە

شیکارکردنی ئەم پرسیارە لە دوو بەش پێکدێت: 1 . نووسینی لاسەنگەکەو شیکارکردنی بەرونکردنەوەیی وەڵامی پرسیاری یەکەمە. 2 . دۆزینەوەی ژمارەی بلیتەکانی گەورەکان کە دەبێ بفرۆشرێن، کاتێك 20 بلیت لە بلیتی منداڵان فرۆشراوە.

پێدراوە گرنگەکان بنووسە:

- **دوو جۆرە بلیت هەیە**: بلیتی گەورەکان بە 8000 دینارە و بلیتی منداڵان بە 5000 دینارە.
- پێویستە نرخی بلیتە فرۆشراوەکان لە 240 000 دینار کەمتر نەبێت.

2 پلاندانێ

هێمای x بۆ ژمارەی بلیتی گەورەکان و y بۆ ژمارەی پلیتی منادلان بەکاربێنە، لاسەنگەیەك بنووسە پرسیارەکە بنوێنێت.

سەرجەم		ژمارەی پلیتەکانی منداڵان		نرخی بلیتی منداڵان		ژمارەی پلیتەکانی گەورەکان		نرخی بلیتی گەورەکان
240 000	$\geqslant$	y	$\times$	5000	+	x	$\times$	8000

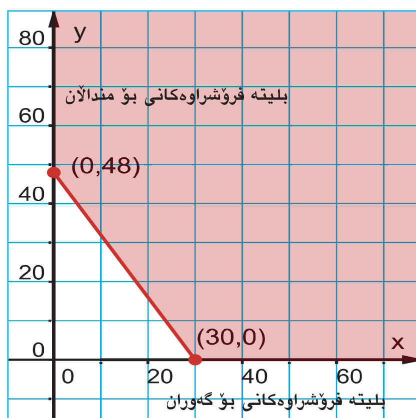
دەتوانین پرسیارەکە بە لاسەنگە $8000x + 5000y \geq 240\ 000$ یان $8x+5y \geqslant 240$ بنوینێن.

3 شیکاری بکە

یەکتر بڕینەکانی هێڵی سنوور لەگەڵ هەردووتەوەرەکان دیاربکە.

$8 \times 0 + 5y = 240$ $\quad$ $8x + 5 \times 0 = 240$

$y = 48$ $\quad$ $x = 30$



هێڵی سنوور بکێشە ئەو ڕاستەهێڵە کە بە دوو خاڵی $(0,48)$ و$(30,0)$ دا دەڕوات، ئەو ناوچەیەی هەموو ئەو خاڵانەی تێدایە دەکەوێتە چارەکی یەکەم و سەرووی هێڵی سنوور دەنوێنن ڕەنگ بکە، لەبەرئەوەی ژمارەی بلیتەکان سالب نییە.

ژمارەی بلیتەکانی منداڵان کە فرۆشراوە 20 ـە بۆیە:

$8x + 5 \times 20 \geq 240$ لەجیاتی دانان

$8x + 100 \geq 240$ سادەبکە

$8x \geq 140$ و لەدوایدا $x \geq 17{,}\overline{5}$ پێویستە ژمارەی بلیتەکان ژمارەی تەواوبن.

دەبێ ژمارەی بلیتەکانی فرۆشراو بۆ گەورەکان لە 18 کەمتر نەبێت.

4 ساغبکەوە

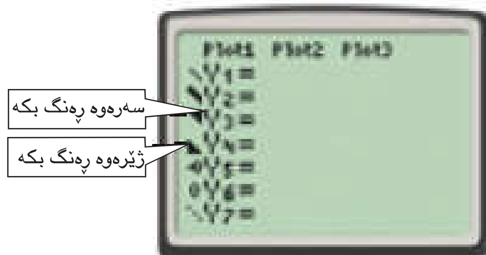
$18 \times 8000 + 20 \times 5000 = 244000$

ئاگاداربە!

بیرت نەچێتە هێمای هەر نەزانراوێك چیدەگەیەنێت



3. بەڕێوەبەری مەڵبەندی ڕۆشنبیری بڕیاریدا دوو جۆر دیاری بەسەر ئەندامەکانیدا دابەشبکات. نرخی هەردیارییەك لە جۆری یەکەم 125 000 دینارە و نرخەکەی لە جۆری دووەم 40 000 دینارە، بەڕێوەبەرەکە 1 500 000 دیناری لەبەردەستایە، چەند دیاری لە هەر جۆرێك دەتوانێت پێشکەش بکات؟ ئەگەر 4 دیاری لە جۆری یەکەم بێت، لە جۆری دووەم دەتوانێت چەند دیاری پێشکەش بکات؟



دەتوانیت بژمێری ڕوونکردنەوەیی بۆ شیکارکردنی لاسەنگەی هێڵی دوو نەزانراو بە ڕوونکردنەوەیی بەکاربێنیت. Y1 دابگرە، و بەهۆی دووگمەی جوڵان بۆ ئەو پەڕی لای چەپ بجولێت ENTER دابگرە لە لای چەپ جۆرێك لە جۆرەکانی و وێنە دەبینی. هەروەك لە وێنەکەدا ڕوونکراوەتەوە.

نموونـــــە 4

شیکارکردنی لاسەنگە هێڵییە دوو نەزانراوەکان بەڕوونکردنەوەیی بەبەکارهێنانی بژمێری ڕوونکردنەوەیی

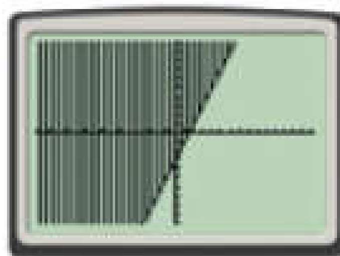
لەلاسەنگەی $2 < \frac{2}{3}(2x-y)$ بۆ y بە پێی x بنووسە ولاسەنگە دەستکەوتووەکە بە ڕوونکردنەوەی شیکاربکە.

$\frac{3}{2}\times 2 > \frac{3}{2}\times\frac{2}{3}(2x-y)$ هەردوو لا لێکدانی $\frac{3}{2}$ بکە

$2x - y < 3$ لە هەر لایەك دەربکە $2x$

$-y < -2x + 3$ هەردوو لای لێکدانی -1 بکە و

$y > 2x - 3$ هێمای لاسەنگەکە هەڵبگێڕەوە



Y1 دابگرە. 2x - 3 بنووسە، بە هۆی دوگمەی جوڵان بۆ لای چەپ بڕۆ. ENTER دابگرە وێنەیەك لەلای چەپ دەردەکەوێت GRAPH دابگرە وێنەی بەرامبەرت دەست دەکەوێت

(تێبینی: نموونەکە بەبێ بژمێری ڕوونکردنەوەیی شیکاری بکە).

ڕۆشنایی

بیرت بێتەوە کە لێکدانی لاسەنگە لە ژمارەی سالب. یان دابەشکردن بەسەریدا هێمای لاسەنگەکە هەڵدەگێڕێتەوە.



4. بەڕوونکردنەوەیی لاسەنگەی $2(3x-4y) > 24$ شیکاربکە بەبەکارهێنانی بژمێری ڕوونکردنەوەیی یان بە ڕێگای ئاسایی.

بیربکەوە و تاوتوێبکە

1. بەراوردبکە لە نێوان دووبازنەی داخراووکراوە. لە شیکاری لاسەنگەی هێڵی یەك نەزانراو بە ڕوونکردنەوەیی وە لە نێوان دوو هێڵی سنووری خاڵخاڵ و نەپساوە لە شیکاری لاسنگەی هێڵی دوو نەزانراو بە ڕوونکردنەوەیی بکە.
2. ناوچەی شیکار بۆ لاسەنگە $x \geq 4$ باس بکە.
3. ڕوونیبکەوە ئایا دەتوانیت خاڵی $(0, 0)$ وەك خاڵی تاقیکردنەوە بۆ دیاریکردنی ناوچەی پێویست بۆ ڕەنگکردن لە کاتی شیکاری لاسەنگە $3x + 5y \leq 0$ بەکار بێنیت.
4. ڕێکخەر بە خشتەکەی خوارەوە بنووسەوە و تەواوی بکە. لە هەر چوارچێوەیەك نموونەیەك لەسەر دوولاسەنگە بنووسە کە ناوچەی شیکاری لە سەرووی سنوورەکە باسکرابێ: یەکەمیان بە شێوەی ... $>y$ ، کاتێك > هێمایەك بێت لە هێماکانی بەراوردکردن، و دووەمیان لە شێوازێکی تری جیاوازدا بێت.



هێڵی سنووری خاڵخاڵ ڕەنگەکە لەسەر هێڵەکەیە	هێڵی سنووری خاڵخاڵ ڕەنگەکە لەژێر هێڵەکەیە	هێڵی سنووری نەپساو ڕەنگەکە لەسەر هێڵەکەیە	هێڵی سنووری نەپساو ڕەنگەکە لەژێر هێڵەکەیە

1-2 ڕاهێنانەکان

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

1 **زاراوەکان** ڕوونیبکەوە چۆن لە توانادایە ڕاستەهێڵی $y = 3x - 4$ ببێتە هێڵی سنوور.

پروانە نموونە 1

هەریەك لەم لاسەنگە بەڕوونکردنەوەی شیکاربکە.

2 $y > -4$ **3** $y \leq 2$ **4** $y \geq x - 3$ **5** $y < -\frac{1}{3}x + 2$

پروانە نموونە 2

هەریەك لەم لاسەنگانە بە بەکارهێنانی یەکتربڕینەکانی ئاسۆیی و ستوونی شیکار بکە.

6 $3x + 2y > 12$ **7** $5x - 2y \leq 20$ **8** $-4x + 5y < -20$

پروانە نموونە 3

9 **بەکاربردن** ڤیان 17 000 دیناری پێیە، دەیەوێت دووجۆر لە قاوەی نەهاڕاوە (دەنك) کە ئامادە کردنەکەی ئاسانە بکڕێت. دەنکۆڵەکانی جۆری یەکەم ڕەقن و نرخی هەر پاکەتێك 2290 دینارە و دەنکۆڵەکانی جۆری دووەم ناسکترن و نرخی هەرپاکەتێکی 3750 دینارە.

أ هێمای x بۆ جۆری یەکەم و y بۆ جۆری دووەم دابنێ. لاسەنگەیەك بنووسە پرسیارەکە بنوێنێت، و بەڕوونکردنەوەی شیکارییکە، بۆ دیاریکردنی ژمارەی ئەو پاکەتانەی کە ڤیان لە هەرجۆرێك بیان کڕێت.

ب چەند دانە لە جۆری یەکەم دەتوانێت بکڕێت ئەگەر بزانیت کە 3 پاکەتی لە جۆری دووەم کڕیوە؟

10 **خوێندنگاکان** خوێندکارانی پۆلی یانزەهەم دوو جۆر لە تابلۆ هونەریەکانیان دەفرۆشن بۆ کۆکردنەوەی بڕێك پارە لە 280 000 دینار کەمتر نەبێت، کاری یەکەمیان بڕی 1750 دینار قازانج دابیندەکات دەکات لەکاتێکدا کاری دووەمیان بڕی 1250 دینار قازانج دابیندەکات.

أ هێمای x بۆ کارەکانی جۆری یەکەم و هێمای y بۆ کارەکانی جۆری دووەم دابنێ، لاسەنگەیەك بنووسە پرسیارەکە بنوێنێت، و ڕوونکردنەوەیی شیکاری بکە بۆ دیارکردنی ژمارەی ئەو کارتانەی کە خوێندکارەکان پێویستە لەهەر جۆرێك بیفرۆشن.

ب خوێندکارەکان 100 کاریان لە جۆری دووەم و 50 کاریان لە جۆری یەکەم فرۆشت. ئایا خوێندکارەکان ئامانجەکەیان پێکاوە؟

پروانە نموونە 4

هەریەك لەم لاسەنگانە بەپێی y شیکار بکە پاشان بە ڕوونکردنەوەیی شیکارییکە.

11 $\frac{1}{2}(6x - 2y) \geq 4$ **12** $-\frac{3}{5}x + y \geq 2$ **13** $3(3x - y) > -12$

ڕاهێنان و شیکارکردنی پرسیارەکان

هەریەك لەم لاسەنگانە بە ڕوونکردنەوەیی شیکاربکە.

14 $y \geq 6$ **15** $y < x + 4$ **16** $y > -\frac{2}{5}x - 3$

هەریەك لەم لاسەنگانە بەبەکارهێنانی دوو یەکتربڕەکان ئاسۆیی و ستوونی شیکاربکە.

17 $4x + 2y \geq 8$ **18** $3x - 6y < 12$

ڕاهێنانی ئازاد

بۆ شیکاری ڕاهێنانەکان	سەیری نموونە بکە
16-14	1
18-17	2
21-19	3
24-22	4

19 **بازار** تێچوونی ڕیکلام لە ڕۆژنامەیەکی ناوخۆ لە ڕۆژێکدا 20 000 دینارە، و تێچوونی لە ئیستگەیەکی ناوخۆ لە هەر خولەکێکدا 50 000 دینارە، بوجەی تەرخانکراو بۆ ڕیکلام، لە یەکێك لە دامەزراوەکاندا یەك ملیۆن دینارە. هێمای نەزانراوی x بۆ ژمارەی ڕۆژانی ڕیکلام لە ڕۆژنامەکەدا و هێمای نەزانراوی y بۆ ژمارەی خولەکانی ڕیکلام لە ئیستگەکەدا دابنێ. لاسەنگەیەکی هێڵی بۆ نواندنی پرسیارەکە بنووسە، پاشان لاسەنگەکە بەڕوونکردنەوەیی شیکاربکە.

20 **گەردوون** ئەو ڕۆکێتەی شاخی هەستیار بۆ مەریخ هەڵدەگرێت پێویستی بە ئۆکسجینە بۆ ئەوەی لە هێزی کێشکردن دەربچێت، وای دابنێ ئەو شاخە هەستیارە 0.78L لە ئۆکسجین بۆ هەر کیلۆگرامێك لە ئاو، و 0.32Lلە ئۆکسجین بۆ هەر کیلۆگرامێك لە دووەم ئۆکسیدی کاربۆن بەرهەمدێنێت، بەلایەنیکەمەوە شاخە هەستیارەکە پێویستی بە$56L$ ئۆکسجینە. هێمای نەزانراوی x بۆ ژمارەی کیلۆگرامە ئاوەکان و نەزانراوی y بۆ ژمارەی کیلۆ گرامەکانی دووەم ئۆکسیدی کاربۆن کە لەبەردەستایە دابنێ.

أ لاسەنگەیەکی هێڵی بنووسە پرسیارەکە بنوێنێت، و لاسەنگەکە بە ڕوونکردنەوەی شیکاریبکە.

ب شاخە هەستیارەکە $36kg$ لە ئاو $88kg$ دووەم ئۆکسیدی کاربۆنی کۆ کردەوە. ئایا بەم کارە گەشتە کە دەکرێت؟



21 **مۆبایل** مەریوان دوو جۆر لە کارتی تەلەفۆن، کارتی 8000 دیناری و کارتی 12 000 دیناری دەفرۆشێت. ئەو کارتانەی لایەتی بەهاکەی 200 000 دینارە.
هێمای x بۆ ژمارەی کارتەکانی جۆری یەکەم وهێمای y بۆ ژمارەی کارتەکانی جۆری دووەم دابنێ.

أ لاسەنگەیەکی هێڵی بنووسە پرسیارەکە بنوێنێت، پاشان لاسەنگەکە بەڕوونکردنەوەیی شیکاربکە.

ب مەریوان 10کارتی لە جۆری 8000 دیناری فرۆشت، چەند کارت لەجۆری دووەم دەتوانێت بفرۆشێت.

x بە پێی y هەژماربکە، پاشان لاسەنگەکە بەڕوونکردنەوەی شیکاربکە.

22 $-4y<4(3x-5)$ **23** $-3(-10x+2y)\geq 24$ **24** $-\frac{1}{3}x+\frac{1}{5}y\leq -1$

هەر یەك لەم لاسەنگەکە بە ڕوونکردنەوەی شیکاربکە.

25 $-4y>10x-20$ **26** $y-5\geq 4(x-2)$ **27** $6x+3y<0$

28 $y+\frac{3}{4}\leq \frac{5}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)$ **29** $\frac{9-3y}{2}\geq 6x$ **30** $x\leq 4$

31 $4x-5y<7x-3y$ **32** $2x-5y\leq -4x+15$ **33** $x>-2$

34 **خوێندنگاکان** یانەی بیرکاری لە ئامادەیی کوردستان ئاهەنگێکی گۆرانی سازکرد بۆ کۆکردنەوەی کەمترنەبێت لە بڕی 600 000 دینار، بۆ ئەوەی کۆمپیوتەرێکی بۆ یانەکە پێ بکرێت. سەرۆکی یانەکە بڕیاریدا، نرخی بلیتی چوونە ژوورەوە 5000 دینار بێت ئەگەر ڕۆژێك پێش ئاهەنگەکە کرابێت و 6000 دینار بێت ئەگەر لەبەر دەرگا کرابێت.

أ هێمای x بۆ ژمارەی بلیتە فرۆشراوەکانی ڕۆژی پێش ئاهەنگە کەو، y بۆ ژمارەی بلیتە فرۆشراوەکانی بەردەرگا دابنێ. لاسەنگەیەکی هێڵی بنووسە پرسیارەکە بنوێنێت. پاشان ئەو لاسەنگەیە بە ڕوونکردنەوەی شیکاربکە.

ب ئەگەر ژمارەی بلیتە فرۆشراوەکانی پێش ئاهانگەکە 30 بلیت بێت، چەند بلیت پێویستە لە بەردەرگا بفرۆشرێت تا یانەکە ئامانجەکەی بێتەدی؟

35 **پیتاك (كۆكردنەوەی پارە)** خوێندكارانی پۆلی یازدەهەم لەكاتی یاری تۆپی سبەتەدا كولێرەی پیتزا و ساردی دەفرۆشن بۆ ئەوەی بڕێك پارە كۆبكەنەوە لە 150 000 دینار كەمتر نەبێت، ئەویش بۆ كڕینی دیاریەكی جوان تابە بۆنەی كۆتایی ساڵەوە پێشكەشی مامۆستای بیركاریان بكەن. لە فرۆشتنی هەر كولێرەیەكی پیتزا 1250 دینار و لە هەر قووتویەكی ساردی 500 دیناریان قازانج كرد.

أ هێمای x بۆ ژمارەی كولێرە و پیتزاكان و y بۆ ژمارەی قووتووە ساردیەكان دابنێ. لاسەنگەیەكی هێڵی بنووسە پرسیارەكە بنوێنێت.

ب خوێندكارەكان 75 كولێرە پیتزا و 150 قووتو ساردیان فرۆشت. ئایا دەتوانن دیاریەكە بكڕن؟

36 **بیركردنەوەی ڕەخنەگرانە** بلیتی چوونە ژووری باخچەی ئاژەڵان بۆ گەورە بە 5000 دینار و بۆ منداڵان بە 2000 دینارە، نرخی بلیتە فرۆشراوەكان لە یەكێك لە ڕۆژەكانی هەفتەدا لە 300 000 دینار پتر بوو، بۆ نواندنی پرسیارەكە و شیكاركردنی بە ڕوونكردنەوەی، هەریەك لە دڵشاد و كاوە لاسەنگەیەكی هێڵیان نووسی، دڵشاد هێمای x ی بۆ ژمارەی بلیتەكانی گەورەكان دانا، كەچی كاوە هێمای x ی بۆ ژمارەی بلیتەكانی منداڵان دانا. ئایا دوو وێنەی ڕوونكردنەوەییەكەی دوو خوێندكارەكە دروستیان كردوون لە چیدا جیاوازن؟ ئایا یەكێكیان هەڵەی كردووە؟ ئەگەر وەڵامەكەت بەڵێ یە، كامەیانە؟

37 پاپۆڕێك 500 میلی دەریای لە بەندەرێكەوە دوورە. پاپۆڕەكە بە خێرایی یەك لە 27 گرێ (یان میلێكی دەریای لە كاتژمێركدا، میلێكی دەریایی 1852 مەترە) كەمترنەبێت كەوتەڕێ.

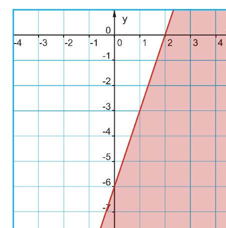
أ پاپۆڕەكە چەند كاتی پێویستە تا دەگاتە بەندەرەكە؟

ب وێنەیەكی ڕوونكردنەوەی بكێشە كە تیایدا گۆڕانی دووری نێوان پاپۆڕ و بەندەرەكەی بە تێپەڕبوونی كات ڕوونكرابێتەوە. ئەو خاڵانەیی دەكەوێتە سەر هێڵی سنوور چی دەنوێنێت؟

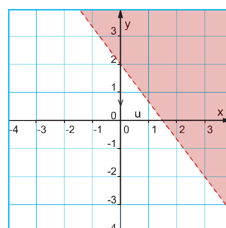
ج **چی دەبێت ئەگەر ...** وای دابنێ خێرایی پاپۆڕەكە لەماوەی گەشتەكەدا لە 10 گرێ كەمتر نەبێت. دووری پاپۆڕەكە لە بەندەرەكەوە دوای تێپەڕبوونی 12 كاتژمێر لە دەرچوونی چەندە؟

لاسەنگەیەكی هێڵی دوونەزانراو بنووسە. بەمەرجێك وێنە ڕوونكردنەوەییەكەی شیكارەكە بنوێنێت.

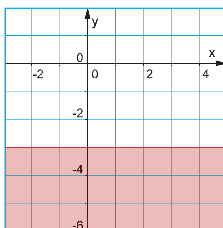
38



39



40



41 **بیركردنەوەی ڕەخنەگرانە** بەراوردی لەنێوان شیكاری ڕوونكردنەوەیی بۆ لاسەنگەی $x + 90 > 30y$ و شیكاری ڕوونكردنەوەیی بۆ لاسەنگەی $90 > 30y + x$ بكە لەچیدا هاوشێوەن و لەچیدا جیاوازن؟

42 **ماڵداری** دڵسۆز بادەم و مێوژ بۆ دروستكردنی تێكەڵەیەكی پڕ لە ڕیشاڵ بەكاردێنێت، هەر گرامێك لەبادەم $0.115g$ ڕیشاڵی و هەر گرامێك لە مێوژ $0.095g$ ی تێدایە. دڵسۆز دەیەوێت تێكەڵەیەكی $5g$ ی لە ڕیشاڵ بەلایەنی كەمەوە دروستبكات.



أ هێمای x بۆ ژمارەی گرامەكانی بادەم، و y بۆ ژمارەی گرامەكانی مێووژ دابنێ. لاسەنگەیەكی هێڵی بۆ نواندنی پرسیارەكە بنووسە، پاشان لاسەنگەكە بەڕوونكردنەوەی شیكاربكە.

ب ئەگەر دڵسۆز$15g$بادەم بەکاربێنێت پێویستە چەند گرام لە مێوژ بەکاربێنێت بۆ ئەوەی ئامانجەکەی بێتەدی؟

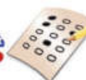
ج **چی دەبێت ئەگەر...** وا دابنێ دڵسۆز $60g$ بادامی بەکارهێنا. لە لاسەنگەکەدا چی لەبارەی بەهای y دەسدەکەوێت؟ لەم پرسیارەدا ئەمە چی دەگەیەنێت؟

43 یانەی هاوکاری ئێوارە ئاهەنگێکی ساڵانەی لە هۆڵی ئاهەنگەکان ڕێکخست، بەڕازاندنەوەی چەند مێزێکی بازنەیی و ئەوانی تریان لاکێشەیی بن. لە توانادایە 8 کورسی لە دەوری هەرمێزێکی بازنەی و 6 کورسی لە دەوری مێزیکی لاکێشەی دابنرێت.
هێمای x بۆ ژمارەی مێزە بازنەییەکان و y بۆ ژمارەی مێزە لاکێشەییەکان دابنێ.

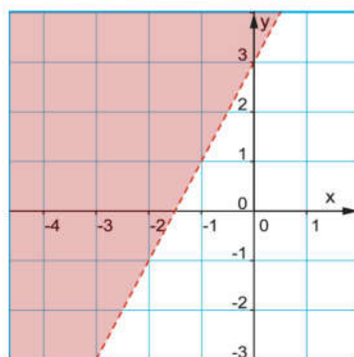
أ لاسەنگەیەکی هێڵی بۆ نواندنی پرسیارەکە بنووسە، ئەگەر ژمارەی کورسییە داوا کراوەکان لە 220 کورسی کەمتر نەبێت، پاشان ئەم لاسەنگەیە ڕوونکردنەوەیی شیکاربکە.

ب بارودۆخی هێمنی وا دەخوازێت کە ژمارەی کورسییەکان لە 300 کورسی زیـاتر نەبێت. لاسەنگەیەك بۆ نواندنی ئەو مەرجە بنووسە و لە دوایدا بە ڕوونکردنەوەیی شیکاربکە.

ج بەراورد لە نێوان دوو وێنە ڕوونکردنەوەکانیاندا بکە. لە چیدا جیاوازن؟



ئامادەکردن بۆ تاقیکردنەوە



44 کام لاسەنگە وێنەی ڕوونکردنەوەی بەرامبەر دەنوێنێت؟

أ $y<2x+3$　　ج $y\geq 2x+3$

ب $4x-2y<-6$　　د $4x+2y>6$

45 کام خاڵ ناکەوێتە ناوچەی شیکاری لاسەنگەی $5x-3y<30$

أ $(0,0)$　　ج $(-5,3)$

ب $(3,-5)$　　د $(-3,5)$

46 کام لاسەنگە هاوتای لاسەنگە $7x-3y\geq 4$ دەبێت؟ (واتا هەمان ناوچە شیکاریان هەبێت).

أ $y\leq \frac{7}{3}x-\frac{4}{3}$　　ج $y\geq -\frac{7}{3}x-\frac{4}{3}$

ب $y\leq -\frac{7}{3}x+\frac{4}{3}$　　د $y\geq \frac{7}{3}x+\frac{4}{3}$

47 کام دوو خاڵ خاڵی یەکتربڕینی ئاسۆیی و ستوونی هێڵی سنووری لاسەنگە $y\leq 3x-9$ دەنوێنێت؟

أ $(0,9)$ و $(3,0)$　　ج $(0,9)$ و $(-3,0)$

ب $(0,3)$ و $(-9,0)$　　د $(0,-9)$ و $(3,0)$

48 بۆ وەستاندنی ئۆتۆمبێل لە شوێنی تایبەت بۆ ماوەی 8 خولەك پێویستی بە 250 دیناری و بۆ ماوەی 20 خولەك. پێویستی بە 500 دیناری هەیە. زۆرترین ماوە بۆ وەستاندنی ئۆتۆمبێل 3 کاتژمێرە. شوان ئۆتۆمبێلەکەی وە ستاندوە سەیری کرد ژمێرکاری و یستگەکە 37 خولەك بە خۆڕاییە. دەبێ چەند جۆر لە دوو پارچە پارەکە بەکاربێنێت بۆ وەستاندنی ئۆتۆمبێلەکە بۆ ماوەی 3 کاتژمێر؟

أ 3 پارچەی 250 دیناری و 9 پارچەی 500 دیناری.

ب 13 پارچەی 250 دیناری و دوو پارچەی 500 دیناری.

ج 8 پارچەی 250 دیناری و 4 پارچەی 500 دیناری.

د 5 پارچەی 250 دیناری و 5 پارچەی 500 دیناری.

49 **کورتە وەڵام** بارێك باسبکە لاسەنگە هێڵیەکانی تێدابێت، و تیایدا بەها سالبەکان بۆ نەزانراوی x یان نەزانراوی y مانای هەبێت.

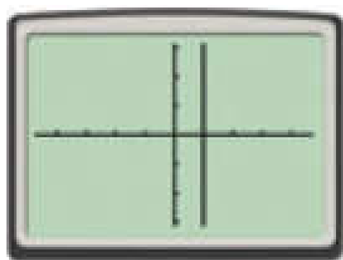
بەرەنگاری و فراوانکردن

بەڕوونکردنەوەی هەریەك لەم لاسەنگانە شیکاربکە.

50 $4(4x-3y)<5(2+3x)-10y$

51 $\frac{4+3y-2x}{6} \geq \frac{3x-2-3y}{-4}$

52 **چی دەبێت ئەگەر ...** وایدابنێ لاسەنگەیەکی هێڵیت بەبەکارهێنانی بژمێری ڕوونکردنەوەیی شیکارکردووە. شاشەیەکی تەواو سێبەرت دەسکەووتووە، ئەمە لەبارەی لاسەنگەکەوە چی دەنوێنێت؟ چی دەکەیت بۆ ڕوونکردنەوەی ناوچەی شیکار؟



53 دوای دروستکردنی ڕوونکردنەوەی ڕاستەهێڵی $y=500(x-1)$ بە بەکارهێنانی پەنچەرەیZdecimal وێنەی بەرامبەر لە شاشەی بژمێرە ڕوونکردنەوەیەکە دەردەکەوێت.

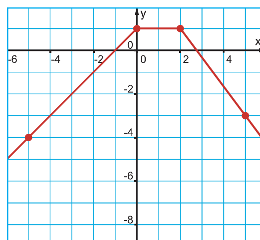
أ ئایا ڕاستە هێڵەکە لە ڕاستیدا ئەستوونە؟ ڕوونیبکەرەوە.

ب کام لایەی ڕاستەهێڵەکە ڕەنگ دەکرێت بۆ ئەوەی بە ڕوونکردنەوەی لاسەنگەی $y \leq 500(x-1)$ شیکار بکەیت، بەڵگەی وەڵامەکەت دیاربکە.

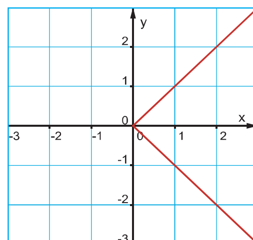
پێداچوونەوەی لولپێچی

تاقیکردنەوەی ڕاستەهێڵی ستوونی بەکاربێنە بۆ بڕیاردان لەسەر ئەوەی ڕوونکردنەوەکە نەخشە دەنوێنێت یان نا. (پۆلەکانی پێشوو)

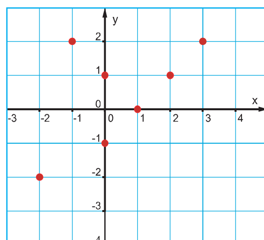
54



55



56



پۆتانی وێنەی خاڵی$(-4,3)$ بەهەموو جێگۆڕکێکانی خوارەوە بنووسە.

57 ڕاکێشانی ئاسۆیی یەك یەکە بۆ لای چەپ.

58 وێنەدانەوە لە دەوری تەوەرەی دووەم.

59 ڕاکێشانی ستوونی 3 یەکە بۆ سەرەوە.

60 $(x+7, y-5)$

شێوەی لاری – یەکتربڕین هاوکێشەی ئەو ڕاستەهێڵە بنووسە کە بەخاڵی $(1,-7)$ دا دەڕوات و.

61 بەخاڵی$(1,3)$ دا دەڕوات.

62 بە ڕاستەهێڵ $y=\frac{1}{2}x-5$ تەریبە.

63 لارییەکەی دەکاتە 0.25

64 لەگەڵ ڕاستەهێڵ $3x-y=-4$ ئەستوون دەبێت.

2-2 مۆدیلە هێڵییەکان

Linear models



ئامانجەکان

- دۆزینەوەی نموونەی هێڵی بۆ نواندنی پێدراوەکان بە بەکارهێنانی تەکنەلۆجیا یان بەبێ بەکارهێنانی
- سامپڵە هێڵییەکان بۆ ئەنجامدانای پێشبینییەکان

زاراوەکان Vocabulary

لێژبوونەوە
Regression

پەیوەستبوون
Correlation

هێڵی زۆرترین نواندن
Line of best fit

هاوکۆڵکەی پەیوەست
Correlation coefficient

کێ ئەمە بەکاردەهێنێت؟

زاناکانی ڕەگەزە مرۆییەکان نموونە هێڵی بۆ خەملاندنی درێژییەکانی تاکەکانی گەلانی دێرین بەکاردێنن، ئەویش بە هۆی ئەو پەیکەرە ئێسکیانەی دەیاندۆزنەوە.

بە زۆری زانایانی ڕەگەزە مرۆییەکان گرنگی بەو پەیوەندییانە دەدەن کە دووجۆر پێوانە بەیەکەوە دەبەستێت، ئامارکارەکان لە توێژینەوە و ئامارەکانیاندا و لە پەیوەندی نێوان دوو گۆڕاودا، بە لێژبوونەوە **Regression** ناوی دەبەن.

خاڵە ڕوونکردنەوەییەکان Scatter plot بۆ هەوڵدان لە تێگەیشتن و شێوەی پەیوەندی نێوان دوو گۆڕاو و ئاڕاستەیان و مەودای هێزیان بەکاردێنن.

پەیوەست بوون **Correlation** بریتییە لە هێزی پەیوەندی هێڵی نێوان دوو گۆڕاو و ئاڕاستەکەیان.



ئەگەر دوو گۆڕاو بە پەیوەندییەکی هێڵی بەهێز پێکەوە بەسترابنەوە، دەگونجێت بۆ ئەنجامدانی پێشبینییەکان ڕاستەهێڵی باشترین نواندن **Line of best fit** بەکاربێنێت.

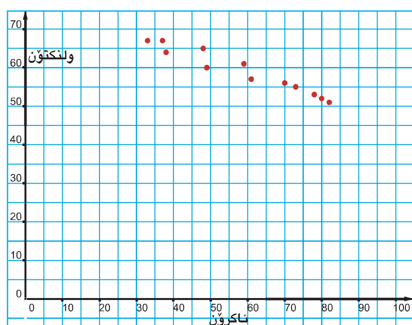
نموونـــە 1

جێبەجێکردن لەسەر زەپۆش (الاحوال الجوية)

شاری ئاکرۆن لە ئەمریکا و شاری لنکتۆن لە نیوزلەندا دەکەونە سەر هەمان دووری لە هێڵی یەکسان (خط الإستواء)؛ یەکەمیان لە نیوەی باکوری گۆی زەوی، و دووەمیان لە نیوەی باشووری. ئەم خشتەیەی خوارەوە ناوەندە ژمێری پلەی گەرما لە دوو شاری ناوبراودا لە ماوەی 12 مانگدا دەنوێنێت. خاڵە ڕوونکردنەوەییەکان بۆ نواندنی پێدراوەکانی خشتەکە دابنێ، پەیوەستبوونی نێوان ئەو دوو کۆمەڵە پێدراوە دیاریبکە، ڕاستە هێڵی باشترین نواندن بکێشە و هاوکێشەکەی بدۆزەوە.

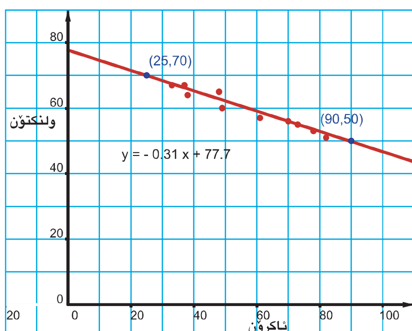
ناوەندە ژمێریارییەکانی بەرزترین پلەکانی گەرما (بە پلەی فەرنهایت)

مانگ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
ئاکرۆن	33	37	48	59	70	78	82	80	73	61	49	38
ولنگتۆن	67	67	65	61	56	53	51	52	55	57	60	64



هەنگاوی 1 پێدراوەکانی خشتەکە بە خاڵە ڕوونکراوەییەکان بنوێنە.

هەنگاوی 2 بەدوای پەیوەستی دا بگەڕێ. سەرنج لەبوونی پەیوەست بوونی سالب لە نێوان دوو کۆمەڵە پێدراوەکەدا بدە. کاتێك پلەی گەرما لە ئاکرۆن بەرزبێتەوە لە ولنکتۆن نزمدەبێتەوە.



هەنگاوی 3 ڕاستەهێڵی باشترین نواندن بکێشە ڕاستەهێڵێك خاڵەکان بەیەکسانی لە سەرەوە و خوارەوە دابەشبکات.

هەنگاوی 4 دووخاڵ بدۆزەوە کەوتبێتە سەر ئەو ڕاستەهێڵە، دەتوانیت دوو خاڵی $(25,70)$ و $(90,50)$ هەڵبژێریت.

هەنگاوی 5 لاری ئەو ڕاستەهێڵە بدۆزەوە

$$m=\frac{70-50}{25-90}=\frac{20}{-65}\approx-0.31$$

$$y-y_1=m\left(x-x_1\right)$$

$$y-70=-0.31(x-25)$$

$$y=-0.31x+77.7$$

هاوکێشەی نموونەی هێڵی بۆ پەیوەستبوونی نێوان ئەو دوو کۆمەڵە پێدراوە بریتییە لە $y=-0.31x+77.7$



1. **تۆپی سەبەتە** بۆ نواندنی پێدراوەکانی خشتەکە خاڵە ڕوونکردنەوەییەکان دابنێ. پەیوەستی نێوان ئەو دوو کۆمەڵە پێدراوە دیاریبکە ڕاستەهێڵی باشترین نواندن بکێشە و هاوکێشەکەی بدۆزەوە.

ئەنجامەکانی دە یاری										
ماوە (m)	28	35	8	20	39	23	19	27	15	30
خاڵەکان	16	13	2	12	31	10	9	15	4	19

هاوکۆڵکەی پەیوەست Correlation coefficient بریتییە لە ژمارە r کە مەودای ووردبینی نواندنی نموونەی هێڵی کۆمەڵە پێدراوەکان دەپێوێت.



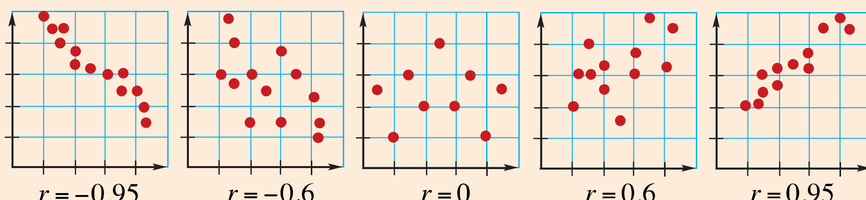
سیفەتەکانی هاوکۆڵکەی پەیوەست

هاوکۆلکەی پەیوەست ژمارەیەکە سەر بەماوەی $[-1,1]$ دەبێت، واتە $-1\le r\le 1$

ئەگەر $r=1$ ، ئەوا ئەو خاڵە ڕوونکردنەوەییانەی کۆمەڵەی پێدراوەکان دەنوێنێت، ڕاستەهێڵێکی لاری موجەب دروستدەکات.

ئەگەر $r=0$، ئەوا هیچ پەیوەستێك لە نێوان دوو گۆڕاوەکەدا نییە.

ئەگەر $r=-1$ ئەوا ئەو خاڵە ڕوونکردنەوەییانە کۆمەڵەی پێدراوەکان دەنوێنێت ڕاستەهێڵێکی لاری سالب دروستدەکات.



$r=-0.95$ $r=-0.6$ $r=0$ $r=0.6$ $r=0.95$

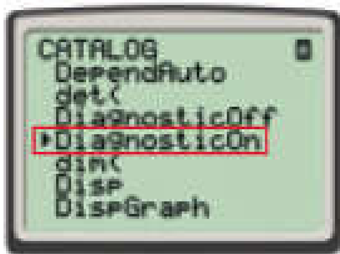
ڕۆشنایی

هەوڵبدە با ژمارەی ئەو خاڵانەی دەکەونە سەر ڕاستەهێڵی باشترین نواندن یەکسان بێتبە ژمارەی ئەوانەی دەکەونە ژێرەوە.

ئاگاداربە!

لاری و بەهای r تێکەڵ مەکە، دەگونجێت لاری ڕاستەهێڵ 10 یان $\frac{1}{10}$ بێت دەگونجێت لە کاتێکدا $r=1$ لاری و بەهای r هەمان نیشانەیان هەبێت.

دەتوانیت بۆ دۆزینەوەی ڕاستەهێڵی باشترین نواندن و دۆزینەوەی هاوکۆڵکەی پەیوەست بژمێری ڕوونکردنەوەی بەکاربێنیت. بۆ ئەوەی هاوکۆڵکەی پەیوەستت دەستدەکەوێت پێویستە بژمێرەکە لە باری ناساندنەوەدا دابنێی، بۆ گەیشتن بەم بارە، 2nd دابگرە پاشان CATALOG 0 ئینجا **DiagnosticOn** هەڵبژێرە.



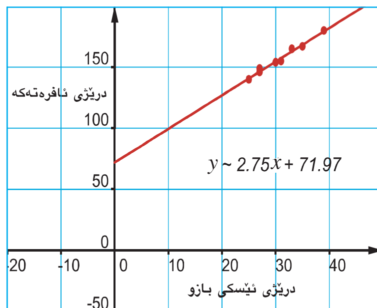
نموونــــە 2 جێبەجێکردن لەسەر زانستی ڕەگەزە مرۆییەکان

زانایانی ڕەگەزە مرۆییەکان درێژی ئێسکی بازوو کە شان بە ئەنیشکەوە دەبەستێتەوە بەکاردێنن لە ئافرەتدا بۆ دیاریکردنی درێژییەکەی. خشتەکەی خوارەوە هەندێك نموونە دەردەخات



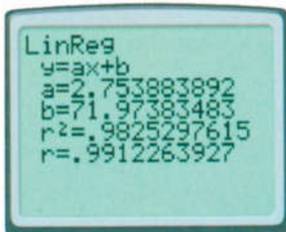
درێژی ئێسکی بازوو لە ئافرەتدا								
درێژی ئێسکی بازوو (cm)	35	27	30	33	25	39	27	31
درێژی ئافرەتەکە (cm)	167	146	154	165	140	180	149	155

أ خاڵە ڕوونکردنەوەییەکان بۆ نواندنی پێدراوەکانی خشتەکە دابنێ، ئێسکی بازوو وەك گۆڕاوی ئازاد (متغیر حرّ) بەکاربێنە.



ب هاوکۆڵکەی پەیوەستی و هاوکێشەی ڕاستە هێڵی باشترین نواندن بدۆزەوە، بە پێی پێدراوەکانی پرسیارەکە لاری ئەو ڕاستەهێڵە چی دەگەیەنێت؟

بژمێری ڕوونکردنەوەیی بەکاربێنە، پێدراوەکانی درێژی ئێسکی بازوو لە لیستی $L1$ دا دابەزێنە، پاشان پێدراوەکانی درێژی ژنەکە لە لیستی $L2$ دابەزێنە. سیفەتی لێژبوونەوەی هێڵی لە بژمێردا بەکاربێنە بەداگرتنی STAT ئینجا بۆ **CALC** لە دوای دا **4:LinReg** هەڵدەبژێری، بژمێرەکە هاوکێشەی $y = 2.75x + 71.97$ دەداتێ



لاری ڕاستەهێڵی باشترین نواندن بریتی دەبێت لە 2.75 بە نزیکەی، ئەو لاریەش ئەمەی خوارەوە دەگەیەنێت: هەر زیادەیەك برەکەی $1cm$ لە درێژی ئێسکی بازوو بەرامبەر دەبێت بە $2.75cm$ لە درێژی ژنەکە. هەروەها بژمێرەکە هاوکۆڵکەی پەیوەستت دەداتێ، کە بریتییە لە $r = 0.991$ بەنزیکەی، ئەمەش ئاماژەیە بۆ پەیوەستی موجەبی بە هێز.

ج لە گۆڕێکی بە کۆمەڵی کوردە ئەنفال کراوەکانی عێراقدا، زانایەکی ڕەگەزە مرۆییەکان ئێسکێکی بازووی دۆزیەوە درێژیەکەی **$32cm$**. درێژی خاوەنەکەی بەچەند دەخەمڵێنرێت؟

هاوکێشەی زۆرترین نواندن ڕێگە بە خەملاندنی درێژی خاوەن ئێسکەکە دەدات.

$$y = 2.75x + 71.97$$

$$y = 2.75 \times 32 + 71.97$$

$$y = 159.97$$

درێژی ئەو ئافرەتە $160cm$ بەنزیکەیی

ڕۆشنایی

بۆ دابەزاندنی پێدراوەکان بۆ بژمێری ڕوونکردنەوەیی Stat دابگرە و 1:Edit هەڵبژێرە بەهایەکانی x لە ستونی $L1$ بەهایەکانی y لەستوونی $L2$ دا دابەزێنە.



2. خشتەکە پێدراوی ئەو ئۆتۆمبێلانەی بە غاز کاردەکەن بەهەرەمەکی هەڵبژێراون، خشتەکە هێزی هەر ئۆتۆمبێلێك بە (ئەسپ) و ئەو دوورییەی بەهەر لیترێك لە غاز دەیبڕێت نیشاندەدات.

هێزی ئۆتۆمبێلەکان و ئەو دوورییەی بەهەر لیترێك دەیبڕێت										
هێز (بەئەسپ)	175	255	140	165	115	120	190	180	110	125
دووری بڕاو بەهەر لیترێك (کم / ل)	3.61	2.13	4.1	2.95	5.25	4.6	2.46	3.45	5.75	4.92

أ خاڵە ڕوونکردنەوەییەکان بۆ نواندنی پێدراوەکانی خشتەکە دابنێ، بەکاربردن وەك گۆڕاوی ئازاد بەکاربێنێت.

ب هاوکۆلکەی پەیوەستی و هاوکێشەی ڕاستەهێڵی باشترین نواندن بدۆزەوە. ئەم ڕاستەهێڵە چی دەگەیەنێت؟

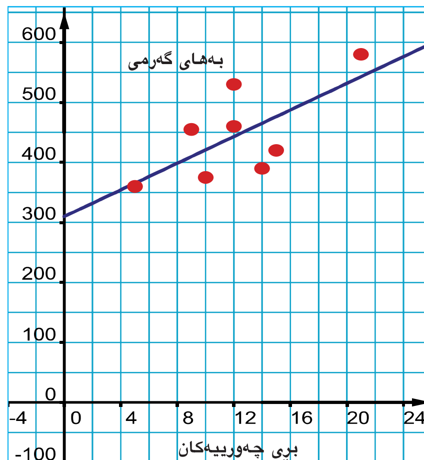
ج ئۆتۆمبێلێك هێزی بزوێنەرەکەی 210 ئەسپە، ئەو دوورییە بەهەر لیترێك دەیبڕێت دیاریبکە.

نموونـــــە 3 جێبەجێکردن لەسەر خواردن

خشتەکەی خوارەوە پێدراوەکان لە بڕی ئەو چەورییەی یەکێك لە جۆرەکانی بابۆڵە تێیدایە و بەها گەرمییەکەی نیشان دەدات.

پێدراوە خۆراکییەکان بۆ هەندێك لە جۆرەکانی بابۆڵە								
بڕی چەورییەکان (g)	5	9	12	15	12	10	21	14
بەهای گەرمی (بە گەرمۆکە)	360	455	460	420	530	375	580	390

أ هێڵە ڕوونکردنەوەییەکان بۆ نواندنی پێدراوەکانی نەخشەکە دابنێ. بڕی چەورییەکە وەك گۆڕاوی سەربەخۆ بەکاربێنە.



ب هاوکۆڵکەی پەیوەست و هاوکێشەی باشترین نواندن بدۆزەوە. وێنەی ئەو ڕاستەهێڵە بکێشە.

هاوکۆلکەی پەیوەست بریتییە لە $r=0.682$ بە نزیکەی هاوکێشەی ڕاستەهێڵی باشترین نواندن بریتییە لە $y=11.1x+309.8$ گۆڕاوی پەیوەستی (متغیر تابع) ژمارەی گەرمۆکە.



ج بڕی چەورییەکان لەو بابۆڵەیەکدا کە بڕە گەرمیەکەی 500 گەرمۆکەیە بخەمڵێنە ووردبینی خەملاندنەکەت چەندە؟

$500=11.1x+309.8$

$190.2=11.1x \Rightarrow x\approx17.1$

سوود لە ڕاستەهێڵی باشترین نواندن وەردەگرێت بەوەی بڕی چەورییەکان لەو بابۆڵەیەدا کە بڕەگەرمییەکەی 500 گەرمۆکەیە بریتییە لە 17.1 g بەنزیکەیی. خاڵە ڕوونکردنەوەییەکان و بەهای هاوکۆڵکەی پەیوەستی وای دەردەخەن کە بڕی چەورییەکان لە ژمارەی گەرمۆکە لەم جۆرە بابۆلانەدا نیشاندەرێکی باشی نییە.

ڕۆشنایی

هەندێ جار بە ڕاستەهێڵی باشترین نواندن دەگوترێ هێڵی ڕوولێکردن.



3. چی دەبێت ئەگەر...؟ هاوکێشەی ڕاستەهێڵی باشترین نواندن بۆ خەملاندنی بڕی چەورییەکان لە بابۆڵەیەکدا بڕە گەرمییەکەی 420 گەرمۆکە بێت بەکاربێنە، ئەو بەهایەی لە وەلامەکەتدا دەستتکەوتووە چەند لە و بەهایەی کە بەرامبەر 420 گەرمۆکە لە خشتەکەدایە دوورە؟

بیربکەوە و تاوتوێبکە

1. ڕوونیبکەوە کەی هاوکۆلکەی پەیوەست (معامل الارتباط) لە نێوان دوو گۆڕاودا موجەب یان سالب دەبێت ئەگەر بزانیت هاوکێشەی ڕاستەهێڵی باشترین نواندن بریتییە لە $y = 3.2x - 12.5$.

2. ئەمەی خوارەوە ڕوونبکەوە: کام لەم دوو هاوکۆلکە پەیوەستە $r = 0.65$ ؛ $r = -0.75$ بەهێزترین پەیوەستی لە نێوان دوو گوڕاودا دەگەیەنێت؟ بەڵگە بۆ وەڵامەکەت بێنەوە.

3. ڕێکخەربە ئەم خشتەیەی خوارەوە بنووسەوە و تەواوی بکە. خاڵە ڕوونکردنەوەییەکان بۆ هەر جۆرە پەیوەستێك دابنێ و بەهای هاوکۆڵکەی پەیوەستی r بخەملێنە.



پەیوەست بوون	خاڵە ڕوونکردنەوەییەکان	بەهای پێشبینکراوی هاوکۆلکەی پەیوەستبوون
بەهێزی موجەب		
لاوازی موجەب		
بوونی نییە		
لاوازی سالب		
بەهێزی سالب		

2-2 ڕاهێنانەکان

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

1 **زاراوەکان** هەریەك لە هاوکۆلکەی پەیوەست لە نێوان دوو کۆمەڵەی پێدراودا چ دەگەیەنێت ڕوونیبکەوە.

أ $r = 0.4$ ب $r = -0.96$ ج $r = -0.02$

بڕوانە نموونە 1

2 **ئۆتۆمبێلەکان** خاڵە ڕوونکردنەوەییەکان بۆ پێدراوەکانی خشتەکە دابنێ، ژمارەی گاڵۆنەکان وەك گۆڕاوی سەربەخۆ بەکاربێنە. بەدوای پەیوەستی بگەڕێ. وێنەی ڕاستەهێڵی باشترین نواندن بکێشە و هاوکێشەکەی بدۆزەوە.

دووری براو							
ژمارەی گاڵۆنەکان	11.2	9.8	10.6	10.1	12.3	8.7	10.1
دووری براو (km)	338	296	332	324	368	263	305

بڕوانە نموونە 2

3 **ماڵداری** ئەم خشتەیەی خوارەوە پێدراوەکان لە ناوەندە ژمێرەیی پلەی گەرما لە ماوەی حەوت مانگدا و پسولەی نرخی فێنك کردنەوە لە ماڵی ئالان دا نیشان دەدات.

فێنککەرەوە لە ماڵی ئالان							
ناوەندە ژمێری پلەی گەرما	38	42	44	36	42	49	38
پسوولەی نرخ	93 000	79 000	75 000	83 000	74 000	67 000	86 000

أ خاڵە ڕوونکردنەوەییەکان بۆ نواندنی پێدراوی خشتەکە دابنێ، ناوەندی ژمێرەی پلەی گەرما بەگۆڕاوی ئازاد دابنێ

ب هاوکۆلکەی پەیوەست و هاوکێشەی ڕاستەهێڵی باشترین نواندن بدۆزەوە، وێنەی ئەو ڕاستەهێڵە بکێشە.

ج پسولەی نرخی فێنککەرەوە بۆ ئەو مانگەی ناوەندە ژمێرەی پلەی گەرما تیایدا 40 پلەیە بخەملێنە. ووردبینی ئەو خەملاندنە چەندە؟

پروانە نموونە 3

4 **خوێندنگاکان** خشتەکە پێدراوەکان لە ژمارەی مامۆستایەکان و ژمارەی خوێندکارەکان لە نموونەی هەرمەکی خوێندگاکان نیشاندەدات.

ژمارەی مامۆستایەکان و ژمارەی خوێندکاران								
ژمارەی مامۆستاکان	92	52	114	49	110	62	76	84
ژمارەی خوێندکاران	1050	653	753	381	1312	813	496	910

أ خاڵە ڕوونکردنەوەییەکانی خشتەکە دابنێ، ژمارەی مامۆستاکان وەك گۆڕاوی ئازاد بەکاربهێنە.

ب هاوکۆلکەی پەیوەستی و هاوکێشەی ڕاستەهێڵی باشترین نواندن بدۆزەوە، وێنەی ئەو ڕاستەهێڵە بکێشە.

ج ژمارەی مامۆستایەکان لە خۆێندنگایەکدا بە 600 خوێندکاری تێدابێت خەملێندرا. ووردبینی ئەو خەملاندنە چەندە؟

ڕاهێنانی و شیکارکردنی پرسیارەکان

ڕاهێنانی ئازاد	
بۆ شیکاری ڕاهێنانەکان	سەیری نموونە بکە
5	1
6	2
7	3

5 **کیمیا** خاڵە ڕوونکردنەوەییەکان بۆ نواندنی پێدراوەکان خشتەکەی خوارەوە بەکاربێنە. گەردیلە ژمارە وەك گۆڕاوی ئازاد بەکاربێنە.

هەندێك توخمی کیمیایی														
گەردیلە ژمارە	89	13	95	51	18	33	85	56	97	4	83	107	5	35
بارستایی گەردیلە	227	27	243	122	40	75	210	137	247	9	209	264	11	80

6 **زیندەزانی** تێکرایی لێکدانی باڵەکانی باڵندەی لەرزە (الطنان) لە چاو تێکرایی لێکدانی باڵەکانی باڵندەی تردا زیاترە. خشتەکەی خوارەوە پێداراوەکان لەو تێکرایانە و بارستایی لە ژمارەیەك باڵندە لەم جۆرەدا نیشاندەدات.



لێکدانی باڵی باڵندە الطنان							
بارستەی (g)	3.1	2.0	3.2	4.0	3.7	1.9	4.5
تێکرایی لێکدانەکان (بەچرکە)	60	85	50	45	55	90	40

أ خاڵە ڕوونکردنەوەییەکان بۆ نواندنی پێدراوەکان نەخشەکە دابنێ. بارستایی وەك گۆڕاوی ئازاد بەکاربێنە.

ب هاوکۆڵکەی پەیوەستی و هاوکێشەی ڕاستەهێڵی باشترین نواندن بدۆزەوە، ئەو ڕاستەهێڵە بکێشە .

ج تیکرای لێکدانەکانی باڵی باڵندەیەك لەم جۆرە کە بارستاییەکەی 19 g بێت بخەملێنە. وردبینی خەملاندنەکەت چەندە؟

7 **نرخاندنی بلیتەکان** بەڕێوەبەری یەکێك لە تیمە میوزیکییەکان نرخی بلیتیەکانی چوونە ژوورەوەی بۆ ئاهەنگەکەو ژمارەی ئامادەبونی تۆمارکرد.

ئامادەبوون بە پێی نرخەکانی بلیتیەکانی چوونە ژوورەوە									
نرخ	6000	5000	8500	8000	10000	5500	7000	7500	8000
ئامادەبوون	213	256	155	194	160	267	258	210	235

أ خاڵە ڕوونکردنەوەییەکان بۆ نواندنی پێدراوەکانی خشتەکە دابنێ، نرخ وەك گۆڕاوی ئازاد بەکاربێنە

ب هاوکۆڵکەی پەیوەستی و هاوکێشەی ڕاستەهێڵی باشترین نواندن بدۆزەوە وێنەی ئەو ڕاستەهێڵە بکێشە.

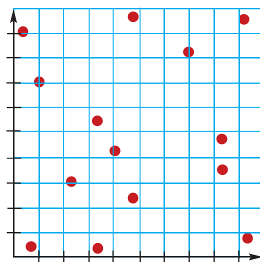
ج ژمارەی ئامادەبوونی ئاهەنگێك نرخی بلیتی چوونە ژوورەوەکەی 9000 دینار بێت بخەملێنە. ووردبینی خەملاندنەکە چەندە؟

8 خاڵە ڕوونکردنەوەوییەکانی پێدراوەکانی خشتەکە دابنێ هاوکێشەی ڕاستەهێڵی باشترین نواندن بخەملێنە.

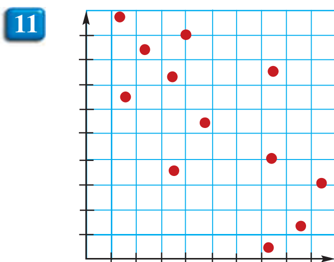
x	2	8	15	21	24	30	33	37
y	71	63	64	194	160	267	258	210

خەملاندن هاوکۆڵکەی پەیوەستی لە هەربارێکدا بخەملێنە.

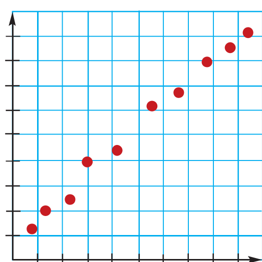
9



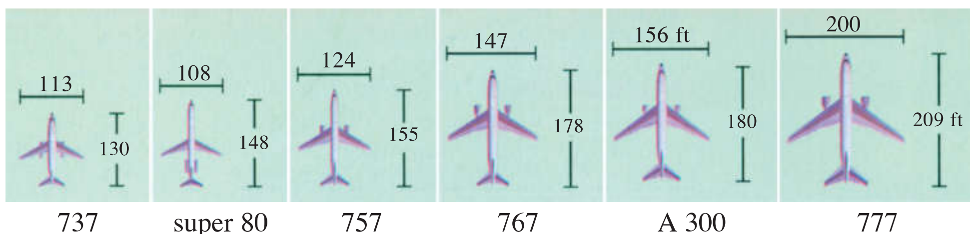
10



11



12 **فڕین** خشتەکەی خوارەوە درێژی ژمارەیەك لە فڕۆکە وپانی باڵەکانیان نیشاندەدات. خاڵە ڕوونکردنەوەییەکان بۆ نواندنی پێدراوەکانی خشتەکە دابنێ، درێژی وەك گۆڕاوی ئازاد بەکاربێنە .وێنەی ڕاستەهێڵی باشترین نواندن بکێشە و هاوکێشەکەی بدۆزەوە.



13 خشتەی بەرامبەر نمرەی دەیەکەمەکان لە تاقیکردنەوەی بیرکاری نیشاندەدات.

نمرەکانی یەکەمەکان لە بیرکاری			
نمرە	**بنکە**	**نمرە**	**بنکە**
90	6	95	1
89	7	93	2
87	8	92	3
86	9	91	4
85	10	90	5

أ کام هاوکێشە بۆ دۆزینەوەی نمرە بەزانینی بنکە بەکاردێت.

ب وای دابنێ مامۆستای بیرکاری بۆ هەر نمرەیەك 5 نمرەی زیادکرد؟کاریگەری ئەمە لەسەر هاوکێشەکەو ڕوونکردنەوەییەکانی چییە؟

14 **وەرزش** خشتەی خوارەوە پێدراوەکان لەسەر خێرایی ژمارەیەك لە پێشبڕکێ کەرانی ڕاکردن و ژمارەی هەنگاوەکانیان لە چرکەیەکدا نیشاندەدات.

ژمارەی هەنگاوەکان لە چرکەیەکدا و خێرایی							
خێرایی (پێ / چر)	15.86	16.88	17.5	18.62	19.97	21.06	22.11
ژمارەی هەنگاوەکان لەچرکەیەك	3.05	3.12	3.17	3.25	3.36	3.46	3.55

أ خاڵە ڕوونکردنەوەییەکان دیارییکە بۆ نواندنی پێدراوەکانی خشتەکە بەبەکارهێنانی خێرایی وەك گوراوی ئازاد، باشترین نواندن بدۆزەوە و پاشان وێنەکەی بکێشە ب هاوکۆڵکەی پەیوەستی و هاوکێشە و وێنەی ڕاستەهێڵی باشترین نواندن بکێشە. ج هاوکێشەی ڕاستەهێڵی باشترین نواندن بەکاربێنە بۆ دۆزینەوەی ژمارەی هەنگاوەکان لە چرکەیەکدا بۆ ڕاکەرێك خێراییەکەی 18 پێیە لە چرکەیەکدا ووردبینی ئەو خەملاندنە چەندە؟ ڕوونیبکەوە.

15 **بەردین زانی گیاندارو** (زانستێکە لە شێوەکانی ژیان دەکۆڵێتەوە وەك بوون بە بەرد گیاندارو ڕووەکەکان) خشتەکەی خوارەوە درێژی ئێسکی ڕان و درێژی ئێسکی بازووی تێدایە کە لە پێنج نموونەیەی بەبەردبوون لە ئەرکیو پیتریکس، کە گیانلەبەرێکە و لەناوچووە، ڕواڵەتی خشۆك و تایبەتمەندییەکانی ئەوی هەیە زاناکان وای بۆ دەچن لە ئالقەکانی یەکەم بێت و باڵندەی لێپەیدابووە.



درێژییەکانی ئێسکی ڕان ئێسکی بازوو					
درێژی ئێسکی ڕان (cm)	38	56	59	64	74
درێژی ئێسکی بازوو (cm)	41	63	70	72	84

أ خاڵە ڕوونکردنەوەییەکان بۆ نواندنی پێدراوەکانی خشتەکە دابنێ درێژی ئێسکی ڕان وەك گۆڕاوی ئازاد بەکاربێنە. هاوکۆڵکەی پەیوەستبوون و هاوکێشەی ڕاستەهێڵی باشترین نواندن بدۆزەوە و وێنە بۆ ڕاستەهێڵەکە بکێشە.

ب لاری ئەو ڕاستەهێڵە تایبەتە بە گیاندارەکە چی دەگەیەنێت؟

ج ئەو هاوکێشەیەی دۆزیتەوە بۆ خەمڵاندنی درێژی ئێسکی ڕان بۆ خەمڵاندنی درێژی ئێسکی ڕانی گیانداری ئەو جۆرە بەکاری بێنە کە درێژی ئێسکی بازووەکەی $50cm$ بێت. ووردبینی خەمڵاندنە چەندە؟

16 **بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە** دوو گۆڕاو بەهاکانی یەکێکیان بەهاکانی ئەوەی تریان دیاری دەکات، ئایا مانای وایە کە پەیوەستیەکی بە هێز لە نێوان ئەو دوو گۆڕاوە دا هەیە؟ (بۆ نموونە: ئایا زیاد بوونی پێوەدانی هەنگ دەبێتە هۆی زێدە فرۆشی بەستەنییەکان)؟ ڕوونیبکەوە.

17 **بنووسە** کرداری دۆزینەوەی ڕاستەهێڵی باشترین نواندن بە درێژی باسبکە؟

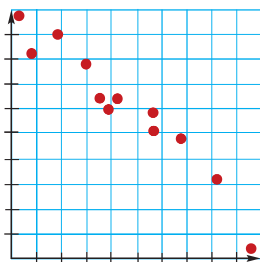


ئامادەکردن بۆ تاقیکردنەوە

18 هاوکێشەی ڕاستەهێڵی باشترین نواندن بۆ کۆمەڵەی پێدراوەکان بریتییە لە $y=1.05x-1.3$ ، کام لە مانەی خوارەوە دەبێتە هاوکۆڵکەی پەیوەست r ؟

أ $r=-1.3$ ب $r=-0.7$ ج $r=0.8$ د $r=1.05$

19 کام لەمانەی خوارەوە ئەو پەیوەستبوونەی خاڵە ڕوونکردنەوەییە بەرامبەرەکان نیشان دەدەن باسدەکات.



أ بەهێزی موجەب ج بە هێزی سالب

ب لاوازی موجەب د لاوازی سالب

20 کام لەم پەیوەندییانەی خوارەوە هاوکۆڵکەی پەیوەستی لاوازی تایبەت بە ئۆتۆمبێلی هەیە؟

أ تەمەنی ئۆتۆمبێل و ژمارەی ئەو کیلۆمەترانەی بڕیوەیەتی.

ب تەمەنی ئۆتۆمبێل و نرخەکانی لەکاتی فرۆشتنی وا کە بەکارهاتبێت.

ج درێژی ئۆتۆمبێل و پانییەکەی.

د ژمارەی ئەو کیلۆمەترانەی لە ناو شارو ژمارەی ئەو کیلۆمەترانەی لە سەر ڕێگای خێرا بڕیویەتی.

بەرەنگاری و فراوانکردن

لە خشتەی پێدراوەکاندا، ئایا پێدراوەکان پەیوەندییەکەیان هێڵییە؟ ئایا پێدراوەکان پێکەوە بەستراون؟ ڕوونیبکەوە.

21

x	2	7	13	15	22
y	4	4	4	4	4

22

x	35	45	55	65	75
y	30	34	36	34	30

23 ئەم دوو خشتەیەی خوارەوە ئەو پێدراوانەی یەکێك لە ئامارکارەکان نوسیوویانە نیشاندەدات، بۆ هەر خشتەیەك خاڵە ڕوونکردنەوەییەکان دابنێ کە دەینوێنێت و هاوکۆلکەی پەیوەست و هاوکێشەی ڕاستەهێڵی باشترین نواندن بدۆزەوە، چی گرنگی بە نواندنی پێدراوکان بە ڕوونکردنەوەی دەدات پێش ئەوەی نموونەی هێڵی بۆ ئەنجامدانی پێشبینییەکانی بەکاربێنێت؟

x	10	8	13	9	11	14	6	4	12	7	5
y	9.14	8.14	8.74	8.77	9.29	8.1	6.13	3.1	9.13	7.26	4.74

x	10	8	13	9	11	14	6	4	12	7	5
y	7.46	6.77	12.74	7.11	7.81	8.84	6.08	5.39	8.15	6.42	5.73

پێداچوونەوەی لولپێچی

هەر بڕەیەك بەسادەترین شێوە بنووسە (پۆلەکانی پێشو)

24 $3(x^2-2)+4xy-10x^2y+5x^2$

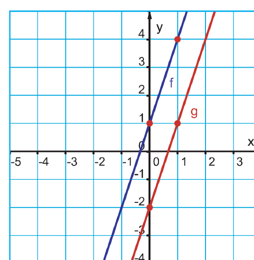
25 $-a^4+3ab+(2a^2)^2$

26 $-3g^2+3(g-4)-2(g-g^2)$

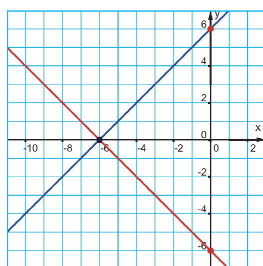
27 $n(4t^2-t)-10nt^2+nt$

هاوکێشەی هەریەك لەم نەخشانە کە بەڕوونکردنەوەی نوێنراون بنووسە ئەو جێگۆڕکێیانەی $f(x)$ بۆ $g(x)$ دەگۆڕن چین؟ (پۆلەکانی پێشو)

28



29



هەریەکە لەم لاسەنگانە بە ڕوونکردنەوەیی شیکاربکە. (پۆلەکانی پێشو)

30 $3x < x-12$

31 $44+6x > -5x$

32 $-2(q-4)+3q \le 1+q$



2–3 سیستمەكانی لاسەنگە هێڵییەكان

System of Linear Inequalities

كێ ئەمە بەكاردەهێنێت؟

دۆزەرەوانی جەمسەری باكوور سیستمەكانی لاسەنگە هێڵییەكان بۆ دیاریكردنی ئەو خێراییەی كە پێویستە پێی برۆن بەكاردەهێنن ئەگەر نا ڕووبەڕووی كەش و هەوایەكی بێزاركەر دەبنەوە (نموونەی 2).

ئامانجەكان

شیكاركردنی سیستمەكانی لاسەنگە هێڵییەكان بەڕوونكردنەوەیی.

زاراوەكان
Vocabulary

سیستمی لاسەنگە هێڵییەكان
System of linear inequalities

كاتێك لە پرسیارێكدا دەربڕینێك وەك «گەورەتر لە» یان «پترنییە لە» بەكاردێنیت دەتوانیت ئەو بارە بە بەكارهێنانی لاسەنگە یان سیستمی لاسەنگە هێڵییەكان بنوێنیت.

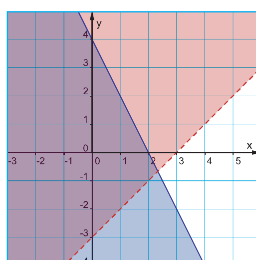
سیستمی لاسەنگە هێڵییەكان System of linear inequalities بریتییە لە كۆمەڵەی دوو لاسەنگەی هێڵی یان زیاتر، كە هەمان نەزانراویان تێدایە. بە زۆری كۆمەڵە شیكاری سیستمی لاسەنگە هێڵییەكان لە ژمارەیەكی ناكۆتا خاڵ پێكدێت كە دەتوانرێت بەڕوونكردنەوەی بە ڕەنگكردنی ناوچەكە لە ڕووتەختی ڕوونكردنەوەدا بنوێنرێت. كاتێك هەردوو لاسەنگە هێڵییەكە، لە هەمان ڕووتەختی پۆتاندا دنوێنرێت، ناوچە ڕەنگ كراوەكان یەكتر دەبڕن و ناوچەیەكی هاوبەش دروستدەكەن، ناوچەی شیكاری سیستمەكە ئەو ناوچە هاوبەشەیە.

نموونـــــە 1 شیكاركردنی سیستمی لاسەنگە هێڵییەكان بە ڕوونكردنەوەی

بەڕوونكردنەوەی سیستمی ئەم دوو لاسەنگە هێڵییە شیكاربكە.

أ

$$\begin{cases} y \le -2x+4 \\ y > x-3 \end{cases}$$



لە لاسەنگەی یەكەمدا. وێنەی ڕاستەهێڵ $y=-2x+4$ بە هێڵێكی نەپساو بكێشە، و ناوچەی ژێری ڕەنگبكە. و لە لاسەنگەی دووەمدا وێنەی ڕاستەهێڵ $y=x-3$ بە هێڵێكی خاڵخاڵ بكێشە، و ناوچەكەی سەرەوەی ڕەنگ بكە. یەكتر بڕی دوو ناوچە ڕەنگ كراوەكە ناوچەی شیكاری سیستمی دوو لاسەنگە هێڵییەكە دەبێت.

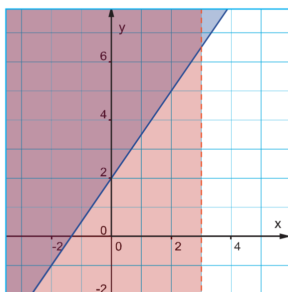
یارمەتی

ئەگەر دڵنیانیت لەو ناوچەیەی كە دەبێ سێبەری بكەی، خاڵی (0 ، 0) وەك خاڵی تاقیكردنەوە بەكاربێنە.

ساغكردنەوە: خاڵێك لە خاڵەكانی هەر ناوچەیەك لەسەر ڕووتەختی پۆتانەكە تاقیبكەوە.

ناوچە	خاڵ	$y \le -2x+4$	$y > x-4$
چەپ	(0,0)	$0 \overset{?}{\le} -2(0)+4$ $0 \overset{?}{\le} 4$ ✓	$0 \overset{?}{>} 0-3$ $0 \overset{?}{>} -3$ ✓
ڕاست	(4,0)	$0 \overset{?}{\le} -2(4)+4$ $0 \overset{?}{\le} -4$ ✗	$0 \overset{?}{>} 4-3$ $0 \overset{?}{>} 1$ ✗
سەرەوە	(2,2)	$2 \overset{?}{\le} -2(2)+4$ $2 \overset{?}{\le} 0$ ✗	$2 \overset{?}{>} 2-3$ $2 \overset{?}{>} -1$ ✓
خوارەوە	(2,–2)	$-2 \overset{?}{\le} -2(2)+4$ $-2 \overset{?}{\le} 0$ ✓	$-2 \overset{?}{>} 2-3$ $-2 \overset{?}{>} -1$ ✗

خاڵی یەكەم تاكە خاڵ بوو لە نێوان ئەو خاڵانەدا كە بۆوتانەكانی سیستمی دوو لاسەنگەكەیان شیكاركرد.



بەڕوونکردنەوەی سیستمی ئەم دوو لاسەنگە هێڵییە شیکاربکە.

ب $\begin{cases} y \geq \frac{3}{2}x + 2 \\ x < 3 \end{cases}$

لە لاسەنگەی یەکەمدا، وێنەی ڕاستەهێڵ $y = \frac{3}{2}x + 2$ بە هێڵی نەپساو بکێشە و ناوچەکەی سەرەوەی ڕەنگ بکە. و لە لاسەنگەی دووەمدا، وێنەی ڕاستەهێڵ $x = 3$ بە هێڵی خاڵخاڵ بکێشە و ئەو ناوچەی دەکەوێتە لای چەپیەوە رەنگ بکە. یەکتربڕی دوو ناوچە ڕەنگ کراوەکە ناوچەی شیکاری سیستمی دوولاسەنگە هێڵییەکە دەنوێنێت.

$x < 3 \qquad y \geq \frac{3}{2}x + 2$

$-4 < 3$ ✓ $\quad 0 \geq \frac{3}{2}(-4) + 2$

$0 \geq -4$ ✓

ساغکردنەوە خاڵێك لە خاڵەکانی ناوچە یەکتربڕەکە تاقیکەوە، بۆ نموونە $(-4\ ,\ 0)$ تاقیکەرەوە بۆ ئەوەی دەربکەوێت پۆوتانی ئەو خاڵە شیکارە بۆ سیستمەکە لەبەرئەوەی خاڵەکە سەربەو ناوچە شیکارەیە کە ناوچەی شیکاری سیستمی دوو لاسەنگەکەیە. ئەوا ناوچەی یەکتربڕین ناوچەی شیکارە.



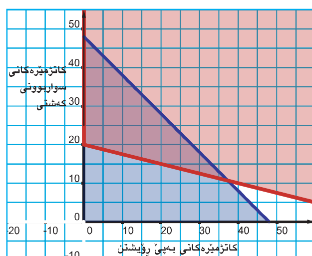
1. بەڕوونکردنەوەیی هەریەك لەم سیستمی لاسەنگە هێڵییانە شیکاربکە.

أ $\begin{cases} x - 3y < 6 \\ 2x + y > 1.5 \end{cases}$ **ب** $\begin{cases} y \leq 4 \\ 2x + y < 1 \end{cases}$

نموونە 2 جێبەجێکردن لەسەر هەڵمەتەکانی دۆزینەوە

هەڵمەتی دۆزینەوەی جەمسەرکە لە دووری 240 km لە بنکەکەیەوە بوو. و پێشبینی دەکرا لەماوەی 48 کاتژمێردا با هۆزی بەفر هەڵبکات. دەستەی هەڵمەتەکە پێویستە لەسەریان بەخێرایی سواری پاپۆڕە سەهۆڵ بڕەکە ببن و بجولێن پاشان بەپێ بڕۆن تابگەنەوە بنکەکەیان. ئەوپەری خێرایی پاپۆڕەکە 12 km/h یە. بەڵام ئەوپەڕی خێرایی بە پێ ڕۆیشتن و ڕاکێشانی کەلوپەلەکانیان لە 3 km/h تێناپەڕێت. سیستمی لاسەنگە هێڵییەکان بنووسە بە ڕوونکردنەوەیی شیکاریان بکە بۆ ئەوەی ماوەی سواربوونی پاپۆڕەکە و ماوەی بەپێ ڕۆیشتن پێش گەیشتن بە بنکەکە دیاری بکەیت.





x بۆ ژمارەی کاتژمێرەکانی بەپێی ڕۆیشتن، y بۆ ژمارەی کاتژمێرەکانی سواربوونی کەشتیەکە بەکاربێنە. پێویستە سەرجەمی دوو نەزانراوەکە لە 48 کاتژمێر کەمتربێت. ئەمەش لاسەنگە $x + y \leq 48$ مان دەداتێ. لە لایەکی ترەوە. پێویستە ئەو دوورییە هەڵمەتەکە دەیبڕێت لە 240 km کەمترنەبێت، ئەمەش لاسەنگەی دووەمان دەداتێ $3x + 12y \geq 240$ سیستمی دوو لاسەنگەکە بریتییە لە $\begin{cases} x + y \leq 48 \\ 3x + 12y \geq 240 \end{cases}$

وێنەی ڕاستەهێڵ $3x + 12y = 240$ بە هێڵی نەپساو بکێشە و ناوچەکەی سەرەوە ڕەنگبکە پاشان وێنەی ڕاستەهێل $x + y = 48$ بەهێڵی نەپساو بکێشە و ناوچەکەی ژێرەوەی ڕەنگ بکە.

ناوچەی شیکاری سیستمەکە ئەوەیە ناوچەی یەکتربڕینی ڕەنگکراوەکان.

ساغیبکەوە: خاڵی $(15, 25)$ لە ناوچەی یەکتربڕین هەڵبژێرە.

پۆوتانی ئەم خاڵە شیکاری هەردوو لاسەنگەکە و سیستمەکە دەکات.

$x + y \leq 48 \qquad 3x + 12y \geq 240$

$15 + 25 \leq 48 \qquad 3(15) + 12(25) \geq 240$

$40 \leq 48$ ✓ $\qquad 345 \geq 240$ ✓



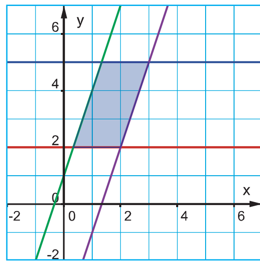
2. سۆلاڤ بابۆڵەی گۆشت و بابۆڵەی مریشك دەفرۆشێ. 40 نانی پێیە واتە ناتوانێت لە 40 بابۆڵە زیاتر لە هەردوو جۆرەکە پێکەوە بفرۆشێت. لە بابۆڵەیەکی گۆشت 000 2 دینار قازانج دەکات، و لەبابۆڵەیەکی مریشك 2500 دینار قازانج دەکات، ئەو دەیەوێت 000 90 دینار قازانج بکات. سیستەمی لاسەنگە هێڵییەکان بۆ نواندنی پرسیارەکە بنوسە، پاشان بە ڕوونکردنەوەی شیکارییکە.

دەگونجێت سیستەمی لاسەنگە هێڵییەکان لە دوو لاسەنگەی زیاتر تێدابێت.

نموونــــە 3 جیبەجێکردنی ئەندازەی

سیستەمی ئەم لاسەنگە هێڵییانە بەڕوونکردنەوەیی شیکاربکە و جۆری ناوچە شیکارەکە دیاربکە

$$\begin{cases} y \le 5 \\ y \ge 2 \\ y \le 3x+1 \\ y \ge 3x-4 \end{cases}$$



بە هێڵی نەپساو وێنەی ڕاستەهێڵ $y=5$ و ڕاستەهێڵ $y=3x-4$ بکێشە، ئەو ناوچەیەی دەکەوێتە ژێر هەریەکەیان ڕەنگی بکە.

بەهێڵی نەپساو وێنەی ڕاستەهێڵ $y=2$ و ڕاستەهێڵ $y=3x+1$ بکێشە، و ئەو ناوچەیەی دەکەوێتە سەر هەریەکەیان ڕەنگی بکە. ناوچەی شیکاری سیستەمەکەناوچە یەکتربڕەکەیە. ناوچەی شیکار شێوە چوارلایە، تێبینی ئەوەبکە کە دووڕاستەهێڵ $y=5$، $y=2$ بەیەکتری تەریبن لەبەر ئەوەی دوو ڕاستەهێڵی ئاسۆیین ، و دوو ڕاستەهێڵ $y=3x+1$، $y=3x-4$ بەیەکتری تەریبین چونکە هەمان لاریان هەیە.

ناوچەی شیکار چوارلایە تیایدا دوولای بەرامبەر بە یەکتری تەریبن. بەمەش چوارلاکە تەریبە.



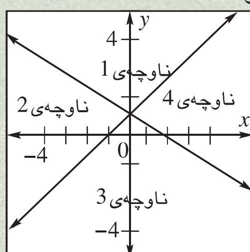
3. بەڕوونکردنەوەی سیستەمی دوولاسەنگە هێڵییەکە شیکاربکە، و جۆری ناوچەی شیکار دیاری بکە.

أ $\begin{cases} x \le 6 \\ y \le \frac{1}{2}x+1 \\ y \ge -2x+4 \end{cases}$

ب $\begin{cases} y \le 4 \\ y \ge -1 \\ y \le -x+8 \\ y \le 2x+2 \end{cases}$

بیربکەوە و تاوتوێبکە

1. ڕوونبکەوە چۆن ناوچەی شیکار بۆ سیستەمی دوو لاسەنگە هێڵییەکان دەدۆزیتەوە.
2. کەمترین ژمارەی لاسەنگەکان دەبێت چەندبێت، تا ناوچەی شیکار سێگۆشە؟ چوارگۆشە؟ بێت. نموونە بۆ وەڵامەکەت بێنەوە.
3. ڕێکخەر بە هێڵکارییەکە بنووسەوە و تەواوی بکە، بۆ هەر ناوچەیەك سیستەمی لاسەنگە هێڵییەکان بنوسە کە شیکارەکەی، ناوچەی شیکار لە ڕووتەختی پۆتانەکەدا بنوێنێت.





3-2 ڕاهێنانەکان

ڕاهێنانی ئاراستەکراو

1 **زاراوەکان** بەراورد لە نێوان سیستمی لاسەنگە هێڵییەکان و سیستمی هاوکێشە هێڵییەکاندا بکە.

بڕوانە نموونە 1 بە ڕوونکردنەوەی هەریەك لەم لاسەنگە هێڵییانە شیکاربکە.

2 $\begin{cases} y \ge 4x - 4 \\ y \ge 3x - 3 \end{cases}$

3 $\begin{cases} x + y > 5 \\ x - y < -3 \end{cases}$

4 $\begin{cases} 7x < y - 16 \\ y \le -5x - 2 \end{cases}$

5 $\begin{cases} 2x + 2y \le 4 \\ 3x - y > 1 \end{cases}$

بڕوانە نموونە 2

6 **کۆکردنەوەی پیتاك** یەکێك لە کۆمەڵەکانی خێرخوازی پیتاکی کۆکردەوە بە فرۆشتنی کراسی لۆکە. نرخی کراسی گەورە 15 000 دینار و منداڵان 10 000 دینارە. ژمارەی کراسەکان 250 کراسە لە دوو جۆر. کۆمەڵەکە پێی وابوو بەلانی کەمەوە 3 ملیۆن دیناری دەستدەکەوێت. سیستمی لاسەنگە هێڵییەکان بۆ نواندنی بارەکە بنووسە، پاشان بەڕوونکردنەوەیی شیکاری بکە بۆ دیاریکردنی ژمارەی کراسەکان کە لەهەر جۆرێك پێویستە بفرۆشرێن.

بڕوانە نموونە 3 بەڕوونکردنەوەیی هەریەك لە سیستمی لاسەنگە هێڵییەکان شیکاربکە و جۆری ناوچەی شیکارکە دیاریبکە.

7 $\begin{cases} x \ge 9 \\ y \ge -18 \\ x \le 13 \\ y \le -4 \end{cases}$

8 $\begin{cases} y \le 7 \\ 2x - y \le 3 \\ x + 2y \ge -6 \end{cases}$

9 $\begin{cases} x \le -1 \\ y \le 3x + 2 \\ y \ge -3x - 10 \end{cases}$

10 $\begin{cases} y \ge x \\ y \le x + 6 \\ x \le 6 \\ x \ge -2 \end{cases}$

ڕاهێنان و شیکارکردنی پرسیارەکان

ڕاهێنانی ئازاد	
بۆ شیکاری ڕاهێنانەکان	سەیری نموونە بکە
11- 14	1
15	2
16- 19	3

بەڕوونکردنەوەیی هەریەك لەم لاسەنگە هێڵییانە شیکاربکە.

11 $\begin{cases} 5x - y > 0 \\ y < x \end{cases}$

12 $\begin{cases} 3y \ge 2x - 3 \\ y \ge 3x + 8 \end{cases}$

13 $\begin{cases} x + y > 5 \\ -2x + y \le 2 \end{cases}$

14 $\begin{cases} y > 4 \\ x + 4y \ge 8 \end{cases}$

15 **میوزیك** کۆمپانیایەك دەیەوێت 10 000 پەپکی پەستینراو بۆ کۆمەڵە گۆرانییەك بەرهەم بهێنێت. ژمارەیەك لەم پەپکانەی تەرخان کرد بۆ ئەوەی بە خۆرایی دابەشی بکات بەسەر ئێسگەکانی ڕادیۆو تەلەفزیۆن، ژمارەیەکی تر بۆ فرۆشتن، بەمەرجێك ژمارەی ئەو پەپکانەی دەیبەخشێت لە ڕێژەی 20% تێپەڕ نەکات لە کۆی گشتی. سیستەمی لاسەنگە هێڵییەکان بنووسە، کە ئەم بارە بنێوێنێت.لەگەڵ دیاریکردنی ئەو ژمارانەی کە لە توانادایە بۆ پەپکە بەخشراوەکان و پەپکانەی ئامادەکراوە بۆ فرۆشتن.

بە ڕوونکردنەوەی هەریەك لەم سیستەمەی لاسەنگە هێڵییانە شیکاربکە. جۆری ناوچە شیکارەکە دیاریبکە.

16 $\begin{cases} x \ge 0 \\ -\frac{1}{3}x + y \ge -4 \\ \frac{1}{3}x + y \le -1 \end{cases}$

17 $\begin{cases} y \le 2.5 \\ y \ge -0.5 \\ y \le -x + 8 \\ y \le 2x + 4 \end{cases}$

18 $\begin{cases} y \le x + 6 \\ y \ge x + 1 \\ y \le -x + 6 \\ y \ge -x - 1 \end{cases}$

19 $\begin{cases} y \le x \\ y \le -x + 2 \\ y \ge 0 \end{cases}$

20 **مۆبایل** ژمارەی قسەکردنە تەلەفۆنیەکانی هەژار لە مانگی ڕابردوودا گەیشتە 2370 قسەکردن، 1645 لە کەسانی ترەوە بۆی هاتبوون، لە کاتێکدا ژمارەی قسەکردنەکانی هۆزان لە ژمارەی قسەکردنەکانی هەژار کەمترە، بەڵام ژمارەی ئەو قسەکردنە تەلەفۆنیانەی هۆزان بۆی هاتوون، لە ژمارەی ئەوانەی هەژار بۆی هاتوون زیاترە. سیستمێکی لاسەنگە هێڵییەکان بنووسە بارەکە بنوێنێت، پاشان سیستمەکەشیکاربکە بۆ ئەوەی ژمارەی ئەو تەلەفۆنانەی هەژار بۆی هاتوون و ژمارەی ئەو تەلەفۆنانەی لێوەی دەرچوون دیاربکات.

ئەندازە سیستمی ئەو لاسەنگە هێڵییانە بنووسە کە شێوەکە ناوچە شیکارەکەیەتی

21 لاکێشە **22** چوارگۆشە **23** سێگۆشە وەستاو **24** نیمچە لاتەریب

25 ئۆتۆمبێلەکانی پێشبڕکێ لەژێر چەند مەرجێکدان، لەبارەی قەبارە و بارستاییەوە، بەپێی پۆلێنکردنیان دەبێ بارستایی ئۆتۆمبێلی فورمولا بە بارستایی شۆفێرەکەوە لە 600 kg کەمتر نەبێت، لە کاتێکدا ئۆتۆمبێلی تری پێشبڕکێ، دەبێ بارستاییەکە بەبێ بارستایی شۆفێر لە 710 kg کەمتر نەبێت.

أ سستەمێکی لاسەنگە هێڵییەکان بنووسە بۆ بەکارهێنانی بەراوردی بارستای دوو ئۆتۆمبێلەکە بە بێ شۆفێرکان

ب بوارو مەودای گونجاو بۆ سیستەمەکە دیاربکە.

ج دوو لاسەنگەکە بەڕوونکردنەوەی شیکاربکە.

26 **باجی دەرامەت** خشتەکەی بەرامبەر ڕێژەی باج لەسەر داهات بە پێی نرخی داهاتی خێزانێك نیشاندەدات. ڕێژەی باجی داهاتی سەرجۆن و ژنەکەی 25% داهاتی ژنەکە بەلایەنی کەمەوە دوو ملیۆن دینارە زیاترە لە داهاتی پیاوەکە سستەمێکی لاسەنگە هێڵییەکان بنووسە پرسیارەکە بنوێنێت، پاشان سیستمەکەبە ڕوونکردنەوەی شیکاربکە.

ڕێژەی باجی دەرامەت بە پێی بەشەکان	
داهات (بەملیۆن دینار)	ڕێژەکە
لە 14 000 تا 56.800	15%
لە 56.801 تا 114.650	25%
لە 114.651 تا 174.700	28%

هەریەك لەم سیستمە لاسەنگە هێڵییانە بەڕوونکردنەوەی شیکاربکە، سێ خاڵ لە ناوچەی شیکارەکەدا دیاریبکە.

27 $\begin{cases} -5y < 2x \\ 5y \geq 2x - 20 \end{cases}$

28 $\begin{cases} y + 7 > 0 \\ y < 2x + 5 \\ y < -3x + 4 \end{cases}$

29 $\begin{cases} y \geq -8 \\ x + 2y < 4 \\ x > -6 \end{cases}$

30 $\begin{cases} \frac{1}{2}x + 3y \leq 2 \\ x - y > 3 \end{cases}$

31 **بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە** ئەگەر ئەو دوو ڕاستەهێڵەی ناوچەی شیکاری سیستمی دوو لاسەنگە کە دیاری دەکەن بەیەکتری تەریب بن، ناوچە شیکاری گونجاو چییە؟

32 **بنووسە** ئایا دەگونجێ سیستمێکی دوو لاسەنگەی هیڵی شیکاری نەبێت؟ ئەمە ڕوونبکەرەوە.

ئامادەکردن بۆ تاقیکردنەوە

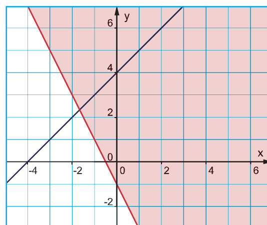
33 کام لەم سیستمە لاسەنگە هێڵییانە شیکارە ڕوونکردنەوەییەکەی شێوەیەکەی بەرامبەر دەنوێنێت؟

أ $\begin{cases} y > x + 4 \\ y < -2x - 1 \end{cases}$

ج $\begin{cases} y \leq x + 4 \\ y \geq -2x - 1 \end{cases}$

ب $\begin{cases} y > x + 4 \\ y > -2x - 1 \end{cases}$

د $\begin{cases} y \geq x + 4 \\ y \geq -2x - 1 \end{cases}$



34 بڕی تێچوونی بڕێك لە کالا بۆ بەرهەمهێنان 300 000 دینارە و 1250 دینار زیادە دەچێتە سەر هەر کالایەك کە دێتەبەرهەم. کۆمپانیاکە ئەو کالایە بە نرخێك کە لە 2 500 دینار بۆ هەر کالایەك تێپەڕناکات دەفرۆشێت، کام لەم لاسەنگە هێڵییانەی خوارەوە دەگونجێت بۆ ناوچە شیکارەکە بەکاربێت بۆ نواندنی قازانجی گونجاو کۆمپانیاکە؟ هێمای c بۆ تێچوونی گشتی، و n بۆ ژمارەی یەکە بەرهەمهاتووەکان دادەنرێت.

أ $\begin{cases} c \leq 300\ 000n \\ c \leq 300\ 000 + 1\ 250n \end{cases}$

ج $\begin{cases} c \leq 2\ 500n \\ c \geq 300\ 000 + 1\ 250n \end{cases}$

ب $\begin{cases} c \geq 2\ 500n \\ c \leq 300\ 000 + 1\ 250n \end{cases}$

د $\begin{cases} c \geq 2\ 500n \\ c \geq 300\ 000 + 1\ 250n \end{cases}$

35 کام لەم خشتانەی خوارەوە شیکاری ئەم سیستەمەی تێدایە $\begin{cases} 3x-12y>8 \\ x+5y>-5 \end{cases}$

أ)

x	y
1	−2
2	0
3	0
4	−2

ب)

x	y
1	−2
2	1
3	1
4	−2

ج)

x	y
1	−1
2	−1
3	0
4	0

د)

x	y
1	−2
2	−2
3	−1
4	−1

بەرەنگاری و فراوانکردن

36 سیستمێکی لاسەنگە هێڵییەکان بنووسە کە ناوچە شیکارەکەی پێنجلا بێت.

37 ئایا نەزانراوی m بەهایەکی هەیە کەوا لە سیستمی لاسەنگە هێڵییەکان بکات شیکاری نەبێت؟ ئەگەر وەڵامەکەت بەڵێ بوو ئەو بەهایە کامەیە، وئەگەر بەنەخێر بوو هۆیەکەی روونبکەوە. $\begin{cases} y>-3x+2 \\ y<mx-3 \end{cases}$

38 سەردار دەیەوێت 30 ملیۆن دینار لە بازاری پارەدا (سوق الاوراق المالیه) وەگەرخات، بانکەکە دوو جۆرە کاری خستە پێش. یەکەمیان کەم مەترسییە و قازانجەکەی سالانەبەرێژەی 5% بێت. دووەمیان پڕ مەترسییە و قازانجەکەی ساڵانە بە رێژەی 7% بێت. کەمترین بڕە پارەکە دەبێ وەکاربخات بەرێژەی قازانجی 7% تا قازانجەکەی ساڵانە لە 000 900 1 دینار کەمترنەبێت چەندە؟

پێداچوونەوەی لولپێچی

دژە کۆکردنەوەی هەریەك لەم ژمارانە و هەڵگەڕاوەکەی بنووسە (پۆلەکانی پێشوو).

39 7 **40** $-\frac{3}{4}$ **41** 2.48 **42** −1

هاوکێشەیەك بو ئەو ڕاستەهێڵە بنووسە (پۆلەکانی پێشوو)

43 بە دووخاڵی $(2, -7)$ و $(1, 1)$ دا دەڕوات.

44 بە خاڵی $(3, -3)$ دادەڕوات و لارییەکەی سفربێت.

45 بە دووخاڵی $(1, -1)$ و $(0, 0)$ دا دەڕوات.

46 بە خاڵی $(9, 6)$ دادەڕوات و لارییەکەی $-\frac{1}{3}$ بێت.

47 بە خاڵی $(-2, 4.5)$ دادەڕوات و لەگەڵ ڕاستەهێڵی $y=4x-1$ ئەستوون دەبێت

48 بە خاڵی $(3, 2)$ دادەڕوات و بەڕاستەهێڵ $y=-x-7$ تەریب بێت.

4-2 پرۆگرامی هێڵی

Linear Programming



کێ ئەمە بەکاردەهێنێت؟

ئەندازیارەکانی باخچەکان پرۆگرامە هێڵییەکان بۆ دیاریکردنی ئەو ڕووەکانەی لەسەر ڕووە سەوزەکان دەیانڕوێنن بەکاردێنن.

ئامانجەکان

شیکارکردنی پرۆگرامی هێڵی.

زاراوەکان Vocabulary

پرۆگرامی هێڵی
Linear programming

مەرج
Constraint

ناوچەی گونجاو
Feasible Region

نەخشەی بەسوود
Objective Function

ڕووە سەوزەکان، ئەو ڕووانەن کە لە جیاتی مەودای تری وەك چیمەنتۆ یان قرمید بە ڕووەکە سەوزەکان داپۆشراون، بۆ ئەوەی یارمەتی دابەزاندنی پلەی گەرما بدات. و جۆری هەواکە باش بکات. هەڵبژاردنەکانی ئەندازیارانی باخچەکان کاردەکات لە نرخی ڕووەکەکان و بڕی ئاوی پێویست و بڕی دووەم ئۆکسیدی کاربۆن کە دەیمژێت.

پرۆگرامی هێڵی Linear programming ڕێگایەکە بۆ دیاریکردنی گەورەترین یان بچوکترین بەها بۆ ئەو نەخشەیەی پاسادانی کۆمەڵە مەرجێك دەکات. کە پێی دەوترێت مەرجەکانی پرسیارەکە. مەرج **Constraint** یەکێك لە لاسەنگەکانە لە پرسیاری پرۆگرامی هێڵی.

دەگونجێت ئەو کۆمەڵە شیکارانەی هەموو مەرجەکان جیبەجێ دەکات بتوانرێت، کە ناوچەیەك لە ڕووتەختی پۆوتانەکاندا پەیدا دەکات پێی دەوترێت **ناوچەی بەسوود (الجدوی) Feasble Region** .

نموونــــە 1 نواندنی ناوچەی گونجاو بە ڕوونکردنەوەیی

سیروان نەخشەی ئەندازەی باخچەیەك دەکێشێت ڕووبەرەکەی لە $600m^2$ تێناپەرێت، دوو جۆر ڕووەك بەکاردێنی، ڕووەکی جۆری یەکەم ڕووبەرێکی $1.2m^2$ دادەپۆشێت، و ڕووەکی جۆری دووەم ڕووبەریکی $2m^2$ دادەپۆشێت، نرخی هەر ڕووەکێك لە دوو جۆرەکە 2500 دینارە، دەبێ تێچوونی ڕووەکەکان لەیەك ملیۆن دینار تێپەڕنەکات، مەرجەکان بنووسە و ناوچەی گونجاو بەڕوونکردنەوەی بنوێنە.

هێمای گۆڕاوی x بۆ ژمارەی ڕووەکەکانی جۆری یەکەم، و گۆڕاوی y بۆ ژمارەکان لە جۆری دووەم دابنێ. مەرجەکانی بنووسە.

$$\begin{cases} x \ge 0 \\ y \ge 0 \\ 1.2x + 2y \le 600 \\ 2500x + 2500y \le 1000000 \end{cases}$$

ژمارەکەکانی ڕووەکەکان بەسالیب نەبێت

ڕووبەری داپۆشراو لە $600\ m^2$ پتر نەبێت

تێچوونی ڕووەکەکان لە 100 0000 دینار پتر نەبێت.

بەڕوونکردنەوەیی هەریەك لە مەرجەکانی پرسیارەکە شیکاربکە، ئەو ناوچەیەی یەکتربڕی ناوچە شیکارە جیاوازەکان پێکدێنێت ڕەنگبکە. ناوچەی بەسوود ئەو ناوچەیەدەبێت کە دەستمان دەکەوێت، چوار لایەکە خاڵی سەرەکانی بریتین لە $(0, 0)$ ؛ $(400, 0)$ ؛ $(250, 150)$ ؛ $(0, 300)$



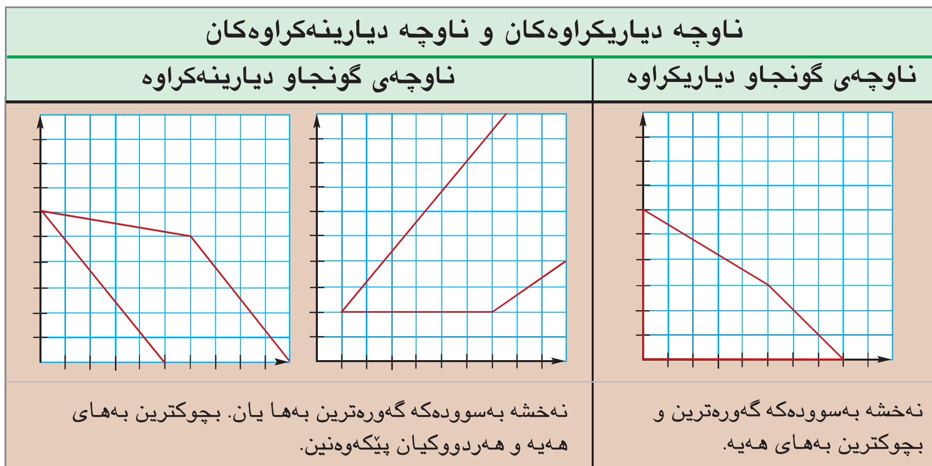
ساغکردنەوە ئەگەر خاڵێك وەك $(100, 100)$ هەڵبژارد دەبینی کە پۆوتانەکەی هەموو مەرجەکان دێنێتەدی. ✓



1. بەڕوونکردنەوەیی ناوچەی گونجاو بۆ ئەم پرسیارە بنوێنە.

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 1.5 \\ 2.5x + 5y \leq 20 \\ 3x + 2y \leq 12 \end{cases}$$

کاتێك پرسیارێکی پرۆگرامی هێڵی شیکاردەکەی، تەنها نواندنی ناوچەی گونجاو لە ڕووتەختی پۆوتاندا بەس نییە، زۆربەی کات لەسەرت پێویستە بەهای ئەو گۆڕاوانەی نەخشەکە بدۆزیتەوە. بە هۆی ئەو گۆڕانانەوە کەوا لە نەخشەکە دەکەن بەهاکەی بگاتە گەورەترین یان بچووکترین بەم جۆرە نەخشانەش دەووترێت نەخشەی بەسوود (دالة منفعه) **Objective Function** بە پێ ناوچەی گونجاو، دەکرێ نەخشە بەسوودەکە بەهاکەی گەورەترین یان بچوکترین یان هەردووکیان پێکەوە یان هیچیان نەبێت.



ناوچەی گونجاو دیاریکراوە	ناوچەی گونجاو دیارینەکراوە
ناوچە دیاریکراوەکان و ناوچە دیارینەکراوەکان	
نەخشە بەسوودەکە گەورەترین و بچوکترین بەهای هەیە.	نەخشە بەسوودەکە گەورەترین بەها یان. بچوکترین بەهای هەیە و هەردووکیان پێکەوەنین.

دەتوانرێت بە هۆی بیرکاری بالاترەوە، ئەمەی خوارەوە بسەلمێنرێت.



لووتکەی سەرەتا لە پرۆگرامی هێڵییدا

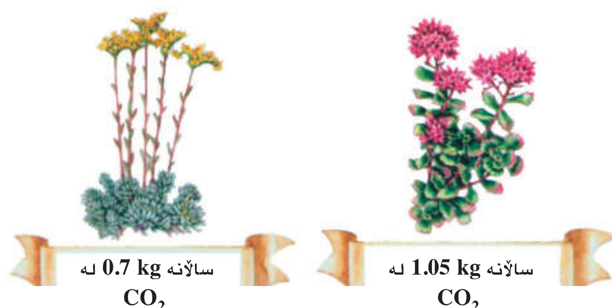
ئەگەر نەخشەی بەسوود (ئامانج) لە پرسیارێکی پرۆگرامی هێڵییدا گەورەترین یان بچووکترین بەهای هەبێت، ئەوا ئەو نەخشەیە بەهاکانی دەگاتە سەرێك لە سەرەکانی ناوچەی گونجاو.

نموونــــە 2 شیکارکردنی پرسیاری هێڵی

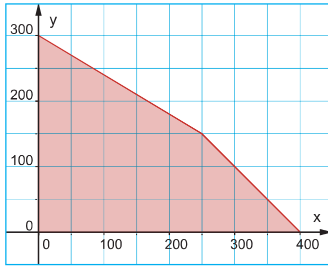
ڕۆشنایی

بژمێری ڕوونکردنەوەیی بەکاربهێنە بۆ ساغکردنەوەی ئەو ناوچەی گونجاو دەستتکەوتووە. بیرت نەچێت گۆڕاوەکان بە x و y بگۆڕە

سیروان ئەندازیاری باخچەکانە ئەوپەڕی گرنگی بە ڕاگرتنی پارسەنگی پیسبوونی هەوا دەدات. بۆ گەیشتن بەو مەبەستە. سیروان کار بۆ ئەوە دەکات ژمارەی ئەو ڕووەکانەی زۆرترین دووەم ئۆکسیدی کاربۆن هەڵدەمژن گەورەترین بێت. تێکڕاییەکانی هەڵمژینی دووەم ئۆکسیدی کاربۆن و پێدراوەکانی نموونەی 1 بەکاربهێنە بۆ دۆزینەوەی ژمارەی ڕووەکەکان لەو دوو جۆرە.



هەنگاوی 1 هێمای گۆڕاوی C بۆ بڕی دووەم ئۆکسیدی کاربۆنی هەڵمژراو دابنێ. x بۆ ژمارەی ڕووەکەکان لە جۆری یەکەم و y بۆ ژمارەی جۆری دووەم بەکاربێنە.



نەخشەی بەسوود بنووسە: $C = 0.7x + 1.05y$

هەنگاوی 2 مەرجەکانی پرسیارەکە بنووسە

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 1.2x + 2y \leq 600 \\ 2500x + 2500y \leq 1000\,000 \end{cases}$$

و ناوچەی گونجاو بنوێنە

هەنگاوی 3 بەهای نەخشەی بەسوود لە هەرسەرێك لە سەرەکانی ناوچەی گونجاو هەژماربکە.

(x, y)	$0.7x + 1.05y$	C
$(0, 0)$	$0.7(0) + 1.05(0)$	0
$(0, 300)$	$0.7(0) + 1.05(300)$	315
$(250, 150)$	$0.7(250) + 1.05(150)$	332.5
$(400, 0)$	$0.7(400) + 1.05(0)$	280

نەخشە بەسوودەکە دەکاتە گەورەترین بەهای لە $(250, 150)$

سیروانی ئەندازیار پێویستە لەسەری 250 ڕووەك جۆری یەکەم و 150 ڕووەك لە جۆری دووەم بڕوێنێ (بچێنێ). بۆ ئەوەی ئەو بڕە دووەم ئۆکسیدە کاربۆنەی، ڕووەکەکانی باخچەکە هەڵیدەمژن بگاتە ئەوپەڕی بەها.



2. گەورەترین بەها بۆ نەخشەی بەسوودی $p = 25x + 30y$ دیاریبکە لە ژێر ئەم مەرجانەی خوارەوە.

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 1.5 \\ 2.5x + 5y \leq 20 \\ 3x + 2y \leq 12 \end{cases}$$

نموونـــە 3 جێبەجێکردنەکان



لە ڤیستیڤاڵی ئەسپ سواری دا، دەبێت بێستون ڕۆژانە ژەمە خواردنەکان لە قووتو دابنێت بۆ ئەو مەبەستەش کرێکاری پسپۆری بەکارهێنا کرێی ڕۆژانەی یەکێکیان 60 000 دینارە. و کرێکاری تر پسپۆری نین کرێی یەك ڕۆژی 40 000 دینارە پێویستە ئەو کرێیەی دەیانداتێ ئەو پەری 1 440 000 دینار بێت. بێستون لە بەرامبەر هەر کرێکارێکی پسپۆڕیدا 3 کرێکاری نا پسپۆری پێویستە، تەنها 16 کرێکاری پسپۆری دەستکەوتووە. کرێکارە پسپۆرەکە 25 قووتو لە کاتژمێرێکدا و نا پسپۆرەکە 18 قووتو لە کاتژمێرێکدا بەرهەم دێنێت ژمارەی کریکارەکان لە هەر جۆرێك بدۆزەوە. بۆ ئەوەی ژمارەی ئەو قووتوانەی بەرهەمدێن گەورەترین بێت.

1 پرسیارەکە تێبگە

وەڵامەکە لە دوو بەش پێکدێت: ژمارەی پسپۆڕەکان و ژمارەی ناپسپۆڕەکان.لیستێك بۆ زانیارییە گرنگەکان دابنێ.

- کرێی پسپۆڕ 60 000 دینارە لە ڕۆژێکدا، کرێی ناپسپۆڕێك 40 000 دینارە لە ڕۆژێکدا.
- بێستون 1 440 000 دیناری بۆ ئەوپەڕی کرێی کرێکارەکان دانەوە.
- پسپۆڕەکە 25 قووتو لە کاتژمێرێکدا و ناپسپۆڕەکەش 18 قوتو لە کاتژمێریکدا بەرهەمدێنێت.
- بێستون بۆ هەر پسپۆڕێك 3 نا پسپۆڕی پێویستە.
- تەنها 16 کریکاری پسپۆڕی هەیە.

2 پلانی شیکارکردن دابنێ

هێمای گۆڕاوی x بۆ ژمارەی کرێکارە نا پسپۆڕەکان و گۆڕاوی y بۆ ژمارەی کرێکارە پسپۆڕییەکان دابنێ. مەرجەکانی پرسیارەکە و نەخشەی بە سوود بنووسە.

پاڵپشت بەو زانیارییە گرنگانەی نووسیوتە.

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 40000x + 60000y \leq 1440\,000 \\ y \geq \frac{1}{3}x \\ y \leq 16 \end{cases}$$

ژمارەی کرێکارەکان سالب نییە.

کرێی کرێکارەکان لە 000 440 1 دینار تێناپەڕێت.

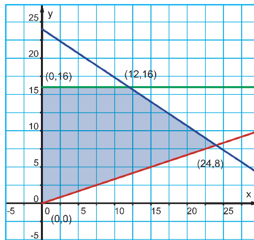
کرێکارێکی پسپۆڕە بەلایەنی کەمەوە بۆهەر 3 کرێکاری ناپسپۆڕی

ژمارەی کرێکارە پسپۆڕە ئامادەبووەکان 16 کرێکارە.

هێمای گۆڕاوی p بۆ ژمارەی قوتوە بەرهەمهاتووەکان لە کاتژمێریکدا دابنێ نەخشەی بەسوود بریتییە لە $p = 18x + 25y$

3 شیکاربکە

بە ڕوونکردنەوەیی ناوچەی گونجاو و سەرەکان دیاریبکە پاشان بەهای نەخشە بە سوودەکە لە هەر سەرێکدا هەژماربکە.



$p(0, 0) = 18(0) + 25(0) = 0$

$p(0, 16) = 18(0) + 25(16) = 400$

$p(12, 16)1 = 18(12) + 25(16) = 616$

$p(24, 8)1 = 18(24) + 25(8) = \mathbf{632}$

نەخشەی بە سوود گەورەترین بەهای دەبێت لە سەری $(24, 8)$دا. پێویستە بێستون 8 کرێکاری پسپۆڕ و 42 کرێکاری نا پسپۆڕ بەکاربێنێت.

4 ڕوانینێك بۆ دواوە

دڵنیابە لەوەی جووتە ڕێکخراوی $(24, 8)$ هەموو مەرجەکانی پرسیارەکە پاسادان دەکات.

$x \geq 0$ $y \geq 0$ $y \leq 16$

$24 \geq 0$ ✓ $8 \geq 0$ ✓ $8 \leq 16$ ✓

$y \geq \frac{1}{3}x$ $40000x + 60000y \leq 1440000$

$y \geq \frac{1}{3}(24)$ $40000 \times 24 + 60000 \times 8 \leq 1440000$

$8 \geq 8$ ✓ $1440000 \leq 1440\,000$ ✓



3. بەڕێوەبەری کتێبخانەیەك دەیەوێت دۆڵابی کتێب بکرێت. کتێبخانەکە پێویستی بە دوو جۆرە ڕەف هەیە بە درێژی $320\ m$. تێچوونی دۆلاب لە جۆری یەکەم کە $32\ m$ ڕەفەی هەیە 000 200 دینارە. تێچوونی دۆلاب لە جۆری دووەم کە $16\ m$ ڕەفەی هەیە 000 125 دینارە. بە پێی پێوانەکانی هۆڵی کتێبخانە بەلایەنی زۆرەوە 8 دۆڵاب لە جۆری یەکەم و 12 دۆڵاب لە جۆری دووەم دەگرێت.
بەڕێوەبەری کتێبخانەکە پێویستە چەند دۆڵاب لە هەر جۆرێك بکرێت بۆ ئەوەی کەمترین پارە بدات.

بیربکەوە و تاوتوێبکە

مەرجەکان	ناوچەی گونجاو
پڕۆگرامی هێڵی	
سەرەکان	نەخشەی بەسوود

1. چی وا لە مەرجەکانی پرسیاری پڕۆگرامی هێڵی دەکات بە زۆری دوو مەرجی $x \geq 0$ و $y \geq 0$ ی تێدابێت؟
2. چی وا لە نەخشەی بەسوود دەکات لە پرسیاری پڕۆگرامی هێڵیدا دوو مەرجەکانی. $\begin{cases} x+y>0 \\ y \leq 4 \end{cases}$ گەورەترین بەها یان بچووکترین بەهای هەبێت و هەردووکیان پێکەوە نەبن؟
3. چۆن دەزانیت کە زانیارییەکە لە پرسیاری پڕۆگرامی هێڵیدا هی مەرجەکەیە یان هی نەخشە بە سوودەکەیە؟



4. ڕێکخەر بە خشتەکە بنووسەوە، پاشان تەواوی بکە، لەهەر خانەیەکدا نموونەیەك بنووسە، پێدراوەکانی دوو نموونە 1 و 2 بەکاربێنە.

4–2 ڕاهێنانەکان

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

1 **زاراوەکان** لە پرسیاری پڕۆگرامی هێڵیدا بە لاسەنگەکان دەووترێت ؟ (مەرجەکان یان نەخشەی بەسوود)

بڕوانە نموونە 1

هەر ناوچەیەکی گونجاو بەڕوونکردنەوەیی دیاریبکە.

2 $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ y \leq 3x+3 \\ y \leq -x+7 \end{cases}$

3 $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq -1 \\ y \leq x+1 \\ y \leq -\frac{1}{4}x+6 \end{cases}$

4 $\begin{cases} x \geq -2 \\ y \leq 1 \\ y \geq 0.5x-2 \\ y \leq -2x+3 \end{cases}$

بڕوانە نموونە 2

بەهاکانی x و y بدۆزەوەکە گەورەترین بەها یان بچوکترین بەها دەدات بە نەخشە بە سوودەکە.

	مەرجەکان	نەخشەی بەسوود	گەورەترین یان بچوکترین بەها
5	مەرجەکانی پرسیاری 2	$p=10x+16y$	گەورەترین بەها
6	مەرجەکانی پرسیاری 3	$p=3x+5y$	بچووکترین بەها
7	مەرجەکانی پرسیاری 4	$p=2.4x+1.5y$	گەورەترین بەها

بڕوانە نموونە 3

8 **پزیشکی ددان** ڕێبوار پزیشکی ددانە ڕۆژانە 7 کاتژمێر کاردەکات، نیو کاتژمێر بۆ ئەو نەخۆشە دادەنێت کە دەیەوێت ددانی پاك بکاتەوە، 40 000 دیناری لێ وەردەگرێت، و کاتژمێرێك بۆ ئەو نەخۆشەی چارەسەری پووکی دەکات و 95 000 دیناری لێ وەردەگرێت. پزیشکەکە دەتوانێت بەلایەنی زۆرەوە 4 نەخۆش لە ڕۆژێکدا ببینێت کە چارەسەری پووکیان دەکەن. ژمارەی بارەکانی پاککردنەوەی ددان و ژماری ئەوانەی چارەسەری پووکیان دەکەن، بۆ ئەوەی زۆرترین داهات بۆ پزیشکەکە دابین بکات بدۆزەوە؟

ڕاهێنان و شیکارکردنی پرسیارەکان

ڕاهێنانی ئازاد	
بۆ شیکاری ڕاهێنانەکان	سەیری نموونە بکە
9- 11	1
12- 14	2
15	3

بە ڕوونکردنەوەی هەریەك لە ناوچەی گونجاو بنوێنە.

9 $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ y \geq 4x - 4 \\ y \leq x + 5 \end{cases}$

10 $\begin{cases} x \leq 0 \\ y \geq 0 \\ y \leq 9 \\ y \geq -2x - 7 \end{cases}$

11 $\begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq 5 \\ y \geq \frac{1}{5}x - 3 \\ y \leq -x + 4 \end{cases}$

بەهاکانی x و y بدۆزەوەکە گەورەترین یان بچوکترین بەها دەدات بە نەخشەی بەسوود.

	مەرجەکان	نەخشەی بەسوود	گەورەترین بەها یان بچوکترین بەها
12	مەرجەکانی پرسیاری 9	$p = -21x + 11y$	گەورەترین بەها
13	مەرجەکانی پرسیاری 10	$p = -2x - 4y$	بچووکترین بەها
14	مەرجەکانی پرسیاری 11	$p = x + 3y$	گەورەترین بەها

15 **ڕێکلامەکان** کۆمپانیایەك 60 ملیۆن دیناری تەرخانکرد بۆ ڕێکخستنی هەڵمەتی پروپاگەندە بۆ بەرهەمەکانی لە تەلەفزیۆن لە ماوە ئێوارانەکەی و ژمارەیەك لەڕادیۆکانیش. بەرپرسی هەڵمەتەکە بڕیاریدا لە نێوان 30 تا 60 جاردا پەخشی ئێسگەکە بەکاربێنێت. ئەم خشتەیە بەکاربێنە کە ژمارەیەك ڕێکلامی ماوەی ئێوارانی تەلەفزیۆن و ئێسگەدا کە درێژترین کاتی گونجاو لە ڕێکلام، لە سنووری بووجەکەیدا دابین دەکات.

جۆر	ماوە (چرکە)	تێچوون (دینار)
ئێسگە	20	400 000
تەلەفزیۆن (ماوەی ئێواران)	30	1 500 000
تەلەفزیۆن (ماوەی شەو)	30	1 200 000
ڕۆژنامەکان		300 000



16 بلیتەکانی پێشبڕکێی خۆر هەڵات بۆ ئۆتۆمبێلەکان بە دوو نرخ دەفرۆشرێن 25 000 دینار بۆ کورسییەکانی سەرەوە و 45 000 دینار بۆ کورسییەکانی خوارەوە. ڕێکخەری پێشبڕکێکە بڕیاردرا ژمارەی تەماشاکەران 160 000 کەس زیاتر نەبێت.

أ ژمارەی ئەو بلیتانەی لە هەر جۆرێك پێویستە بفرۆشرێت بۆ دەستکەوتنی زۆرترین قازانجی گونجاو بدۆزەوە ئەگەر بزانیت ژمارەی کورسییەکانی سەرەوە لە 120 000 کورسی تێناپەڕێت و ژمارەی کورسییەکانی خوارەوە لە 60 000 کورسی تێناپەڕێت.

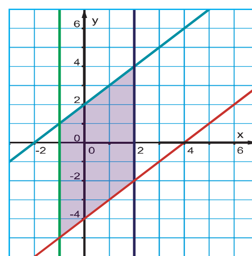
ب سستەم و شیکارەکە چۆن دەگۆڕێت، ئەگەر بەڕێوەبەرایەتی پێشبڕکێیەکە پێشبینی ئەوە بکات داهاتی هەر کورسیەك لە کورسییەکانی سەرەوە 60 000 دینار و هەریەك لە کورسییەکانی خوارەوە 30 000 دیناربێت. بەکرێنی بابۆڵە و ساردەمەنییەکانیشەوە؟



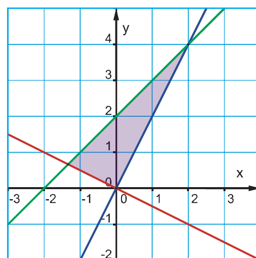
17 **پیشەسازی** دەزگای الـ(سەباح) دوو جۆر پانکە بەرهەم دێنێت. دروستکردنی پانکە لە جۆری یەکەم 4 کاتژمێر دەخایەنێت و 40 000 دینار قازانج دەکات، پانکەی جۆری دووەم 6 کاتژمێر دەخایەنێت و قازانجەکەی 80 000 دینارە. هێزی بەرهەمهێنان دامەزراوەکە ڕۆژانە 15 پانکە لە جۆری یەکەم و 4 پانکە لە جۆری دووەم تێپەڕ ناکات. ژمارەی کەمترین کاتژمێرەکانی کارکردنی لەم دامەزراوەیەدا بۆ ئەوەی بڕی قازانجی ڕۆژانە لە 400 000 دینار کەمتر نەبێت چەندە؟

ئەندازە لە خوارەوە نواندنەکانی ڕوونکردنەوەیی ناوچە گونجاوەکانە لە پرسیارەکانی پرۆگرامی هێڵییدا، بۆ هەریەکەیان سیستمی لاسەنگەکان بنووسە.

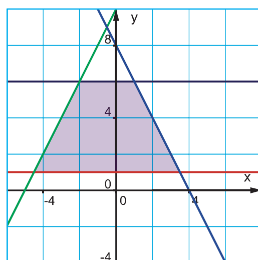
18



19



20



21 **هاتوو چۆ** بەڕێوەبەرایەتی ڕێگا خێراکان بڕیاریدا ئێشکگری تایبەت لە سەر ڕێگاکان بۆیارمەتی ئەو کەموکوڕیانەی لە سووتەمەنیدا هەیە، یان ئەو ئۆتۆمۆبێلانەی یەکێك لە تایەکانی لە کاردەکەوێت دەربکات، سووتەمەنی پێدانی ئۆتۆمۆبێلێك 15 خولەکی پێویستە، چاککردنەوەی تایەی ئۆتۆمبێل 45 خولەکی پێویستە ، زۆرترین ژمارەی ئەو ئۆتۆمبێلانەی ئێشکگرێك دەتوانێت لە ماوەی 8 کاتژمێردا یارمەتیان بدات چەندە؟ ئەگەر بزانیت لە 28 گالۆن زیاتر ناتوانێت هەڵبگرێت.

22 **بیری ڕەخنەگرانە** ئایا دەبێت پرسیارێکی پرۆگرامی هێڵی شیکاری نەبێت؟ بە نموونەیەك پاڵپشتی وەڵامەکەت بکە.

23 **خواردن** یەکێك لە کارگەکانی خۆراکی تەندروستی دوو جۆر خۆراك بە زیادکردنی پرۆتین صویا و ڤیتامینەکان بەرهەمدێنێت. جۆری یەکەم پێویستی بە دوو ئونس لە پرۆتین صویا ویەك ئونس لە ڤیتامینەکان هەیە، و 000 25 دینار قازانج دەکات، جۆری دووەم پێویستی بە 3 ئۆنس لە پرۆتین صویا و یەك ئۆنس لە ڤیتامینەکان هەیە، و 000 32 دینار قازانج دەکات. چەندیەکە لە هەر جۆرێك پێویستە کارگەکە بەرهەمبێنێت بۆ ئەوەی زۆرترین قازانج بکات. ئەگەر بزانیت گەنجینەی پرۆتین صویا و ڤیتامینەکان 100 ئونسی تێدایە.

دەروازەیەك

لەسەر مێژووی بیرکاری



زانستی پرۆگرامی هێڵی لە ماوەی شەڕی دووەمی جیهانیدا و لەسەدەی بیستەمدا پەرەی پێدرا. ئەو زانستە ڕۆڵی زۆری گێرا. بەشێك لە زانستی بەرفراوانتر کە پێی دەوترێت توێژینەوەی کردارەکان ڕۆڵی لە بردنەوەی ئەو شەڕە دابینی بە هۆی باشی دابەشکردنی پێداویستییە سەربازییەکانەوە.

24 **بیری ڕەخنەگر** نموونەیەك لەسەر پرسیارێکی پرۆگرامی هێڵی بنووسە کە ناوچە گونجاوەکەی تێدابێت بەهایەکی سالبی هەبێت.

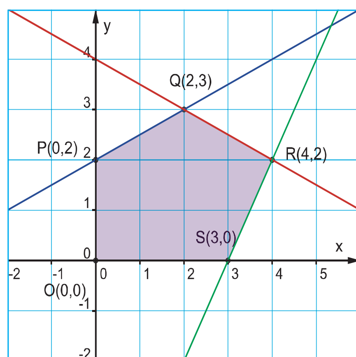
25 **بنووسە** ئەگەر پێویست بوو لەسەرت بە دوای گەورەترین بەهاو بچووکترین بەهای نەخشەیەکی بەسوود لە پرسیارێکی پرۆگرامی هێڵییدا بە پێی مەرجەکانی پرسیارەکە بگەڕێیت. چۆن ئەوە جیادەکەیتەوە.

26 **بنووسە** چۆن پۆوتانی سەرەکانی ناوچەی گونجاو دەدۆزیەوە؟



ئامادەکردن بۆ تاقیکردنەوە

27 کام خاڵ گەورەترین بەها دەدات بە نەخشەی بەسوودی $P=-x+y$ لە پرسیارێکی پرۆگرامی هێڵییدا کە شێوەی بەرامبەر تیایدا ناوچە گونجاوەکە دەنوێنێت.



أ) P ج) R

ب) Q د) S

28 سەرەکانی ناوچەی گونجاو لە پرسیارێکی پرۆگرامی هێڵییدا بریتییە لە خاڵەکانی$(0, 0)(-1, 2)$
$(-2, 6)$ ، کام لەم نەخشە بەسوودانەی خوارەوە نزمترین بەهای سالبی لە ناوچەی گونجاودا هەیە؟

(أ) $P=-4x+y-1$ (ج) $P=-x+3y+2$

(ب) $P=12x+7y$ (د) $P=-5x-y$

29 یەکێك لە کۆمپانیاکانی بینا گەورەکان پلان بۆ دروستکردنی چەند بینایەکی بازرگانی و چەند بینایەکی نیشتەجێبوون لەسەر پارچە زەویەك ڕووبەرەکەی $30\ 000\ m^2$ بێت دا دەنێت هەر بینایەکی نیشتەجێبون $250\ m^2$ و هەر بینایەکی بازرگانی $3000\ m^2$ پێویستە کۆمپانیاکە لە هەربینایەکی نیشتەجیبون یەك ملیۆن دینار و لە هەر بینایەکی بازرگانی 20 ملیۆن دینار قازانج دەکات، کام لەمانەی خوارەوە نەخشەی بەسوودە بۆ ئەم پرسیارەی پرۆگرامی هیڵییە و زۆرترین قازانجی گونجاو دابین دەکات، ئەگەر بزانی ژمارەی بینا بازرگانییەکان لە 6 بینا تێناپەڕێت؟

(أ) $P=250x+3000y$ (ج) $P=1000000x+20000000y$

(ب) $P=250x+100000y$ (د) $P=300\ 000-x-6y$

بەرەنگاری و فراوانکردن

30 **دەرمان** یەکێك لە کۆمپانیاکانی دروستکردنی دەرمان پلان بۆ تاقیکردنەوەی جۆرێکی نوێ لە دژە زیندەییەکان (المضادات الحیویة) لەسەر دوو جۆر A و B لە بەکتریا دادەنێت. وا پێویست دەکات دەرمانە نوێیەکە تاقیبکرێتەوە لەسەر بەلایەنی کەمەوە لە 700 جۆر بەکتریا بۆ بڕیاردان لەسەری، لە نێوانیاندا 400 نموونەیان لە جۆری B بێت بەلایەنی کەمەوە بۆ یارمەتی دانی کۆمپانیاکە لەسەر دابەزاندنی تێچوونی تاقیکردنەوەکە بۆ کەمترین بڕ.

جۆری A

جۆری B

أ بەڕوونکردنەوەیی ناوچەی گونجاوی پرسیارەکە بنوێنە

ب هەریەك لەم دوو خاڵەی پرسیارەکە$(350, 400)$ و$(400, 350)$ چی دەنوێنێت؟

ج ئایا هەریەکە لەم دوو خاڵە مەرجەکانی پرسیارەکە پاسەدان دەکەن؟هۆکاری ڕوونبکەوە.

پێداچونەوەی لولپێچی

لەهەر پرسیارێك لەمانەدا $f(7)$ و$f\left(-\frac{1}{2}\right)$ **هەژماربکە** (پۆلەکانی پشو).

31 $f(x)=\frac{1}{2x-3}$ **32** $f(x)=0.5x$ **33** $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$

نەخشەی بەهای ڕووتی $f(x)=|x|$ **بگۆڕە بە جۆری سەرەکەی لە خاڵێکی دیاریکراودابێت. وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشە نوێیەکە بکێشە** (پۆلەکانی پێشوو)

34 $(6, -3)$ **35** $\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$ **36** $(-2.5, 0.75)$

ئەندازە بە ڕوونکردنەوەیی هەر سیستمێکی لاسەنگەکان بنوێنە. ئەو شێوە ئەندازەییەی ناوچە شیکارەکە دەنوێنێت ناوی بنی (وانەی $2-3$)

37 $\begin{cases} y\le 6 \\ y-2x\ge 0 \\ x\ge 0 \end{cases}$ **38** $\begin{cases} y\ge 0 \\ y\le 2 \\ y\le x \\ x+y\le 6 \end{cases}$

بەشی
2

تاقیکردنەوەی نیوەی بەش

1–2 لاسەنگە هێڵییە دوو نەزانراوەکان (دوو گۆڕاوەکان)

بە ڕوونکردنەوەیی هەریەك لەم لاسەنگە هێڵییە دوو نەزانراوانە شیکاربکە.

1 $y-1\le 5$

2 $2x+5y>10$

3 $3x-4y>5x+12$

4 $3(2x-1)+y>6x-4$

5 تارا 30 000 دیناری پێیە بۆ کڕینی کارتی پیرۆزبایی. نرخی کارتێکی گەورە 2500 دینار و نرخی کارتێکی بچووك 1500 دینارە. لاسەنگەیەك بنووسە بارەکە بنوێنێت. دوو نەزانراو بەکاربێنە کە هێمای هەریەکێکیان ژمارەی جۆرێك لە کەرتەکان بێت. بە ڕوونکردنەوەیی لاسەنگەکە شیکاربکە.

2–2 نموونە هێڵییەکان

6 پزیشکێکی منداڵان بۆ ماوەی چەند حەفتەیەك ئەمانەی تۆمارکرد. چەند کاتژمێر لە هەفتەیەکدا کاریکردووە. چەند هەزار دیناری لە کارەکەی وەرگرتووە. خشتەی خوارەوە ئەو پێدراوانە ڕووندەکاتەوە. بۆ ئەو حەفتانەی پزیشکەکە بە هەرەمەکی هەڵیبژاردون.

ژمارەی کاتژمێرەکان	8	23	18	30	12	28
کرێیەکەی	152	465	315	530	240	525

أ ئەو پێدراوانە بەخاڵی ڕوونکردنەوەی بنوێنە، ژمارەی کاتژمێرەکان وەك گۆڕاوی ئازاد بەکاربێنە.

ب بژمێری ڕوونکردنەوەیی بۆ دۆزینەوەی هاوکۆلکەی پەیوەستی و هاوکێشەی ڕاستەهێڵی نواندنی باشترین پێدراوەکان بەکاربهێنە، لاری ڕاستەهێڵەکە بۆ پزیشکەکە چی دەگەیەنێت؟

ج ئەو هاوکێشەیەی دۆزیتەوە بۆ خەملاندنی دەستکەوتی پزیشکەکە بەکاربێنە ئەگەر زانیت 40 کاتژمێر لە هەفتەیەکدا کاردەکات.

3–2 شیکارکردنی سیستمی لاسەنگە هێڵییەکان

بە ڕوونکردنەوەیی هەریەك لە سیستمی لاسەنگەکان شیکاریکە.

7 $\begin{cases} y-x<3 \\ y+x<3 \end{cases}$

8 $\begin{cases} y+x\le 0 \\ y\le 4-x \end{cases}$

9 $\begin{cases} y\ge 2x+3 \\ y>-x \end{cases}$

4–2 پرۆگرامی هێڵی

لە هەریەك لەم پرسیارانەدا، ناوچەی گونجاو بە ڕوونکردنەوەیی دیاریبکە پاشان گەورەترین بەها یان بچوکترین بەها بۆ نەخشە بەسوودەکە $P=4x+5y$ دیاریبکە.

10 $\begin{cases} x\ge 0 \\ y\le x-1 \\ y\le -\frac{1}{2}x+4 \end{cases}$ بچووکترین بەها

11 $\begin{cases} x\le 2 \\ y\ge 0 \\ y\le 2x+4 \\ y\le -3x+9 \end{cases}$ گەورەترین بەها

5-2

شیکارکردنی سیستمی هێڵی بەسێ نەزانراو

Solving Linear systems in 3 unknowns



بۆ چی ئەمە فێر دەبیت؟

دەتوانین سیستمی سێ هاوکێشەی هێڵی بە سێ نەزانراو بەکار بهێنێت بۆ شیکارکردنی زۆر پرسیار لە ژیانی ڕۆژانەماندا، وەك دۆزینەوەی سیستمی بەرزی نمرەکان بۆ وەرگرتن لە کۆلێژی ئەندازە(نموونەی 2).

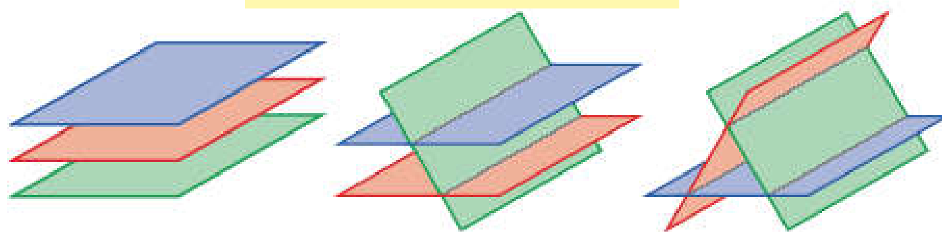
ئامانجەکان

- شیکاری سیستمی هێڵی بە 3 نەزانراو لە بۆشایی پۆوتاندا دەنوێنێت.
- سیستمی هێڵی بە سێ نەزانراو بەجەبری شیکار دەکات.

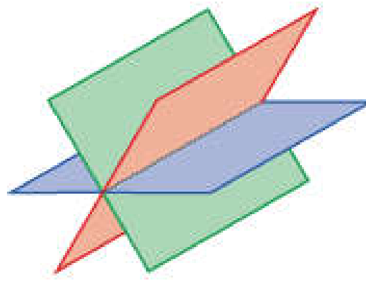
لە پۆلەکانی پێشوودا فێربوویت چۆن سیستمی هێڵی بۆ دوو هاوکێشەی هێڵی دوو نەزانراو یان سیستمی هێڵی 2×2 شیکار بکەیت. زۆر جار بەسیستمی هێڵی 3 هاوکێشەیی سێ نەزانراو پێی دەوترێت سیستمی 3×3 بۆ ئەوەی تاکە شیکارێك بۆ سیستمی هاوکێشە هێڵییەکان بدۆزیتەوە بەگشتی پێویست بەوە هەیە کە ژمارەی هاوکێشەکان یەکسان بێت بە ژمارەی نەزانراوەکان.
بەبیر خۆتی بێنەوە لە بەشی پێشوودا کە هاوکیشەی هێڵی بە سێ نەزانراو لە پۆشایی پۆوتاندا بە هۆی ڕووتەختەوە دەنوێنرا. کاتێك سیستمێکی هێڵی لە 3 هاوکێشەی سێ نەزانراو لە بۆشایی پۆوتاندا دەنوێنێت سێ ڕووتەختت دەستکەوێت. لەوانەیە ئەو ڕووتەختانە یەکتری ببڕن یان نەیبڕن هەر خاڵێکی هاوبەش لە نێوان هەرسێ ڕووتەختەکەدا شیکاری سیستمەکەدەنوێنێت. لەوەوە دەستمان دەکەوێت کە سیستمەکەیەك شیکاری هەیە یان ژمارەیەکی نادیار شیکاری هەیە و هەندێك جار لەوانەیە شیکاری نەبێت.

فێربە و سەرنج بدە

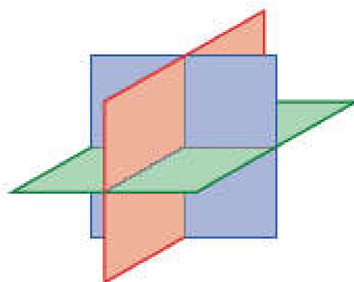
سیستمە ئەستەمەکان (شیکاریان نییە)



سیستمە دیارینەکراوەکان ژمارەیەکی ناکۆتا شیکاریان هەیە)



سیستمە دیاریکراوەکان (شیکاری تاقانەیان هەیە)



لەوانەیە دیاریکردنی شیکارەکانی سیستەمی هێڵی 3×3 بە بەکارهێنانی نواندنی لە بۆشایی پۆوتانەکاندا کارێکی گران بێت. بەڵام دەتوانیت ئەم سیستەمە بە جەبری شیکار بکەیت بە بەکارهێنانی لابردن و لە جیاتیدانان بۆ گۆڕینی لە سیستەمی هێڵی3×3 بۆ سیستەمی هێڵی2×2 پاشان سیستەمی پەیدابوو شیکاربکەیت بەو ڕێگایانەی لەوانەکانی پێشوودا فێربوویت.

نموونــــه 1 شیکارکردنی سیستەمی هێڵی 3 هاوکێشە بە سێ نەزانراو

ڕێگای لابردن بۆ شیکاکردنی ئەم سیستەمە هێڵییەی خوارەوە بەکاربێنە.

$$\begin{cases} x+2y-3z=-2 & ❶ \\ 2x-2y+z=7 & ❷ \\ x+y+2z=-4 & ❸ \end{cases}$$

هەنگاوی 1 یەکێك لە سێ نەزانراوەکە لاببە باشتر وایە نەزانراوی y لابەیت، چونکە هاوکۆلکەکان لە دوو هاوکێشەی ❶ و ❷ پێچەوانەی نیشانەن

هاوکێشەی ❶ و ❷ کۆبکەوە

$$\begin{array}{lr} ❶ & x+2y-3z=-2 \\ ❷ & 2x-2y+z=7 \\ \hline ❹ & 3x \quad -2z=5 \end{array}$$

هەردوو هاوکێشەی ❶ و ❸ بەکاربێنە بۆ دۆزینەوەی هاوکێشەیەکی تر بە دوو نەزانراوی x و z

هاوکێشەی ❸ لە -2 بدە و ئەنجامەکەی لەگەڵ هاوکێشەی ❶دا کۆبکەوە.

$$\begin{array}{ll} ❶ & x+2y-3z=-2 \\ ❸ & -2(x+y+2z=-4) \rightarrow \end{array} \quad \begin{array}{r} x+2y-3z=-2 \\ -2x-2y-4z=8 \\ \hline ❺ \quad -1x \quad -7z=6 \end{array}$$

لێرەدا سیستمی هێڵی 2×2 مان هەیە.

$$\begin{cases} 3x-2z=5 & ❹ \\ -x-7z=6 & ❺ \end{cases}$$

هەنگاوی 2 نەزانراوێکی تر لاببە، هاوکێشەی پەیدابوو شیکاربکە بەهای نەزانراوی سێیەمت دەست دەکەوێت، نەزانراوی x لاببە.

هاوکێشەی ❺ لێکدانی 3 بکە و لەگەڵ هاوکێشەی ❹ کۆبکەوە.

$$\begin{array}{ll} ❹ & 3x-2z=5 \\ ❺ & 3(-x-7z=6) \rightarrow \end{array} \quad \begin{array}{r} 3x-2z=5 \\ -3x-21z=18 \\ \hline -23z=23 \\ z=-1 \end{array}$$

هەنگاوی 3 یەکێك لە دوو هاوکێشەی سیستمی 2×2 بۆ هەژمارکردنی بەهای x بەکاربێنە.

لە جیاتی z بەهاکەی -1 دابنێ

$$\begin{array}{lr} ❶ & -x-7z=6 \\ ❷ & -x-7(-1)=6 \\ & x=1 \end{array}$$

هەنگاوی 4 بەهاکانی x و z لەیەکێك لە هاوکێشە بنەڕەتییەکاندا دابنێ، بەهای y هەژماربکە.

لە جیاتی دانان

$$\begin{array}{lr} ❶ & x+y+2z=-4 \\ ❷ & (1)+y+2(-1)=-4 \\ & y=-3 \end{array}$$

شیکاری سیستمەکەبریتییە لە $(1, -3, -1)$



1. ڕێگای لابردن بۆ شیکارکردنی ئم سیستمەی خوارەوە بەکاربێنە.

$$\begin{cases} -x+y+2z=7 \\ 2x+3y+z=1 \\ -3x-4y+z=4 \end{cases}$$

دەشتوانیت ڕێگای لە جیاتیدانان بۆ شیکارکردنی سیستمی هێڵی 3×3 بەکاربێنیت هەروەها لێرە بیرۆکەی گۆڕینی سیستمی 3×3 بۆ سیستمی 2×2 پێویستە.

نموونـــه 2 جێبەجێکردن لەسەر پێشبرکێی وەرگرتن

پاڵێوراو	بیرکاری	زانستەکان	زمانی ئینگلیزی	سەرجەم
سۆزان	90	60	70	700
ئازاد	60	70	80	590
هوشیار	0	60	60	240

ئارەزوومەندان بۆ وەرگرتن لە کۆلێجی ئەندازیاری ناچاردەبن بە پێشبرکێ لە 3 بابەت بیرکاری و زانستەکان و زمانی ئینگلیزی دەبەستن لیژنەی پشکنین پشت بەنمرە بەرزی پاڵێوراوەکان دەبەستێت «نمرەکەی لێکدانی ژمارەیەك دەکرێت» بەرزی نمرەی هەربابەتێك جیاوازە لە نمرەکانی دوو بابەتەکەی تر. ئەم خشتەیەی بەرامبەر نمرەی 3 پاڵێوراو لە سێ بابەت، و کۆنمرەی هەریەکەیان دوای نمرە بەرزی دەنوێنێت، پێدراوەکانی خشتەکە بۆ دۆزینەوەی بەرزی نمرەی هەر بابەتێك بەکاربێنە.

هەنگاوی 1 هێمای گوراوی x بۆ بەرزی بابەتی بیرکاری و گۆڕاوی y بۆ نمرە بەرزی بابەتی زانستەکان و گۆڕاوی z بۆ نمرەی بەرزی زمانی ئینگلیزی بەکاربێنە، سیستمی هاوکێشەکان بنووسە کە پێدراوی ناو خشتەکە بنوێنێت.

$$\begin{cases} 90x+60y+70z=700 & \text{❶} \\ 60x+70y+80z=590 & \text{❷} \\ 60y+60z=240 & \text{❸} \end{cases}$$

نمرەکانی سۆران
نمرەکانی ئازاد
نمرەکانی هۆشیار

تێبینی گۆڕاوی x بکە نمرەکەی دیارنییە لە هاوکێشەی سێیەم. لەبەر ئەوەی هۆشیار لەوانەی بیرکاری سفری وەرگرتوە نەبوونی گۆڕاوێك هیچ لە کارەکە ناگۆڕێت، ئەگەر سەیری هاوکێشەی 3بکەیت دەتوانیت بەهای y بەهۆی z وە بدۆزیتەوە. ئەم کارە یارمەتیدەرە بۆ بەکارهێنانی لە جیاتیدانان لە گۆڕینی سیستمەکەبۆ سیستمی هێڵی لە دوو هاوکێشەی دوونەزانراو.

هەنگاوی 2 بەبەکارهێنانی هاوکێشەی ❸ هەژماری گۆڕاوی y بەبێ گۆڕاوی z بکە

$$60y+60z=240$$
$$y=4-z$$

y هەژماربکە بەپێ گۆڕاوی z

هەنگاوی 3 لە هەردوو هاوکێشەی❶ و ❷ دا، لە جیاتی y بەهاکەی دابنێ.

$$\begin{cases} 90x+60(4-z)+70z=700 \rightarrow \\ 60x+70(4-z)+80z=590 \rightarrow \end{cases} \begin{cases} 90x+10z=460 & \text{❹} \\ 60x+10z=310 & \text{❺} \end{cases}$$

لەجیاتی دانێ وسادەبکە

هەنگاوی 4 لابردنی بەکاربهێنە بۆ شیکاری ئەو سیستمەی دەستکەووتوە، هاوکێشە❺ لە هاوکێشەی ❹ دەربکە

$$90x+10z=460 \quad \text{❹}$$
$$60x+10z=310 \quad \text{❺}$$
$$30x \qquad =150 \quad \text{❻}$$

هەنگاوی 5 ئەو هاوکێشەی دەستتکەوتووە شیکاری بکە.

$$30x=150$$
$$x=5$$

هەنگاوی 6 لەجیاتی x بەهاکەی لە هاوکێشەی❹ دا دابنێ بۆ هەژمارکردنی بەهای z .

$$90(5)+10z=460$$
$$10z=10$$
$$z=1$$

هەنگاوی 7 لە هاوکێشەی ❶ دا هەریەکە لە بەهاکانی x ، z دابنێ بۆ هەژمارکردنی بەهای y

$$90(5)+60y+70(1)=700$$
$$60y \qquad =180$$
$$y \qquad =3$$

سیستمەکەیەك شیکاری هەیە $(5, 3,1)$نمرەکانی بیرکاری بە هاوکۆڵکەی 5 و زانستەکان بە هاوکۆڵکەی 3 و ئینگلیزی بە هاوکۆڵکەی 1 بەرز دەکرێتەوە.



2. بەرزی نمرەی هەر بابەتێك لە پێشبڕکێی چوونە کۆلێجی پزیشکی بە پێی ئەم خشتەی پێدراوانە دیاریبکە.

پالێوراو	بیرکاری	زانستەکان	زمانی ئینگلیزی	سەرجەم
شیرین	80	70	50	430
سۆلاف	70	80	0	370
سانا	90	70	80	490

بۆ هەریەکە لە سیستمەکانی نموونەیی 1 و 2 تەنهایەك شیکار هەیە. بەڵام دەگونجێت سیستمی هێڵی 3×3 شیکاری نەبێت یان ژمارەیەکی دیارینەکراو شیکاری هەبێت.

نموونــــە 3 پۆلێنکردنی سیستمی هاوکێشەی هێڵی 3×3

ئەو سیستمە پۆلێنبکە و ژمارەی شیکارەکانیشی دیاربکە.

$$\begin{cases} 4x-2y+4z=8 & \text{❶} \\ -3x+y-z=-4 & \text{❷} \\ -2x+2y-6z=4 & \text{❸} \end{cases}$$

دەتوانین ڕێگای لابردن بەکاربهێنین چونکە دوو هاوکۆلکەی گۆڕاوی y لە دوو هاوکێشەی ❶ و ❸ دژیەکن لە نیشانەدا، ئەم دوو هاوکێشە کۆبکەوە.

$$\begin{array}{rl} 4x-2y+4z=8 & \text{❶} \\ -2x+2y-6z=4 & \text{❸} \\ \hline 2x\qquad -2z=12 & \text{❹} \end{array}$$

$$4x-2y+4z=8 \qquad\qquad 4x-2y+4z=8$$

$$2(-3x+y-z=-4)\rightarrow \qquad \begin{array}{rl} -6x+2y-2z=-8 & \\ \hline -2x\qquad +2z=0 & \text{❸} \end{array}$$

سیستمێك لە دوو هاوکێشەی هێڵی دوو نەزانراوت دەستکەوت.

$$\begin{cases} 2x-2z=12 & \text{❹} \\ -2x+2z=0 & \text{❺} \end{cases}$$

گۆڕاوی x لاببە دوو هاوکێشەی ❹ و ❺ کۆبکەوە.

$$\begin{array}{rl} \text{❹} & 2x-2z=12 \\ \text{❺} & -2x+2z=0 \\ \hline & 0=12 \;\times \end{array}$$

لەبەرئەوەی 0 یەکسان نابێت بە 12 ئەم یەکسان بوونە هەڵەیە لەمەوە دەردەچێت ئەم سیستمە ئەستەمە.



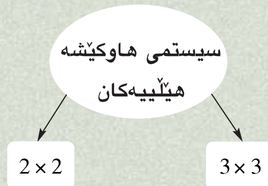
3. هەریەکە لەم سیستمانە پۆلێنبکە و ژمارەی شیکارەکانی دیاریبکە.

أ $\begin{cases} 3x-y+2z=4 \\ 2x-y+3z=7 \\ -9x+3y-6z=-12 \end{cases}$

ب $\begin{cases} 2x-y+3z=6 \\ 2x-4y+6z=10 \\ y-z=-2 \end{cases}$

بیربکەوە و تاوتوێبکە

1. بڕوانە سیستەمە ئەستەمەکان و بێسنوورەکان (غير المحددة) کە لە لاپەڕەی یەکەمی وانەکەدا هاتووە. بارێکی تر باسبکە بۆ سێ ڕووتەخت کە سیستەمێکی ئەستەم بنوێنێت، و بارێکی تر کە سیستەمێکی بێسنوور بنوێنێت.
2. ڕێکخەربە ئەم خشتەیە دروستبکە و تەواوی بکە لایەنە هاوشێوە و لایەنە جیاکان لە نێوان سیستەمی هێڵی 3×3 و سیستەمی هێڵی 2×2 باسبکە.





5-2 ڕاهێنانەکان

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

بڕوانە نموونە 1

ڕێگای لابردن بۆ شیکارکردنی هەر سیستمێك بەکاربێنە.

1 $\begin{cases}-2x+y+3z=20\\-3x+2y+z=21\\3x-2y+3z=-9\end{cases}$

2 $\begin{cases}x+2y+3z=9\\x+3y+2z=5\\x+4y-z=-5\end{cases}$

3 $\begin{cases}x+2y+z=8\\2x+y-z=4\\x+y+3z=7\end{cases}$

بڕوانە نموونە 2

4 **کارگێڕی کار** بەڕێوەبەرایەتی باخچەی ئاژەڵان سێ جۆر کارت دەفرۆشێت بۆ منداڵان و نەوجەوانان و گەورەکان. ئەم خشتەیە فرۆشراوی کارتەکانی چوونە ناو باخچەی ئاژەڵان پێشاندەدات لە ماوەی 3 کاتژمێردا ئەوا نرخی هەر جۆرە کارتێك بدۆزەوە.

چوونە ناو باخچەی ئاژەڵان

کارت	گەورەکان	نەوجەوانان	منداڵان	نرخی فرۆشراوەکان
16:00 – 15:00	5	10	12	310 000
17:00 – 16:00	5	5	4	155 000
18:00 – 17:00	4	2	3	92 000

بڕوانە نموونە 3

هەریەك لەو سیستەمە هێڵییانە پۆلێنبکە و ژمارەی شیکارەکانی دیاریبکە.

5 $\begin{cases}2x+4y-2z=4\\-x-2y+z=4\\3x+6y-3z=10\end{cases}$

6 $\begin{cases}2x+4y-5z=-10\\-x-2y+8z=16\\-2x+4y+2z=4\end{cases}$

7 $\begin{cases}-2x+3y+z=15\\x+3y-z=-1\\-5x-6y+4z=-16\end{cases}$

ڕاهێنان و شیکارکردنی پرسیارەکان

بوشیکارکردنی ڕاهێنانەکان	سەیری نموونە بکە
8- 10	1
11	2
12- 14	3

ڕاهێنانی ئازاد

بۆ شیکارکردنی هەر سیستمێك ڕێگای لابردن بەکاربێنە.

8 $\begin{cases} 2x-y-3z=1 \\ 4x+3y+2z=-4 \\ -3x+2y+5z=-3 \end{cases}$

9 $\begin{cases} 5x-6y+2z=21 \\ 2x+3y-3z=-9 \\ -3x+9y-4z=-24 \end{cases}$

10 $\begin{cases} 4x+7y-z=42 \\ -2x+2y+3z=-26 \\ 2x-3y+5z=10 \end{cases}$

11 **بۆ خۆشی** لە پێشبڕکێی گۆرانیبێژی ئایندە. لێژنەی هەڵسەنگاندن بە پێی سێ پێوەر « بەهرە و وەستان لەسەر شانۆ و بەجێهێنان» کە بۆ هەریەك لە پێوەرەکان ڕێژەی سەدی لە هەڵسەنگاندنی کۆتایی دیاریکراوە. گۆرانیبێژە کە هەڵدەبژێرن. ئەم خشتەیەی خوارەوە هەڵسەنگاندنی سێ لە پێشبڕکێکەرانی تێدادیاریکراوە. بە پێی پێوانەیەك بۆ هەڵسەنگاندنی کۆتایی زیاد دەکرێت. ڕێژەی سەدی هەڵسەنگاندنی کۆتایی بۆ هەر پێوانەیەکیان چەندە؟

پێشبڕکێی گۆرانیبێژی ئایندە				
پێشبڕکێکەران	بەهرە	وەستان لەسەر شانۆ	بەجێهێنان	هەڵسەنگاندنی کۆتایی
زانا	8	9	10	9.2
ڤیان	9	7	8	8.1
ئاراس	6	10	8	7.8

هەریەکە لەم سیستمە هێڵییانە پۆلێن بکە و ژمارەی شیکارەکانی دیارییکە.

12 $\begin{cases} 4x-3y+z=-9 \\ -3x+2y-z=6 \\ -x+3y+2z=9 \end{cases}$

13 $\begin{cases} 3x+3y+3z=4 \\ 2x-y-5z=2 \\ 5x+2y-2z=8 \end{cases}$

14 $\begin{cases} -x+y+z=8 \\ 2x-2y-2z=-16 \\ 2x-y+4z=-6 \end{cases}$

15 **ئەندازە** لە سێگۆشەی ABCدا پێوانەی گۆشەی A دوو ئەوەندەی سەرجەمی پێوانەی هەردوو گۆشەی C و B . هەروەها پێوانی گۆشەی B سێ ئەوەندەی پێوانەی گۆشەی C. ئەوا پێوانەی هەریەکەیان چەندە؟

16 **وەرزش** لە مێژووی یەکێتی تۆپی سەبەتەی ئەمریکا (لوی دامیە) یەکەم کەس بوو کۆی خاڵە تۆمارکراوەکانی بگاتە 13 726 خاڵ کە دابەشکراوە بەسەر گۆڵی سێ خاڵی و گۆڵی دوو خاڵی و گۆڵی یەك خاڵیدا. دامیبە 2 144 خاڵی لە گۆڵی دوو خاڵی زیاتر لەوەی لە گۆڵی یەك خاڵ تۆمارکردووە و 1 558 خاڵی لە گۆڵی یەك خاڵی تۆمارکردوە. زیاتر لەوەی لە گۆڵی سێ خاڵی بەدەستیهیناوە. چەند خاڵی لە گۆڵی یەك خاڵی لە هەر جۆرێك لە جۆرەکانی گۆڵ تۆمارکردووە.

17 **بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە** ئەم سیستمەی خوارەوە لە دوو هاوکێشەی سێ نەزانراو پێکهاتووە.

$\begin{cases} x+2y+4z=4 \\ 2x+3y+z=12 \end{cases}$

أ چی ڕوودەدات کاتێك هەوڵی شیکارکردنی ئەم سیستمە دەدەیت، باسیبکە

ب ڕونیبکەوە هۆی چیە نابێت ژمارەی هاوکێشەکانی سیستمی هێڵی کەمتربێت لە ژمارەی نەزانراوەکان. بۆ ئەوەی سیستمەکەتەنهایەك شیکاری هەبێت.

18 **بنووسە** هەر ڕووتەختێك لە نێوان سێ ڕووتەختدا یەکتری دەبڕن کە سیستمی هاوکێشە هێڵییەکان 3×3 بەپێی ڕاستەهێڵ دەنوێنێت. جۆری ئەو شیکارەی لە تواناداىە بۆ ئەم سیستمە چییە؟

19 ئەم سیستەمەی خوارەوە سێ ڕوو بۆ هەرەمێکی سێینیە دەنوێنێت (هەر هاوکێشەیەك ڕووتەختێك دەنوێنێت) کاتێك بنکەی هەرەمەکە دەکەوێتە ڕووتەختی پۆتانی XY پێوانەکان بەمەترە.

$$\begin{cases} x+y+z=53 \\ 3x-2y+z=69 \\ -x+2y-z=-59 \end{cases}$$

أ پۆتانی لووتکەی هەرەمەکە چەندە؟

ب ئەندازیارەکە ستوونێکی بۆ هەرەمەکە دانا بۆ ڕاگرتنی لوتکەی هەرەمەکە، بەرزی ئەو ستوونە چەندە؟

ج پۆتانی خاڵی ڕاگری ئەستوونە کە چەندە؟



ئامادەکردن بۆ تاقیکردنەوە

20 کام خاڵ شیکاری ئەم سیستەمە دەنوێنێت. $\begin{cases} 2x+y+3z=-1 \\ 4x+2y+3z=1 \\ x-y+4z=-6 \end{cases}$

أ $(2, -2, -1)$ ج $(2, 1, -1)$

ب $(0, 2, -1)$ د $(3, -2, 2)$

21 سۆزان و میران و ساڤان خوشك و بران تەمەنی سۆزان دوو ئەوەندەی تەمەنی میرانە کە 12 ساڵ لە تەمەنی ساڤان کەمترە. پاش 5 ساڵ تەمەنی ساڤان دوو ئەوەندەی تەمەنی میرانی لێدێت تەمەنی هەریەکەیان چەندە؟

أ سۆزان 6 میران 3 ساڤان 15 ج سۆزان 5 میران 10 ساڤان 22

ب سۆزان 34 میران 17 ساڤان 29 د سۆزان 14 میران 7 ساڤان 19

22 **کورتە وەڵام** بەهای x چەندە لە شیکاری سیستەمی $\begin{cases} x+4y=6 \\ 2x+3z=12 \\ 4y+z=10 \end{cases}$

بەرەنگاری و فراوانکردن

23 ڕێگای گونجاو بۆ شیکارکردنی ئەم سیستەمە بەکاربێنە. $\begin{cases} w+2x+2y+z=-2 \\ w+3x-2y-z=-6 \\ -2w-x+3y+3z=6 \\ w+4x+y-2z=-14 \end{cases}$

24 **ئابوری** سێ هاوڕێ سێ جۆر پارەیان: أ ، ب ، ج خستەکارەوە هەریەکەیان یەك ملیۆن دیناری خستەکار هەرسێ جۆرەکەی تێدابوو ئەم خشتەیەی خوارەوە بڕی خستنەکاری هەر جۆرێك لەو پارانە روونەکاتەوە لەگەڵ قازانجەکەی لە کۆتایی ساڵدا. رێژەی سەدی بۆ دەستکەوتی هەر جۆرێك بدۆزەوە.

خستنەکاری پارە				
کەسەکان	أ	ب	ج	قازانج
ئازاد	300 000	300 000	400 000	56 000
نوزاد	600 000	200 000	200 000	76 000
دڵسۆز	100 000	300 000	600 000	30 000

پێداچوونەوەی لولپێچی

پۆتانی وێنەی خاڵی $(-3, 2)$ لە هەر راکێشانێکدا چەندە؟ *(پۆلەکانی پێشوو)*

25 6 یەکە بۆ لای راست، یەك یەکە بۆ سەرەوە.

26 4 یەکە بۆ لای چەپ دوو یەکە بۆ خوارەوە.

27 **بینا** پێوانەکانی ژووری چێشتخانە لەسەر نەخشەی خانوویەك $8\,cm \times 11\,cm$ پێوانەی راستینەیی چەندە؟ ئەگەر پێوەری نەخشەکە $1cm : 0.65m$ بێت؟ *(پۆلەکانی پێشوو)*

هەر هاوکێشەیەك لەمانە بەشێوەی لاری – یەکتربڕین بنووسە. پاشان وێنەی ئەو راستەهێڵە بکێشە کە دەینوێنێت *(پۆلەکانی پێشوو)*

28 $4x - 3y = -6$

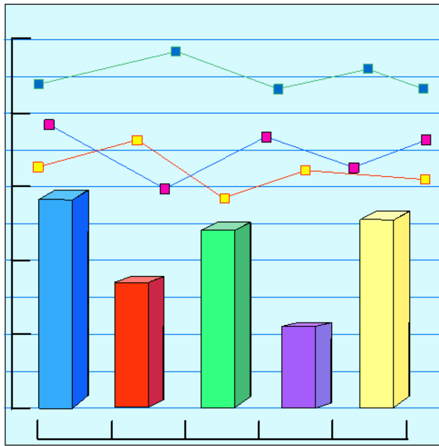
29 $3y - 2x = -12$

30 $2x + 5y = 15$

6–2

پێوانە ئامارییەکان

Statistical Measurements



ئامانجەکان

- دۆزینەوەی پێوەرەکانی ڕووکردنە چەق و پێوەرەکانی پەرتبوون بە پێی پێدراوە ئامارییەکان.
- لێکۆلینەوە لە کاریگەری بەها پەڕگرەکان (المتطرفە) لە کۆمەڵە پێدراوەکان.

زاراوەکان Vocabulary

ناوەندە ژمێرەیی

قورسکراو (المتوسط المثقّل) Weighted average

دابەشبوونی ئەگەر Propability Distribution

لێکنەچوون Variance

لادانی پێوانەیی Standard Deviation

بە ها پەڕگرەکان Outliers

بەها پێشبینیکراوەکان Expected value

چواریەک (الربع) Quartile

کێ ئەمە بەکاردەهێنێت؟

ئامارناسان پێوەرەکانی ڕووکردنە چەق و پێوەرەکانی پەرتبوون بۆ شیکارکردنی پێدراوە ئامارییەکان بەکاردەهێنن (نموونە 2)

لە بیرت بێت کە ناوەندە ژمێرەیی و ناوەڕاستە و باو لە پێوەرەکانی ڕووکردنەچەقن. واتە ئەو پێوانانەیە کە باسی چەقی کۆمەڵە پێدراوەکان دەکەن.

ناوەندە ژمێرەیی Mean : بریتییە لەسەرجەمی گشت بەهایەکان دابەشکرابێت بەسەر ژمارەی بەهایەکاندا. بە هێمای $\overline{x}$ دیاریدەکرێت. **باو Mode** بریتییە لە و بەهایەی کە زۆرترین دووبارەبوونەوەی هەبێت لە کۆمەڵەکەدا. دەگونجێت کۆمەڵە پێدراوێك زیاتر لەیەك باوی هەبێت و دەگونجێت باوی نەبێت. **ناوەڕاستە Median** ئەو بەهایەیە کە دەکەوێتە ناوەڕاستی بەهایەکان کاتێك ڕیزکرابن بەرەو ژوور یان بەرەوژێر کاتێك ژمارەی بەهایەکان تاك بێت، ناوەڕاستە دوو بەهای دەبێت. لە ناوەڕاستدا کاتێك ژمارەیان جووت بێت.

نموونـــــە 1 دۆزینەوەی پێوەرەکانی ڕووکردنەچەق

ناوەندە ژمێرەیی و ناوەڕاستە و باو بۆ ئەم کۆمەڵە پێدراوانە بدۆزەوە.

{6،4 ،3،4 ،2،5 ،3 ،4 ،5،2 ،3،4}

ناوەندە ژمێری: $\overline{x} = \dfrac{4+3+2+5+4+3+5+2+4+3+4+6}{12} = \dfrac{45}{12} = 3.75$

ناوەڕاستە: $2\ 2\ 3\ 3\ 3 : 4 \quad 4 : 4\ 4\ 5\ 5\ 6 \quad \dfrac{4+4}{2} = 4$

باو ئەو بەهایەی زۆرتر لەوانی تر دووبارە بۆتەوە 4 ە واتە باو بریتییە لە 4

خاڵی چاودێری

1. ناوەندە ژمێریی و ناوەڕاستە و باو بۆ هەریەك لەم کۆمەڵە پێدراوانە بدۆزەوە.

أ $\{6،9،3،8\}$ ب $\{2،5،6،2،6\}$

ناوەندی قورسکراو Weighted average ئەو ناوەندەیەکە ڕەچاوی هەژماری دووبارە بوونەوەی هەربەهایەك دەکات. وادابنێ هەڵسەنگاندن بۆ 30 کتێب کرا، وەك لەم خشتەیەی خوارەوە ڕوونکراوەتەوە.

هەڵسەنگاندنی پەرتووك					
هەڵسەنگاندن	★★★★	★★★	★★	★	بێ ئەستێرە
ژمارەی کتێب	8	12	7	2	1

ناوەندی قورسکراو بۆ هەڵسەنگاندنی کتێبەکان بریتییە لە $\dfrac{(4)8+(3)12+(2)7+(1)2+0(1)}{8+12+7+2+1} = \dfrac{84}{30} = 2.8$

بە ناوەندی قورسکراوی کۆمەڵەیەك لە بەهای ژمارەی پەیدا بوو لە تاقیکردنەوەیەك دەوترێت **بەهای پێشبینیکراو Expected value** بۆ تاقیکردنەوەکە. بەهای چاوەڕوانکراو بۆ ژمارەی ئەو ئەستێرانەی هەر کتێبێك وەربگرێت کە لە نێوان 30 کتێبەکەدا بە شێوەیەکی هەڕەمەکی هەڵبژێرێت بریتییە لە 2.8 .

دابەشبوونی ئەگەر **Probability distribution** بۆ تاقیکردنەوەیەکی هەرەمەکی بریتییە لە نەخشەیەك هەر ئەنجامێکی لە توانادا بوو ببەستێت بە ژمارەیەکەوە کە ئەگەری ڕوودانی هەیە.

نموونـــــە 2 دۆزینەوەی بەهای پێشبینیکراو

خشتەی خوارەوە دابەشبوونی ئەگەر بۆ ژمارەی یارییەکانی هەر خولێکی جیهانی لە ساڵەکانی 1923 و بۆ ساڵی 2004 دەنوێنێت. ژمارەی پێشبینیکراوی یارییەکان لەیەك خولدا چەندە؟

خولە جیهانییەکان				
ژمارەی یارییەکان n	4	5	6	7
ئەگەری n یاری	$\frac{5}{27}$	$\frac{5}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{11}{27}$

بەهای پێشبینیکراو $4\left(\frac{5}{27}\right)+5\left(\frac{5}{27}\right)+6\left(\frac{6}{27}\right)+7\left(\frac{11}{27}\right)$ ناوەندی ژمێری قورسکراو بەکاربێنە

$=\frac{20}{27}+\frac{25}{27}+\frac{36}{27}+\frac{77}{27}=\frac{158}{27}\approx 5.85$ سادەبکە

ژمارەی پێشبینیکراوی یارییەکان لە ماوەی یەك خول بریتییە لە 5.85 یاری بەنزیکراوەیی.

ڕۆشنایی

سەرجەمی هەموو ئەگەرەکان لە هەر دابەشبونێکی ئەگەردا یەکسانە بە 1 لە نموونە 2 دەدادەبینین

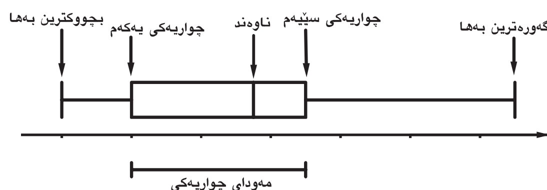
$\frac{5}{27}+\frac{5}{27}+\frac{6}{27}+\frac{11}{27}=1$



2. ئەم خشتەیەی خوارەوە دابەشبوونی ئەگەرە بۆ ژمارەیەك ڕووداوی هاتوچۆ لە ماوەی حەفتەیەکدا لە یەکێك لە چوار ڕێیانی ڕێگایەك بە پشت بەستن بە ئامارەکانی ساڵانی پێشوو. بەهای پێشبینیکراو بۆ ژمارەی ڕووداوەکان لەحەفتەیەکدا بدۆزەوە.

ژمارەی ڕووداوەکان n	0	1	2	3
ئەگەری ڕووداوەکان n ڕوودا	0.75	0.15	0.08	0.02

ڕوونکردنەوەی سمێڵی Box - and - Whisker - Plot ئەم هێڵکارییە دابەشکردنی کۆمەڵە پێدراوەکان دەنوێنێت، لەم ڕوونکردنەوەدا 5 خاڵی سەرەکی هەیە : گەورەترین بەهاو بچووکترین بەها، ناوەراستە، چوارییەکی یەکەم و چوارییەکی سێیەم.

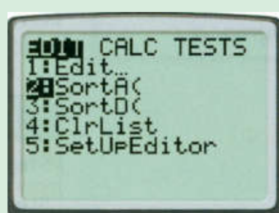


چوارییەکی یەکەم First quartile : بریتییە لە ناوەراستەی بچووکترین بەها لە ناوەڕاستەی کۆمەڵە هێماکەی Q_1

چوارییەکی سێیەم Third quartile : بریتییە لە ناوەراستەی گەورەترین بەها لە ناوەڕاستەی کۆمەڵە هێماکەی Q_3

مەودای چوارییەکی Interquartile range : بریتییە لە جیاوازی نێوان چوارییەکی سێیەم و چوارییەکی یەکەم واتە Q_3-Q_1 واتە 50٪ ی پێدراوەکان دەنوێنێت.

لە خوێندکارەوە بۆ خوێندکار — **کێشانی ڕوونکردنەوەی سمێڵی**



کێشانی ڕوونکردنەوەی سمێڵی پێش دەستپێکردن بە ڕوونکردنەوەی سمێڵی. پێویستە پێدراوەکان ڕێزبکەیت. پێدراوەکان لە بژمێری ڕوونکردنەوەیی دابکە بەبەکارهێنانی لیستەکە . بە پێی هەڵبژاردنەکان STAT پێدراوەکان بەرە و ژوور ڕیزبکە دەتوانیت پرۆگرامی بژمێریی وەك EXCEL بەکاربێنێت بۆ ڕیزکردنی پێدراوەکان.

نموونـــــه 3 دروستکردنی ڕوونکردنەوەیی سمێڵی و دیاریکردنی مەودای چواریەکی

ڕوونکردنەوەی سمێڵی بۆ ئەمانە بکێشە و مەودای چواریەکی بۆ ئەم پێدراوانە دیاریبکە.

$$\{5, 3, 9, 2, 14, 6, 8, 9, 5, 8, 13, 3, 15, 7, 4, 2, 12, 8\}$$

هەنگاوی 1 پێدراوەکان بەرەو ژوور ڕیزبکە.

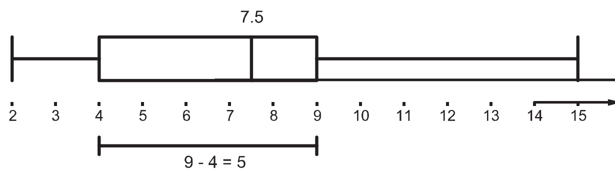
2, 2, 3, 3, 4, 5, 5, 6, 7, 8, 8, 8, 9, 9, 12, 13, 14, 15

هەنگاوی 2 گەورەترین بەهاو بچووکترین بەها و ناوەراستە چواریەکی یەکەم و چواریەکی سێیەم بدۆزەوە.

(2، 2، 3، 3، 4، 5، 5، 6، 7)، (8, 8, 8, 9, 9, 12, 13, 14, 15)

گەورترین بەها   چواریەکی سێیەم   ناوەراستە 7.5   چواریەکی یەکەم   بچوکترین بەها

هەنگاوی 3 دروستکردنی ڕوونکردنەوەی سمێڵی وێنەی تەوەری ژمارەکان بکێشە، پاشان خالێك دیاریبکە بۆ هەر بەهایەك لە پێنج بەهاکە، پاشان وێنەی لاکێشە لە نێوان دوو خالّی چواریەکی یەکەم و چواریەکی سێیەم. لەگەڵ پارچە راستەهێڵێکی ستوونی لە ناوەراستدا. پاشان وێنەی دوو سمێڵ بکە لە خالّی چواریەکی یەکەم بۆ خالّی بچووکترین بەهاو لە خالّی چواریەکی سێیەم بۆ گەورەترین بەها.



مەودای چواریەکی: بریتیە لە 5 ، دەکاتە ماوەی نێوان چواریەکی یەکەم و چواریەکی سێیەم یان درێژی لاکێشە کە .



3. ڕوونکردنەوەی سمێڵی دروستبکە و مەودای چواریەکی بۆ ئەم کۆمەڵە پێدراوانە بدۆزەوە.

$$\{13, 12, 17, 15, 12, 13, 19, 11, 14, 14, 18, 22, 23\}$$

دەگونجێت دوو کۆمەڵە پێدراوی وەك $\{19, 20, 21\}$ و $\{0, 20, 40\}$ هەمان ناوەندە ژمێرەیی و ناوەراستەیان هەبێت. لەگەڵ ئەوەی بە تەواوی لەیەك جیاوازن. بۆیە ئامارناسان زۆر گرنگی بە پەرتبونی پێدراوەکان لەدەرەوەی ناوەندی ژمێرەیی یان ناوەراستە دەدەن. لەبەر ئەوەش پێوانەی نوێیان بۆ دەربڕینی پەرتبوون دانا. لە نێوان ئەم پێوانانەدا **مەودای چواریەکەکان و لێکنەچوون و لادانی پێوانەیی**.

لێکنەچوون Variance بەهێمای σ^2 دەردەبڕێت. بریتییە لە ناوەندی ژمێرەیی دووجای دوورییەکەیان لە نێوان ناوەندە ژمێرەیی و بەهاجیاوازەکان.

لادانی پێوانەیی **Standard deviation** بە هێمای σ دەردەبڕێت. بریتییە لە ڕەگی دووجای لێکنەچوون لە هەموو پێوانە ئامارییەکان بە سوودترە و زیاتر بەکاردەهێنرێت. بچووکی بەهای لادانی پیوانەیی نیشانەیە بۆ بوونی زۆربەی پێدراوەکان لە تەنیشت پێوانەکانی ڕووکردنە چەق. لەگەڵ ئەوەشدا گەورەیی ئەم بەهایە نیشانەیە بۆ پەرتبوونی پێدراوەکان بەدوورکەوتنەوەیان لەو پێوانانەوە.



خوێندنەوە

ئامارناسان هێمای $\bar{x}$ (ئێکس بار) دەخوێننەوە بۆ ناوەندی ژمێرەیی بەکاردێنن و پیتی یۆنانی σ (بەسیگما) بیخوێنەوە بۆلادانی پێوانەی بەکاردەهێنن.

دۆزینەوەی لکێنەچوون و لادانی پێوانەیی	
هەنگاوی 1	ناوەندە ژمێرەیی بۆ پێدراوەکان بدۆزەوە.
هەنگاوی 2	جیاوازی نێوان ناوەندە ژمێرەی و هەر پێدراوێك بدۆزەوە پاشان دووجاکانیان هەژماربکە.
هەنگاوی 3	لێکنەچوون σ^2 بدۆزەوە بە رێگای ژمارە دەستکەوتووەکان لە هەنگاوی 2 و دابەشکردنی بەسەر ژمارەیاندا.
هەنگاوی 4	لادانی پێوانەیی بە هەژمارکردنی رەگی دووجای لێکنەچوون بدۆزەوە.

نموونە 4 دۆزینەوەی ناوەندە ژمێری و لادانی پێوانەیی

ئەم کۆمەڵەیە $\{14, 13, 16, 9, 3, 7, 11, 12, 11, 4\}$ ڕێژەی مادەیەکی دیاریکراو لە خوێنی نەخۆشێك دەنوێنێت لە ماوەی 10 ڕۆژدا. ناوەندی ژمێرەیی و لادانی پێوانەیی بۆ ئەم پێدراوانە بدۆزەوە.

هەنگاوی 1 ناوەندە ژمێرەیی بدۆزەوە.

$$\bar{x} = \frac{4+11+12+11+7+3+9+16+13+14}{10} = 10$$

هەنگاوی 2 جیاوازی نێوان ناوەندی ژمێرەیی و هەر بەهایەك بدۆزەوە و دووجایەکەی هەژماربکە.

x نرخی	4	11	12	11	7	3	9	16	13	14
$x-\bar{x}$	−6	1	2	1	−3	−7	−1	6	3	4
$(x-\bar{x})^2$	36	1	4	1	9	49	1	36	9	16

هەنگاوی 3 لکێنەچوون بدۆزەوە.

$$\sigma^2 = \frac{36+1+4+1+9+49+1+36+9+16}{10} = 16.2$$

هەنگاوی 4 لادانی پێوانەیی بدۆزەوە

$\sigma = \sqrt{16.2} \approx 4.02$ لادانی پێوانەیی بریتییە لە ڕەگی دووجای موجەبی لێکنەچوون،
ناوەندە ژمێرەیی پێدراوەکان دەکاتە 10 و لادانی پێوانەیی دەکاتە 4.02 بە نزیکەیی.



4. ناوەندی ژمێرەیی و لادانی پێوانەیی بۆ ئەم پێدراوانەی خوارەوە بدۆزەوە.
دەربارەی ژمارەی جارەکانی وەستانی سەرخەرێك لە هاتووچۆکردنەکانیدا
$\{0, 3, 1, 1, 0, 5, 1, 0, 3, 0\}$

بەهای پەڕگر Qutiliers لە کۆمەڵەیەك پێدراودا، ئەو بەهایەی دەکەوێتە دەرەوەی ڕێسای زۆرینەی بەهایەکانی کۆمەڵەکەوە. وەکو ئەو بەهایەی کە زۆر گەورەتر بێت لێیان و یان زۆر بچووکتربێت لێیان بوونی ئەم جۆرە بەهایە بە توندی کاریگەری لەسەر ناوەندی ژمێرەیی و لادانی پێوانەیی دەبێت. ئەگەر بەهای پەڕگر لە ئەنجامی هەڵە پێوانەدا بێت، ئامارناسان خۆیان لای دەبەن. زۆر ڕێگە هەیە بۆ دیاریکردنی بەهای پەڕگر. لە و ڕێگایانە کاتێك بەهایەکە سێ ئەوەندەی لادانی پێوانەیی دوور بێت لە ناوەندی ژمێرەییەوە بەبەهای پەڕگردادەنرێت.

نموونە 5 خوێندنی بەهای پەڕگرەکان

ئەم کۆمەڵەیەی خوارەوە نمرەکانی خوێندکارانی پۆلی دەیەم لە تاقیکردنەوەی بیرکاری نیشان دەدات $\{51, 55, 56, 53, 56, 48, 96, 48, 54, 47, 50, 52, 57, 58, 59, 45, 55\}$

هەنگاوی 1 پێدراوەکان لە لیستی L1 بخەرە ناو بژمێرەی ڕوونکردنەوەییەوە.

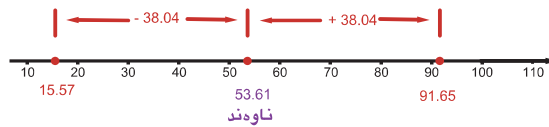
هەنگاوی 2 ناوەندی ژمێرەیی و لادانی پێوانەیی بدۆزەوە STATدابگرە. پاشان CALC هەڵبژێرە. پاش ئەو1:1-variable دوگمەی ENTER دابگرە لە شاشەی بەرامبەر: ناوەندە ژمێرەیی 55.29 بە نزیکەیی.
لادانی پێوانەیی: 10.92

1-Var Stats
x̄=55.29411765 — ناوەندە ژمێرەیی
Σx=940
Σx²=54012
Sx=11.27921044
σx=10.94244142 — لادانی پێوانەیی
↓n=17

هەنگاوی 3 بەهای پەڕگر دیاریبکە بەدوای ئەو بەهایەدا بگەڕێ کە دوورە لە ناوەندی ژمێریی بە سێ ئەوەندەی لادانی پێوانەیی.
سێ ئەوەندەی لادانی پێوانەیی بریتییە لە $3 \times 10.92 = 32.76$

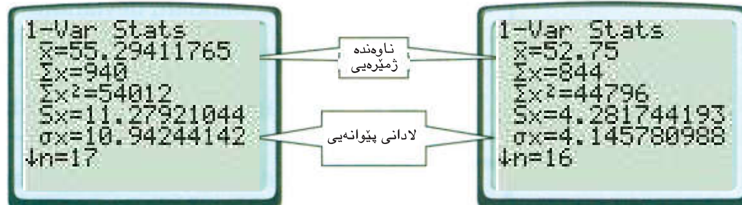
لەبیرت بێت

پێدراوەکان لە بژمێری ڕونکردنەوەیی بە داگرتنی دوگمەی STAT و هەڵبژاردنی 1:Edit دەبێت.



بەهای پەرگر ئەو بەهایەیە کە زیاترە لە$91.65 = 53.61 + 38.04$ یان کەمترە لە $53.61 - 38.04 = 15.57$
لێرەدا یەك بەهای پەرگرمان هەیە ئەویش 96

هەنگاوی 4 بەهای پەرگر لاببە بۆ دیاریکردنی کاریگەری لەسەر ناوەندی ژمێرەیی و لادانی پێوانەیی.



بوونی بەهای پەرگر بۆتە هۆی بەرزبوونەوەی ناوەندی ژمێرەیی لە 51.11 بۆ 53.61
بەرزبوونەوەی لادانی پێوانەیی لە 7.64 بۆ 12.68 .



5. بەهای پەرگر لە نێوان ئەم کۆمەڵە پێدراوانە دا دیاریبکە $\{3, 19, 4, 4, 2, 3\}$
کاریگەری چۆنە لەسەر ناوەندی ژمێرەیی و لادانی پێوانەیی ڕوونبکەوە.

بیربکەوە و تاوتوێبکە



1. کاریگەری زیادکردنی هەمان ژمارە بۆ هەر بەهایەك لە کۆمەڵەی پێدراوەکان لەسەر ناوەندی ژمێرەیی ئەو کۆمەڵەیە ڕوونبکەوە.

2. کاریگەری زیادکردنی هەمان ژمارە بۆ هەر بەهایەك لە کۆمەڵەی پێدراوەکان لەسەر لادانی پێوانەیی ئەو کۆمەڵەیە ڕوونبکەوە.

3. کاریگەری دوو ئەوەندەکردنی لێکنەچوون لەسەر لادانی پێوانەیی چییە؟

4. ڕێکخەربە هێڵکارییەکە دروستبکەوە و تەواوییکە لەناو هەر خانەیەك پێناسەی ئەوە بنووسە کە تێیدایە و نموونەی لەسەر بێنەوە.



6-2 ڕاهێنانەکان

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

1 **زاراوەکان** ئەو پێوەری پەرتبوونەی کە زۆرترین بەکاردێت بریتییە لە ___؟___
(لێکنەچوون یان لادانی پێوانەیی)

پڕوانە نموونە 1

بۆهەر کۆمەڵە پێدراوێك ناوەندی ژمێرەیی و ناوەڕاستە و باو بدۆزەوە.

2 $\{5,7,4,7,6,7\}$

3 $\{2,4,4,6,6,6,7,8\}$

4 $\{10,14,18,22,26\}$

پڕوانە نموونە 2

5 بەهای پێشبینكراوی خەڵاتەکە بدۆزەرە.

بەدەستهێنانی خەڵاتەکە						
بەها	0	1 000	5 000	20 000	100 000	1 000 000
ئەگەر	0.9359	0.05	0.01	0.003	0.001	0.0001

پڕوانە نموونە 3

ڕوونکردنەوەی سمێڵی بۆ هەر کۆمەڵە پێدراوێك دروستبکەو مەودای چواریەکی بدۆزەوە.

6 $\{3, 5, 2, 2, 8, 9, 1, 11\}$

7 $\{2, 4, 1, 4, 2, 2, 7, 4\}$

8 $\{33, 34, 31, 27, 22\}$

پڕوانە نموونە 4

لێکنەچوون و لادانی پێوانەیی بۆ هەر کۆمەڵەیەك لە پێدراوەکان بدۆزەوە.

9 $\{3, 3, 4, 5, 5\}$

10 $\{10, 12, 14, 15, 18, 20, 23\}$

11 $\{7, 14, 21, 28, 35, 42\}$

پڕوانە نموونە 5

12 **پێوانە** مامۆستای پۆلی چوارەم داوای لە قوتابییەکان کرد درێژی ئەو مێزەی لەسەری دانیشتوون بە سانتیمەتر پێوانە بکەن. مامۆستا پێوانەکانی قوتابییەکانی بەم شێوەیە تۆمارکرد: 49، 50، 49، 48، 19، 50، 49، 48، 50، 49، 50 بەهای پەرگر دیارییکە. ڕوونیبکەوە چۆن بە بەهای پەرگر کاردەکاتە سەر هەریەکە لە ناوەندی ژمێرەیی و لادانی پێوانەیی.

ڕاهێنان و شیکاری پرسیارەکان

ڕاهێنانی ئازاد	
بۆشیکارکردنی ڕاهێنانەکان	سەیری نموونە بکە
15-13	1
16	2
19-17	3
22-20	4
23	5

بۆ هەر کۆمەڵە پێدراوێك ناوەندی ژمێرەیی و ناوەراستە و باوو بدۆزەوە.

13 $\{4, 16, 25, 9, 36, 49\}$

14 $\{5, 10, 15, 20, 25\}$

15 $\{1, 7, 7, 2, 3, 14, 127, 8\}$

16 ژمارەی پێشبینیکراوی بۆ ژمارەی جارەکانی دەستکەوتنی شێر بدۆزەوە.

هەڵدانی سێ پارچە پارەی کانزایی				
ژمارەی جارەکان	0	1	2	3
ئەگەر	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

ڕوونکدنەوەی سمیڵی بۆ هەر کۆمەڵە پێدراوێك دروستبکە و مەودای چواریەکی بدۆزەوە.

17 $\{12, 15, 12, 6, 18, 29\}$

18 $\{2, 2, 3, 8, 2, 8, 2, 42\}$

19 $\{3, 4, 3, 1, 2\}$

لێکنەچوون و لادانی پێوانەیی بۆ هەر کۆمەڵە پێدراوێك بدۆزەوە.

20 $\{4, 4, 4, 4, 5\}$

21 $\{8, 12, 30, 35, 48, 50, 62\}$

22 $\{14, 26, 40, 52\}$

23 **تۆپی سەبەتە** ئاری لە 13 یاری تۆپی سەبەتەدا بەشداریکرد و ئەم خاڵانەی تۆمارکرد 24، 16، 9، 17، 17، 23، 20، 26، 17،14، 58، 27، 28 ناوەندە ژمێرەیی و لادانی پێوانەی بدۆزەوە. بەهای پەرگر دیاریبکە کاریگەری لەسەر بەهای هەریەکە لە ناوەندی ژمێرەیی و لادانی پێوانەیی باسبکە.

24 **بیری ڕەخنەگرانە** کۆمەڵە پێدراوێك بنووسە کەناوەندی ژمێرەیی و ناوەڕاستە لە نێوانیاندا نەبێت.

25 **بازارکردن** هەرێم چوو بۆ بازار بۆ کڕینی گەرمی پێوێکی باش. بۆ پێوانەکردنی پلەی گەرمی ژوورەکەی لەیەکێك لە دوکانەکاندا 4 گەرمی پێوی تێدابوو ئەم پلە گەرمیانەییان نیشاندەدا 25، 26، 24، 8 کام پێوەر لە پێوەرکانی ڕووکردنەچەق پێویستە هەرێم بەکارینەهێنێت بۆ هەڵبژاردنی گەرمی پێوی گونجاو.

هەندێك لە ئامارناسان وایانداناوە کە بەهایەك لە ناو بەهاکانی کۆمەڵە پێدراوەکان بەهای پەرگرە. ئەگەر کەمتربێت (چواریەکی یەکەم– 1.5 × مەودای چارەکی) یان زیاتر بێت لە (چوارەکی سێیەم + 1.5 × مەودای چواریەکی).

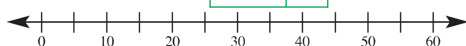
بە بۆچوونی ئەو ئامارناسانە کام بەها لەناو کۆمەڵەکانی خوارەوە بەهای پەرگرە؟

26 $\{2, 3, 4, 5, 5, 25\}$

27 $\{91, 90, 79, 15, 82, 90, 88\}$

28 $\{1, 36, 34, 33, 35, 92\}$

دوو ڕوونکردنەوەی سمێڵی بەرامبەر بەکاربێنە بەپێی دوو کۆمەڵە پێدراوەکان بۆ شیکارکردنی پرسیارەکان لە 29 بۆ 32



29 کام کۆمەڵە گەورەترین بەهای هەیە؟ بەچەند زیاترە لە بەها گەورەکەی کۆمەڵەکەی تر.

30 کام کۆمەڵە ناوەڕاستەکەی گەورەترە؟ بیخەمڵێنە بە چەند گەورەترە لە ناوەڕاستەی کۆمەڵەکەی تر؟

31 مەودای چواریەکی هەر کۆمەڵەیەکیان بخەمڵێنە.

32 کام کۆمەڵەیان بچووکترین لادانی پێوانەیی هەیە؟ ئەمە ڕوونبکەوە.

33 بەختت لە بردنەوەی خەڵاتی نیو ملیۆن دینارا %0,01 لە کاتێکدا بەختت لە دۆڕاندنی هەزار دینار کە نرخی بلیتەکەیە %99, 9 بەهای پێشبینکراو بۆ قازانجەکەت چەندە؟ (یارمەتی: دوو بەهای لە توانادا بوو. بۆ قازانجەکەت هەیە (500 000 و 1000–)

34 بەختت لە بردنەوەی خەڵاتی سەد هەزار دینار لە%10.وبەختت لە دۆڕانی 2000 دینار بریتییە لە%30 ئەگەری %60 هەیە بۆ وەستاندنت لە یارییەکە بەهای پێشبینیکراو بۆ بردنەوەت چەندە؟

35 **هەڵە لە شیكردنەوە** ئەمانەی خوارەوە دوو هەوڵدانە بۆ دۆزینەوەی لادانی پێوانەیی بۆ پێدراوەكانی 4، 6، 8، 10 كام هەوڵەیان ناڕاستە؟ هەڵەكەی ڕوونبكەوە.

أ

$7-4=3 \to 9$
$7-\mathbf{6}=1 \to 1$
$7-8=-1 \to 1$
$7-10=-3 \to 9$
20

$20 \div 4 = 5$
$\sqrt{5} \approx 2.24$

ب

$7-4=3 \to 3$
$7-\mathbf{6}=1 \to 1$
$7-8=-1 \to 1$
$7-10=-3 \to 3$
8

$8 \div 4 = 2$
$\sqrt{2} \approx 1.4$

36 **بنووسە** ئایا بەهای پێشبینیكراو بۆ كۆمەڵە پێدراوێك هەمیشە یەكێكە لەو پێدراوانە؟ ئایا هەندێك جار سەربەو كۆمەڵەیە یان هەر سەربەو كۆمەڵەیە نابێت؟ بەنموونەیەك پاڵپشتی وەڵامەكەت بكە.

37 یارییەك بریتییە لە هەڵدانی بەردەزارێك و لێكدانی دوو ژمارەكەی سەرەوی دوزارەكە.

أ بەهای پیشبینی كراولە یارییەكە چەندە.

ب ئەگەری ئەنجامی لێكدانی یەكێك لە ئەنجامەكانی گەورەتربێت لە بەهای پێشبینیكراو چەندە؟

ج ئەگەری ئەنجامی لێكدانی یەكێك لە ئەنجامەكانی بچووكتربێت لە بەهای پێشبینیكراو چەندە؟

د ئایا وەڵامی لقی ب و ج یەكسانن؟ ئەمە ڕوونبكەوە.

38 ئەم خشتەیەی خوارەوە تێكرای باران بارینە لەساڵێكدا بە سانتیمەتر لە 1994 تا 2003 یەكێك لە شارەكاندا نیشاندەدات.

ساڵ	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003
تێكرای	9.4	17.0	7.3	7.0	16.1	5.4	6.9	8.5	4.2	9.2

أ ناوەندە ژمێرەیی و لادانی پێوانەیی بۆ ئەم پێدراوانە بدۆزەوە.

ب لە كام ساڵانەدا دووری تێكرایی لە ناوەندی ژمێرییەوە لە لادانی پێوانەیی گەورەترە.

ج ناوەراستە و مەودای چواریەكی بۆ كۆمەڵەی پێدراوەكان بدۆزەوە.



ئامادەكردن بۆ تاقیكردنەوە

39 كام لەم كۆمەڵە پێدراوانە بچووكترین لادانی پێوانەیی هەیە.

أ $\{1, 5, 7, 50\}$ ج $\{2, 10, 102, 110\}$

ب $\{100, 200, 300, 400\}$ د $\{100, 101, 102, 105\}$

40 كام لەمانەی خوارەوە لەسەر ئەم دوو كۆمەڵە پێدراوانە $\{0, 48, 49, 50, 51, 52, 100\}$ دروستنابێت $\{0, 1, 2, 50, 98, 99, 100\}$

أ هەمان ناوەندی ژمێرەییان هەیە. ج هەمان لێكنەچوونیان هەیە.

ب هەمان مەودایان هەیە. د هەمان ناوەراستەیان هەیە.

41 ناوەندی ژمێرەیی ئەنجامەكانی یەكێك لە تاقیكردنەوەكان 50 بوو. كام لەمانەی خوارەوە ناگونجێت ڕاست بێت

أ نیوەی سفر و نیوەكەی تری سەد بێت. ب مەودای 50 بێت.

ج نیوەی ئەنجامەكان 25 ونیوەكەی تری 50 بووبێت د هەمووی 50 بێت.

بەرەنگاری و فراوانکردن

42 کۆمەڵە پێدراوێك ناوەندی ژمێرەییەکەی 4 و ناوەڕاستەکەی 3 و لادانی پێوانەییەکەی 1.6 بێت.

أ وایدابنێ کە هەربەهایەك لێکدانی ژمارە 5 کراوە، ئایا ناوەندی ژمێرەیی کۆمەڵەی نوێ چەندە؟ ناوەڕاستەکەی چەندە؟ لادانی پێوانەیی چەندە؟

ب وایدابنێ هەر بەهایەك کۆی 5 کراوە. ئایا هەریەکە لە ناوەندی ژمێرەیی و ناوەڕاستە و لادانی پێوانەیی کۆمەڵە نوێیەکە چەندە؟

پێداچوونەوەی لولپێچی

43 **بازرگانی** سارا لە یەکێك لە کتێبخانە گەورەکان ئیشدەکا. لە مانگێکدا موچەی 725 000 دینار وەردەگرێت. بڕی 750 1 دینار بۆ زیاد دەکرێت. بۆ هەر کتێبێك کە بیفرۆشێت. سارا 1 425 000 دیناری لە مانگی پێشوودا وەرگرت ئایا چەند کتێبی فرۆشتووە؟ *(پۆلەکانی پێشوو)*

ئەنجامی ئەم لێکدانانە بدۆزەوە *(پۆلەکانی پێشوو)*

44 $\left(2-x^2\right)\left(2x^2+5x-3\right)$

45 $4xy^2\left(x^2y+3x^2-2y\right)$

شەشپاڵوێکی ژمارەکان هەڵدرا. ئەگەری هەر ڕووداوێك چەندە؟

46 دەستکەوتنی 1 یان ژمارەی جووت.

47 دەستکەوتنی 4 یان ژمارەی تاك.

48 دەستکەوتنی ژمارەیەك توانای دابەشبوونی بەسەر 2 یان 6 دا هەبێت.



کۆکردنەوەی پێدراوەکان بە شێوەی تاقیکردنەوە

Collecting Experimental Data

دەتوانیت تاقیکردنەوەیەك بۆ وەبەرهێنانی پێدراوەکان و کۆکردنەوەیان و ڕێکخستنیان ئەنجامبدەیت، پاشان شیکردنەوەیان بۆ دارشتنی ڕستەی بیرکاری بۆ بکەیت.

چالاکی 1

خشتەیەك دروستبکە بۆ کۆکراوەکانی دوو ژمارە لە ئەنجامی هەڵدانی دوو بەردەزار.

بەردەزاری شین (ستوونەکان) — بەردەزاری سوور (ڕیزەکان)

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

هەوڵبدە

1 هەر هاوجێبونێك لە خشتەکەدا تێبینی دەکەیت باسیبکە

2 ئەگەری تیوری بۆ بەدەستهێنانی دابەشبوونی ئەگەر بەکاربێنە

سەرجەم	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
ئەگەرەکەی											

3 دابەشبوونی ئەگەری پێشوو بۆ دۆزینەوەی بەهای پێشبینیکراو بەکاربێنە.

4 کام سەرجەم گەورەترین ئەگەری هەیە. کام سەرجەم بچووکترین ئەگەری هەیە.

5 ئایا کۆمەڵەی جیاواز هەیە لە ئەگەرە کانیاندا یەکسانبن؟ ئەگەر هەبوو بینووسە.

1 دوو بەردەزاری 36 جار هەڵبدە. ئەنجامەکانیان لە خشتەیەکدا بنووسە.

2 لەو ئەنجامانەی بەدەستت هێناون دابەشبونێکی ئەگەر درووستبکە.

3 دابەشبوونی ئەگەر کە لە پرسیاری 7 دا دەستتکەوتووە بۆ دۆزینەوەی بەهای پێشبینی کراو بەکاربێنە.

پشت ببەستە بەو تاقیکردنەوەیەی ئەنجامت داوە بۆ وەڵامدانەوەی ئەم پرسیارانە

4 کام سەرجەم گەورەترین ئەگەری هەیە؟ و کام سەرجەم بچووکترین ئەگەری هەیە.

5 ئایا کۆمەڵ هەیە لە ئەگەردا یەکسان بن؟ ئەگەر هەبوو بینووسە.

6 ئەو ئەنجامەی دەستتکەوتووە لەگەڵ ئەنجامی تیۆریدا بەراوردی بکە.

7 ئەو ئەنجامەی دەستتکەوتوە لەگەڵ ئەنجامی هەریەك لە هاورێکانتدا بخەرە پاڵیەك، بەراورد لە نێوان ئەو ئەنجامانەدا بکە، کە دوای یەکخستن دەستتکەوتوون و لە نێوان ئەوەی لە ئەنجامی تاقیکردنەوەی خۆتدا دەستتکەوتون بەراورد لە نێوانیاندا و لە نێوان ئەو ئەنجامە تیوریانەدا بکە.

7-2

بەشینەوەکانی دووانی (کراوەی دووڕادەدار)

Binomial Distributions

ئامانجەکان

- سەلمێنراوی دوو ڕادەدار بۆ دەرخستنی سنووری دوو ڕادەدار و دۆزینەوەی ئەگەری دواى و تاقیکردنەوەی بیردۆزەکان بەکاردێنێت.

زاراوەکان
Vocabulary

سەلمێنراوی دووڕادەدار
Binomial theorem

تاقیکردنەوەی دووانی
Binomial experiment

ئەگەری دووانی
Binomial probability

بۆچی ئەمە فێردەبیت؟

دەتوانیت بەشکردنی دووڕادەدار بۆ دیاریکردنی بەختت لە بردنەوەی خەڵاتەکان. خستنەرووی بازرگانی بەکاربێنیت (نموونە 3).

لە پۆلی دەیەم فێری لێکدانی ڕادەدارەکان بویت لێرەدا فێری بارێکی تایبەتی دەبێت لە لێکدانی ڕادەدارەکان کە بریتییە لە کراوەی هێزی ڕادەدارە دووانییەکان.

نموونـــــە 1 کراوەی هێزی دوو ڕادەدار

$(x+y)^3$ بکەوە.

$(x+y)^3=(x+y)(x+y)(x+y)$ لەسەر شێوەی لێکدان بنووسە

$=(x+y)\left(x^2+2xy+y^2\right)$ دوو هاوکۆلکەکەیان لە یەکبدە .

$=x\left(x^2\right)+x(2xy)+x\left(y^2\right)+y\left(x^2\right)+y(2xy)+y\left(y^2\right)$ بەشینەوە

$=x^3+2x^2y+xy^2+x^2y+2xy^2+y^3$ لێکدانیان بکە

$=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$ سادە بکە



1.بکەوە

أ $(x+4)^4$ ب $(2x-1)^3$

هاوکۆلکەکانی کراوەی $(x+y)^3$ بپشکنە بریتییە لەو ژمارانەی کە لە سەر ڕیزەکەن لە پلە 3 یە لە سێگۆشەی باسکاڵ

	کراوەی هێزی دوو ڕادەدار	سێگۆشەی باسکاڵ
$(a+b)^0=$	1	1
$(a+b)^1=$	$a+b$	1 1
$(a+b)^2=$	$a^2+2ab+b^2$	1 2 1
$(a+b)^3=$	$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$	1 3 3 1
$(a+b)^4=$	$a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$	1 4 6 4 1
$(a+b)^5=$	$a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$	1 5 10 10 5 1

ژمارەی ناو هەر ڕیزێك لە ڕیزەکانی سێگۆشەی باسکاڵ هاوکۆلکەی کراوەی هێزی ڕادەداری دووانی پێکدێنێت. بە توانێك کە یەکسانە بە پلەی ڕیزەکە (تێبینی بکە پلەی ڕیزەکان باسکاڵ بەسفر دەستپێدەکات نەك بە 1. دەتوانین شێوەی ڕیزەکانی باسکاڵ تەواو بکەین بۆ بەدەستهێنانی هاوکۆلکەکانی کراوەی هێزی ڕادەداری دووانی. بەهەر توانێك بێت $(a+b)^n$ کاتێك n ژمارەیەکی تەواوی سالب نەبێت.



کراوەی هێزی ڕادەداری دووانی

لەکاتی کردنەوەی $(a+b)^n$ ئەمانەت لەبیربێت.

1. ژمارەی ڕادەکان لە کراوەی $(a+b)^n$ دا بریتییە لە $n+1$ ڕادە.
2. هاوکۆڵکەکانی کراوەی $(a+b)^n$ بریتییە لە ژمارەکانی سێگۆشەی باسکاڵ لەڕیزی n .
3. لەڕادەی یەکەمداتوانی هێزی a (n) ە پاشان یەك کەم دەکات کە دەچینە سەر ڕادەیەکی تر.
4. توانی هێزی b سفرە لە ڕادەی یەکەمدا. پاشان یەك زیاد دەکات کە دەچینە سەر ڕادەیەکی تر.
5. کۆی توانی هێزی a و هێزی b لە هەر ڕادەیەکدا یەکسانە بە n .

لە خوێندکارەوە بۆ خوێندکار — کراوەی هێزی ڕادەداری دووانی

1	4	6	4	1
x^4	x^3	x^2	x	
	y	y^2	y^3	y^4

هێڵکارییەك بۆ کراوەی هێزی سنووورداری دووانی بەکاردێنم هەروەها $(x+y)^4$ وەك نموونە بەکاردێنم لە ڕیزی یەکەمی خشتەکەدا ژمارەکانی ڕیزی 4 لە سێگۆشەی باسکاڵ دەنووسم لە ڕیزی دووەم هێزی x ی تواناکان سەربەرەوژێر ڕیزدەکەین بە دەستپێکردن لە لای چەپەوە لە ڕیزی سێیەم هێزی y تواناکان سەربەرەوژێر ڕیزدەکەین لە لای ڕاستەوە دەستپێکە. لە کۆتایی دا ڕادەکانی هەر ستونێك لێکدانبکە بۆ و بەدەستهێنانی.

$$x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4$$

نموونە 2 بەکارهێنانی سێگۆشەی باسکاڵ بۆ کراوەی هێزی ڕادەداری دووانی

ئەم هێزی ڕادەداری دوانییانە بکەوە.

أ $(y-3)^4$

1 4 6 4 1 ژمارەی ڕیزی 4 سێگۆشەی باسکاڵ بنووسە

$$\left[1(y)^4(-3)^0\right]+\left[4(y)^3(-3)^1\right]+\left[6(y)^2(-3)^2\right]+\left[4(y)^1(-3)^3\right]+\left[1(y)^0(-3)^4\right]$$

$$y^4-12y^3+54y^2-108y+81$$

ب $(4z+5)^3$

1 3 3 1 ژمارەی ڕێزی 3 سێگۆشەی باسکاڵ بنووسە

$$\left[1(4z)^3(5)^0\right]+\left[3(4z)^2(5)^1\right]+\left[3(4z)^1(5)^2\right]+\left[1(4z)^0(5)^3\right]$$

$$64z^3+240z^2+300z+125$$



2. کراوەی ڕادەداری دووانی ئەمانە بدۆزەوە

أ $(x+2)^3$ ب $(x-4)^5$ ج $(3x+1)^4$

لە لایەکی تر پەیوەندی هەیە لە نێوان سێگۆشەی باسکاڵ ژمارەی گونجێنەکان.

سێگۆشەی باسکاڵ	گونجێنەکان	کراوەی هێزی ڕادەداری دووانی	
1	${}_0C_0$	1	$(a+b)^0=$
1 1	${}_0C_0$ ${}_1C_1$	$a+b$	$(a+b)^1=$
1 2 1	${}_2C_0$ ${}_2C_1$ ${}_2C_2$	$a^2+2ab+b^2$	$(a+b)^2=$
1 3 3 1	${}_3C_0$ ${}_3C_1$ ${}_3C_2$ ${}_3C_3$	$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$	$(a+b)^3=$

دەتوانێت سوود لە شێوازی خشتەی سەرەوە وەربگری بۆ کراوەی هێزی ڕادەداری بەبەکارهێنانی سەلمێنراوی دوو ڕادەداری.



سەلمێنراوی دوو ڕادەداری

n هەر ژمارەیەکی تەواوی نا سالیب بێت، ئەوا

$$(x+y)^n = {}_nC_0 x^n y^0 + {}_nC_1 x^{n-1} y^1 + {}_nC_2 x^{n-2} y^2 + \ldots + {}_nC_{n-1} x^1 y^{n-1} + {}_nC_n x^0 y^n$$

نموونــــە 3 کراوەی دوو ڕادەدار

سەلمێنراوی دوو ڕادەداری بۆکردنەوەی ئەم هێزە ڕادەدارە دووانیانە بەکاربێنە.

أ $(x+y)^4$

ژمارەی ڕیزی 4 سێگۆشەی باسکاڵ بنووسە

1 4 6 4 1

$$(x+y)^4 = {}_4C_0 x^4 y^0 + {}_4C_1 x^3 y^1 + {}_4C_2 x^2 y^2 + {}_4C_3 x^1 y^3 + {}_4C_4 x^0 y^4$$
$$= 1x^4y^0 + 4x^3y^1 + 6x^2y^2 + 4x^1y^3 + 1x^0y^4$$
$$= x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$$

ب $(3p+q)^3$

ژمارەی ڕیزی 3 سێگۆشەی باسکاڵ بنووسە

1 3 3 1

$$(3p+q)^3 = {}_3C_0(3p)^3q^0 + {}_3C_1(3p)^2q^1 + {}_3C_2(3p)^1q^2 + {}_3C_3(3p)^0q^3$$
$$= 1\times 27p^3 \times 1 + 3\times 9p^2q + 3\times pq^2 + 1\times 1q^3$$
$$= 27p^3 + 27p^2q + 9pq^2 + q^3$$

ڕۆشنایی

لەکاتی کردنەوەی $(x+y)^n$ دا توانی x لە n ەوە بۆ 0 کەمدەکات توانای y لە 0 ەوە بۆ n زیادەکات، هەروەها کۆی هەردوو توانەکان لەهەر ڕادەیەکدا دەکاتە n .



3. سەلمێنراوی کراوەی دوو ڕادەدار بۆ کردنەوەی ئەمانە بەکاربێنە.

أ $(x-y)^5$ ب $(a+2b)^3$

تاقیکردنەوەی دووانی تاقیکردنەوەیەکی هەرەمەکییە کرداری هەرەمەکی تێیدا دووبارە دەبێتەوە دوو ئەنجامی لەتوانادا هەیە دەرچوون یان کەوتن. ئەگەری دەرچوون p بێت لە هەر جارێکدا و ئەگەری کەوتن q بێت لە هەر جارێکدا لەبەرئەوەی کرداری هەرەمەکی دوو ئەنجامی گونجاوی هەیە بۆیە $p+q=1$ یان $q=1-p$ ئەمەی خوارەوە نموونەیە لەسەر تاقیکردنەوەی دووانی.

تاقیکردنەوە	دەرچوون	کەوتن	ئەگەری دەرچوون	ئەگەری کەوتن
هەڵدانی پارچە پارەیەکی کانزایی 10 جار	شێر	خەت	$p=0.5$	$q=0.5$
هەڵدانی بەردەزارێك سەد جار	دەستکەوتنی ژمارە 3	دەستکەوتنی جگە لە 3	$p=\frac{1}{6}$	$q=\frac{5}{6}$

وادابنێ ئەگەری کەسێك چەپەوانەبێت (بەدەستی چەپ بنووسێت) بریتییە لە 0.1 و تۆش ئارەزوو دەکەین دوو کەس بدۆزیتەوە لەنێوان سێ کەسدا چەپەوانەبن. لێرەدا ${}_3C_2$ ڕێگا هەیە بۆ پێکەوەنانی کۆمەڵەیەك لە سێ کەسدا دووکەسیان وابن. هێمای پیتی L بەکاربێنە بۆ کەسێك چەپەوانە و پیتی R بۆ کەسێك چەپەوانە نەبێت. ڕێگای هەڵبژاردنی دوو چەپەوانە LLR ، LRL ، RLL ئەگەری هەریەك لەم ئەنجامانە لە توانادابێت بریتییە لە $0.1\times 0.1\times 0.9$ ئەمەش بەرە و ئەم یاسایەمان دەبات.



ئەگەری دووانی

ئەگەر تاقیکردنەوەیەکی دووانی n جار سەربەخۆ دووبارە کرایەوە، کاتێك p ئەگەری دەرچوون و q ئەگەری کەوتن بێت لە n جاردا. ئەوا ئەگەری دەرچوون r جار لە نێوان n جار بریتییە.

$$P(r) = {}_nC_r p^r q^{n-r}$$

بەم ئەگەرە دەووترێت **ئەگەری دووانی**.

نموونــــە 4 دۆزینەوەی ئەگەرە دووانییەکان

لەهەر 5 کەشتییەك لە ڕێرەوی دەریایی تیپەردەبێت ڕاستەوخۆ دەچێتە ناو دەریاوە بێ ئەوەی لە بەندەرەکەوە بڕوات 4 کەشتی بەڕێرەوی دەریاییدا دەڕۆن.

أ ئەگەری ڕاستەوخۆ چوونە ناو دەریای تەنها دوو کەشتی چەندە؟

ئەگەری ڕاستەوخۆ چوونە ناودەریا بۆ کەشتیەکە بریتییە لە $\frac{1}{5} = 0.2$.

$P(r) = {}_nC_r p^r q^{n-r}$ $n=4$ چونکە تاقیکردنەوەکە 4 جار دووبارە دەبێتەوە (4 کەشتی)

$P(2) = {}_4C_2 p^2 q^{4-2}$ ژمارەی دەرچوان $r=2$ (تەنها دوو کەشتی دەچێتە ناو دەریا)

$= 6(0.04)(0.64) = 0.1536$

ئەگەری ڕاستەوخۆی چوونە ناودەریا بۆ هەردوو کەشتییەکە لە 15.36% .

ب ئەگەری بەلایەنی کەمەوە دوو کەشی ڕاستەوخۆ بچنە ناو دەریا چەندە؟

بەلایەنی کەمەوە دوو کەشتی ڕاستەوخۆ. بچنە ناو دەریا (واتە دوو یان سێ یان چوار کەشتی بچنە ناو دەریاوە)

$P(2) + P(3) + P(4)$

${}_4C_2(0.2)^2(0.8)^{4-2} + {}_4C_3(0.2)^3(0.8)^{4-3} + {}_4C_4(0.2)^4(0.8)^{4-4}$

$0.1536 + 0.0256 + 0.0016 = 0.1808$

ئەگەری بەلایەنی کەمەوە دوو کەشتی ڕاستەوخۆ بچنە ناو دەریا و بریتییە لە 18.08%

خاڵی چاودێری

4. **أ** بەڕێوەبەری خوێندنگایەك بۆ هەر خوێندکارێك مامۆستایەك لە نێوان سێ مامۆستا بەهەڕەمەکی دەستنیشان دەکات بۆ ئەوەی ببێتە سەرچاوەی ئەو خوێندکارە لە خوێندندا، ئەگەری ئەوەی مامۆستا ئومێد ببێتە سەرچاوەی ئەو دوو خوێندکارە لەو سێ خوێندکارەی کە تازە هاتوون چەندە؟

ب شیرین دەچێت بۆ ئەنجامدانی تاقیکردنەوەیەك کە هەڵبژاردنی جۆراوجۆری تێدایە و لە 5 پرسیار پێکهاتووە، بۆ وەڵامی هەر پرسیارێك چوار هەڵبژاردن هەیە، ئەگەری وەڵام دانەوەی بەشێوەیەکی ڕاست بەلایەنی کەمەوە بۆ دوو پرسیار چەندە؟

نموونــــە 5 جیبەجێکردن لەسەر شیکاری پرسیارەکان



کۆمپانیایەکی ساردەمەنی پیشانگایەکی لەو شوشەواتەی بەرهەمی هێناوە بۆ کڕیارەکانی کردەوە وێنەیەکی لەسەر سەرقاپی هەندێکیان چاپکردوە، بۆ ئەو کەسەی بەخت یاوەریەتی کۆمپانیاکە بیریکردوە بۆ هەر چوار لە شوشەواتەکان لەسەر یەکێکیان وێنەیەکی چاپکردوە. شێروان دەپارچە شوشەواتی کڕی. ئەگەری ئەوەی بەلایەنی کەمەوە دوو خەڵاتی بۆ دەربچێت چەندە؟

1 لە پرسیارەکە تێبگە

داواکراو ئەگەری ئەوەی شیروان بەلایەنی کەمەوە دوو خەڵات بباتەوە.

زانیارییەگرنگەکان دیاریبکە

- شێروان 10 شووشەی کڕیوە.
- ئەگەری دووانی لە بردنەوەی شووشەی خەڵات بریتییە لە $0.25 = \frac{1}{4}$

2 پلاندابنێ

ڕێگای ڕاستەوخۆ بۆ شیکارکردنی پرسیارەکە بریتییە لە هەژمارکردن $P(2)+P(3)+...+P(10)$ کەچی هەژمارکردنی ئەگەری ڕووداوی تەواوکەر وادەردەکەوێت ئاسانترە، چونکە داوای هەژماری $P(0)+P(1)$ دەکات لەبەرئەوەی ڕووداوی تەواوکەر بۆ بردنەوەی بەلایەنی کەمەوە دوو خەڵات بریتییە لە بردنەوەی یەك خەڵات یان هیچ ناباتەوە. ئەگەری ڕووداوی تەواوکەر بدۆزەوە و لە 1 ی دەربکە.

3 شیکار بکە

هەنگاوی 1 بدۆزەوە

$$P(0) + P(1)$$

$$P(0) + P(1) = {}_{10}C_0(0.25)^0(0.75)^{10-0} + {}_{10}C_1(0.25)^1(0.75)^{10-1}$$

$$= 1(1)(0.75)^{10} + 10(0.25)(0.75)^9$$

$$\approx 0.0563 + 0.1877$$

هەنگاوی 2 ڕووداوی تەواوکەر بەکاربێنە بۆ دۆزینەوەی وەڵام.

$$1-0.2440 \approx 0.7560$$

ئەگەری ئەوەی شێروان بەلایەنی کەمەوە دوو خەڵات بباتەوە بریتییە لە0.76 بە نزیکراوەیی.

4 ساغبکەوە

وەڵامی گونجاو بەهای پێشبینی کراو بۆ بردنەوە بریتییە لە $10 \times \frac{1}{4}$ لە 10 واتە $2.5 = \frac{10}{4}$ نزیکە لە 2 کەواتە، ئەگەری ئەوەی شێروان بەلایەنی کەمەوە دووخەڵاتەکە بباتەوە لە0.5 زیاتر دەبێت.



.5 **أ** بێستون تاقیکردنەوەیەك ئەنجام دەدات کە هەڵبژاردنی جۆراو جۆری تێدایە و لە 20 پرسیار پێکهاتووە بۆ هەر یەکێکیان چوار وەڵامی کراوە هەیە. ئەگەری ئەوەی بەلایەنی کەمەوە دوو پرسیار بەڕاستی وەڵام بداتەوە چەندە؟

ب ئامێرێك جۆرێك لەپارچەی یەدەکی ئۆتۆمبیل بەرهەمدێنێت. ئەگەری پارچەکە باش بێت بریتییە لە %98 . ئامێرەکە 25 پارچەی دروستکرد ئەگەری ژمارەی پارچە باشەکان زیاتر نەبێت لە 23 پارچە چەندە؟

بیربکەوە و تاوتوێبکە

1. پلەی کراوەی ڕادەداری $(2x+8)^7$ چەندە؟ ژمارەی ڕادەکانی چەندە؟
2. لە تاقیکردنەوەی دووانیدا $p+q$ یەکسانە بە چەند؟ وەڵامەکەت ڕوونبکەوە.
3. ئەو سێ براوە چەندن کە لێکدانی یەکتر دەکرێن بۆ دۆزینەوەی ئەگەری دەرچوونی r جار لە تاقیکردنەوەی دووانی n جار دووبارە بێتەوە؟
4. ڕێکخەر بە ئەم خشتەیە دروستبکە. شێکاری هەر پرسیارێك بکە کە دەینووسیت.

فێربە و سەرنج بدە

تاقیکردنەوە دوانییەکان	
ئەگەر	نموونە
ئەگەری دەرچوونی r لە تاقیکردنەوەیەکدا n جار دووبارە بێتەوە	
ئەگەری بەلایەنی کەمەوە دەرچوونی r لە تاقیکردنەوەیەکدا n جار دووبارە بێتەوە	
ئەگەری بەلایەنی زۆرەوە دەرچوونی r لە تاقیکردنەوەیەکدا n جار دووبارە بێتەوە	
ئەگەری بەکارهێنانی ڕووداوی تەواوکەر	

7-2 ڕاهێنانەکان

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

1 **زاراوەکان** ژمارەی ئەنجامە لە توانادابووەکانی تاقیکردنەوەیەکی دووانی بریتییە لە ______؟

بڕوانە نموونە 1

هەر یەك لەمانە بە لێکدان بکەوە.

2 $(x+2)^3$ **3** $(x+y)^4$ **4** $(x+1)^4$ **5** $(x-3y)^3$

بڕوانە نموونە 2

هەر بڕەیەك لەمانە بەبەکارهێنانی سێگۆشەی پاسکاڵ بکەوە.

6 $(x-2)^4$ **7** $(2x+y)^4$ **8** $(x+2y)^3$ **9** $(2x-y)^5$

بڕوانە نموونە 3

سەلمێنراوی ڕادەداری دوانی بۆ کردنەوەی ئەم بڕانە بەکاربینە.

10 $(x+3)^4$ **11** $(3x+5)^3$ **12** $(p-2)^6$ **13** $(x+y)^6$

بڕوانە نموونە 4

14 بەڕێوەبەری خوێندنگایەك ویستی 6 خوێندکار بۆ هاوبەشی کردنی لە گرتنی وێنەیەکی یادگاری بۆ خوێندکارانی خوێندنگاکە هەڵبژێریت. ئەگەری ئەوەی لەنێوان 6 خوێندکار، 4 یان وەرزشەوان بێ چەندە؟ ئەگەر بزانیت ئەگەری خوێندکارێك وەرزشەوان بێت لە 30% ؟ ئەگەری ئەوەی بەلایەنی کەمەوە. 4 لە خوێندکاران وەرزشوان بن چەندە؟

بڕوانە نموونە 5

15 **بازارکردن** بەشی شیرینی سوپەرمارکێتێك پاکەتی شوکولاتەکان پێشانەدات لە هەر 5 تابلۆ تابلۆیەکیان پسولەیەکی شاراوەی تێدایە، ئەو کڕیارەی بۆی دەردەچێت تابلۆیەك بە خۆرایی وەردەگرێت ڤیان 4 تابلۆی شکولاتەی کڕی ئەگەری ئەوەی 3 بلیت بباتەوە چەندە؟ ئەگەر ئەوەی بەلایەنی کەمەوە 2 بلیت بباتەوە چەندە؟

نموونـــه 5

16 **پیشەسازی** کارگەیەك بەرهەمەکانی لە قووتوی کارتۆن دادەنێت، لە سەر ڕووی سەرەوەی هەر قووتویەك پولێکی تایبەتی چاپدەکات. ئەگەری بوونی پولەکە لەسەر هەردوو ڕووی سەرەوە و خوارەوە بریتییە لە%2 بارهەڵگرێك 30 قوتوی کارتۆنی بارکرد ئەگەری ئەوەی دوو کارتۆن پولی کارگەکەی لەسەر هەردوو ڕوی سەرەوە و خوارەوەی بێت چەندە؟

ڕاهێنان و شیکارکردنی پرسیار

ڕاهێنانی ئازاد	
بۆ شیکاری سەیری ڕاهێنانەکان	نموونە بکە
20-17	1
24-21	2
28-25	3
29	4
30	5

هەر برێك لەمانە بە لێکدان بکەوە.

17 $(2x-2)^3$ **18** $\left(x+\frac{1}{3}\right)^4$ **19** $(x-y)^4$ **20** $(4+y)^3$

هەر برێك لەمانە بەبەکارهێنانی سێگۆشەی باسکاڵ بکەوە.

21 $(x-3y)^4$ **22** $(x-2)^5$ **23** $(x+y)^5$ **24** $(2x-3y)^4$

هەر برێك لەمانە بەبەکارهێنانی سەلمێنراوی ڕادەداری دووانی بکەوە

25 $(y+5)^4$ **26** $(2m-1)^3$ **27** $(4+3x)^5$ **28** $(2a+3c)^3$

29 **مافی شارستانی** ڕاپرسییەك سەبارەت بە مافی ڕادەربڕین لە نێوان 100 000 هاوڵاتیدا کرا. %83ی ڕاپرسیکەران لەگەڵ ئەو مافەدابوون 8 لەو ڕاپرسیکەرانە بەهەرەمەکی هەڵبژێران. ئەگەری ئەوەی بەلایەنی کەمەوە 6 لەوانە لەگەڵ ئەو مافە دابن چەندە؟

30 5 گۆ لە تورەگەیەك یەك بەدوانی یەك ڕاکێشرا دوای گێڕانەوەی گۆیەکە لە هەموو جارێکدا. ئەگەری ئەوەی گۆیە ڕاکێشراوەکە ڕەش بێت %15 یە ئەگەری ئەوەی دوو گۆ لە 5 گۆی ڕاکێشراو ڕەش بن چەندە؟ئەگەری ئەوەی دوو گۆ بەلایەنیکەم لە نێوان 5 گۆ ڕاکێشراوەکە ڕەش بن چەندە؟

31 **جینەکان** ژنێکی دوو گیان چاوەڕوانی دەکرد 3 منداڵی بەیەکەوە ببێت ئەگەری ئەوەی یەکێکیان کوڕ و دوانیان کچ بێت چەندە؟ ئەگەری ئەوەی هەرسێ منداڵەکە کچ بن چەندە؟

32 **ڕووەکزانی** ئەگەری ئەوەی نەمامێك لە جۆرێکی دیاریکراو و گوڵ بگرێت %25 ـە ئەگەری ئەوەی 4 نەمام لە نێوان 15 نەمامی لەم جۆرە گوڵ بگرێت. کە بەهەرەمەکی هەڵبژێراون چەندە؟

هەر برەیەك لەمانە بەبەکارهێنانی سەلمێنراوی ڕادەداری دووانی بکەوە.

33 $(x-y)^5$ **34** $(c+6)^3$ **35** $(4k-1)^4$ **36** $(p+q)^7$

37 **گەشت** کۆمپانیاکانی فڕۆکەوانی شوێنی زیاتر بۆ خەڵك دەگرن کە لە کورسییەکانی ناو فڕۆکەکە زیاترن. هەندێك لەگەشتیاران شوێن گرتنەکەیان هەڵدەوەشیننەوە لە دواساتدا. وای دابنێ ئەگەر ئەوەی هیچ گەشتیارێك شوێن گرتنەکەی هەڵنەوەشێنێتەوە بریتییە لە 0.91 کۆمپانیاکە 22 شوێنی گرت لەسەر فڕۆکەیەك کە 20 کورسی تێدایە ئەگەری ئەوەی هەر گەشتیارێك ئامادەبێت کورسییەکی دەستبکەوێت چەندە؟



38 **جینەکان** مێیەی ژیشکێك 4 بێچوی بوو ئەگەری ئەوەی هەر چواریان نێربن چەندە؟ ئەگەری ئەوەی بەلایەنی کەمەوە سیانیان نێربن چەندە؟

پارچە پارەیەك 10 جاو هەڵدرا، هەریەك لەمانە بدۆزەوە.

39 زیاتر لە 7 خەت بێت **40** بەلایەنی کەمەوە دووانیان خەت بێت **41** تەنها 5 خەتی تێدابێت

42 **چاودێری جۆری** یەکێك لە کارگەکان پارچەی یەدەگی ئۆتۆمبێل دروستدەکات ئەگەری باشی پارچەکە95% ئەگەری پارچە خراپەکانی ناو سندوقێك کە 8 پارچەی تێدایە لەیەك پارچە زیاتر نەبێت چەندە؟

43 **بژمێری ڕوونکردنەوەیی** بژمێری ڕوونکردنەوەیی نەخشەی randBin تێدایە بۆ لێدوانی تاقیکردنەوەی دووانی و هەرژمارکردنی ژمارەی بارە سەرکەوتوەکان بۆ لێکچوونی تاقیکردنەوەی دوانی لە $n = 6$ کاریکی هەرەمەکیە ئەگەری سەرکەوتن $p = 0.3$ و ژمارەی سەرکەوتوان $r = 5$ دابگرە MATH هەڵبژێرە PRB پاشان، randBin) و ژمارەکە تۆماربکە پاشان 0.3 پاشان 5 بۆشای لە نێوان ژمارەکان دابنێ. ","

أ تاقیکردنەوەی هەرەمەکی دووانی چەندبارەبکەوە لە $n = 5$ و کارەکانی هەرەمەکی بێت ئەگەری سەرکەوتن $p = 0.8$ و ژمارەی سەرکەوتنەکان $r = 5$.

ب یاسا بۆ دۆزینەوەی ئەگەری سەرکەوتن بەکاربێنە.

ج بەراورد لە نێوان هەردوو ئەنجامەکە بکە

44 **هەنگاوی جۆرا و جۆر** $p = 0.8$ و $n = 10$ بژمێری ڕوونکردنەوەیی بەکاربهێنە بۆ دۆزینەوەی ئەگەری دووانی بۆ ژمارەی سەرکەوتوان لە 0 تا 10 وەڵامەکان بۆ نزیکترین بەش لە سەد نزیکبکەوە ستوونی ڕوونکردنەوەییەکان دروستبکە بۆ نیشاندانی ئەو ئەنجامانەی بەدەستتهێناوە، باسی شێوەی وێنەی ڕوونکردنەوەییەکە بکە پەیوەندی لە نێوان وێنەی ڕوونکردنەوەیی و بەهای پێشبینیکراو کامەیە؟

45 **بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە** کامیان ئەگەری زیاترە: خێزانێك لە 4 منداڵ دووانیان کوڕ و دووانیان کچ یان خێزانێك لە 4 منداڵ سیانیان ڕەگەزێکە و چوارەمیان ڕەگەزێکیتربێت؟

46 ژمارەی ڕۆژە پێشبینیکراوەکانی باران بارین لە یەکێك لە ناوچەکان 82 ڕۆژە لە ساڵێکدا بە پشتبەستن بە پێدراوە مێژووییەکان. وادابنێ بارینی باران لە ڕۆژە جیاوازەکاندا ڕووداوی سەربەخون

أ ئەگەری ئەوەی کە ڕۆژێك هەڵبژێرن بەهەرەمەکی ڕۆژی باران بارین بێت چەندە؟

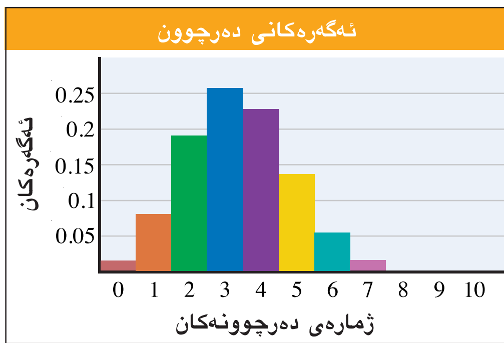
ب ئەگەری هەڵپژاردنی 3 ڕۆژ لە هەفتەیەکدا باران ببارێت چەندە؟

ج ئەگەری هەڵبژاردنی هەرەمەکی بەلایەنی کەمەوە 3 ڕۆژ لەهەفتەیەکدا باران ببارێت چەندە؟

47 تورەکەیەك 10 گۆی تیایە نیوەی سوور و نیوەکەی تری شینە ئومێد 3 گۆی یەك لە دوای یەکی ڕاکێشا بەبێ گەڕانەوە و هەر جارێك ڕەنگی گۆیە ڕاکێشراوەکەی تۆمارکرد ئەو هۆیە ڕوونبکەوە کەوا لەم تاقیککردنەوە هەرەمەکییە دەکات دووانی نەبێت؟

48 **گەشت** یەکێك لە کۆمپانیاکانی فڕۆکەوانی توێژینەوەیەکی ئەنجامدا، دەریخست 45% گەشتیاران لە کاتی سەرکەوتنیان بۆ ناو فڕۆکە زیاتر لە جانتایەك هەڵدەگرن. لە یەکێك لە گەشتەکاندا میوانداری فڕۆکەکە پێشوازی لە یەکەم 5 گەشتیارکرد ئەگەری ژمارەی ئەوانەی زیاتر لە جانتایەك هەڵدەگرن لە 3 کەمتر نەبێت چەندە؟

49 **بنووسە** بارێکی گونجاو تێیدا ڕووداوی تەواوکەر بۆ هەژمارکردنی ئەگەری دووانی بەکارهاتبێت باسبکە.



خەملاندن وێنەی ڕوونکردنەوەی بەرامبەر بەکاربێنە بۆ شیکارکردنی پرسیارەکانی 50 و 51 وێنەکە ئەگەرەکانی r سەرکەوتن لە تاقیکردنەوەی دووانی کە کرداری هەرەمەکی 10 جار دووبارەبێتەوە دەنوێنێت.

50 ئەگەری ژمارەی سەرکەوتنەکان زیاتر نەبێت لە 2 بخەملێنە

51 بەهای ئەگەری دەرچوونی p بخەملێنە. ڕوونیبکەوە چۆن وەڵامەکەت دۆزییەوە.



52 کام لەمانەی خوارەوە لە تاقیکردنەوەی دووانیدا هەڵەیە.

(أ) ئەنجامی لە توانادا بوو دووانن، سەرکەوتن یان سەرنەکەوتن
(ب) ئەگەری دەرچوون نەگۆڕە.
(ج) کردارە هەرەمەکییەکان پێکەوە بەستراون
(د) کردارە هەرەمەکییەکان هەمان کردارن.

53 تاقیکردنەوەیەکی دوانی لە دووجار دووبارەبوونەوەدا لە کردارێکی هەرەمەکی پێکدێت، ئەگەری دەرچوون 40% ئەگەری یەکجار دەرچوون چەندە؟

(أ) 16% (ب) 36% (ج) 48% (د) 52%

54 تاقیکردنەوەیەکی دووانی لە 5 جار دوبارەبوونەوەدا کردارێکی هەرەمەکی پێکدێت، ئەگەری دەرچوون 20% کام لەمانە هەژماری ئەگەری 3 جار دەرچوون دەدات؟

(أ) $3(0.2)^3(0.8)^2$ (ب) $10(0.2)^3(0.8)^2$ (ج) $3(0.2)^2(0.8)^3$ (د) $10(0.2)^2(0.8)^3$

55 **تەنها وەڵام** یەکێك لە کارگەکان پارچەی بزمێرە ئەلیکترۆنییەکان دروستدەکات. ئەگەری پارچە پەککەوتوەکان لە 4% . 10 پارچە بەشێوەی هەرەمەکی هەڵبژێرا. ئەگەری ئەوەی کە لە نێوانیاندا لەیەك پارچەی پەککەوتو زیاتر نەبێت چەندە؟ وەڵامەکەت بۆ نزیکترین ڕێژەی سەدی تەواو نزیکبەوە.

56 **کورتە وەڵام** 18.8% دانیشتوانی وولاتێك هەڵگری یەکێك لەو 100 ناوەی کە باون بە شێوەیەکی هەرەمەکی 10 کەس هەڵبژێرە ئەگەری 3 کەس لەوانە کە ناوێکیان هەبێت لەو ناوانە چەندە ؟

بەرەنگاری و فراوانکردن

57 **جینەکان** ئەگەری ئەوەی یەکێك چەپەوانەبێت 0.1 هۆڵێك 650 کەسی تێدایە

أ ژمارەی پێشبینیکراوی کە سەچەپەوانەکانی ناو هۆڵەکە چەندە؟ ئەمە ڕوونبکەرەوە.

ب لادانی پێوانەیی بۆ تاقیکردنەوەیەکی دووانی پێکهاتوە لە دووبارەبونەوەی کردارێکی هەرەمەکی n بە بەکارهێنانی $\sigma=\sqrt{npq}$ هەژماربکە. بەهای لادانی پێوانەیی بدۆزەرەوە؟

58 هەریەك لەم دوو ئەگەرە بدۆزەوە و دیاریبکە کامیان گەورەترە.

أ دەستکەوتنی ژمارە 1 بەلایەنی کەمەوە یەکجار لە هەڵدانی بەردە زارێك 6 جار.

ب دەستکەوتنی ژمارە 1 بەلایەنی کەمەوە دووجار لە هەڵدانی بەردە زارێك 12 جار.

59 دیاریکە کام ژمارەی $_{n+1}C_{r+1}$ لە سێگۆشەی پاسکاڵ دا یەکسانە بە سەرجەمی ئەو دوو ژمارەیەی بە $_{n}C_{r}$ و $_{n}C_{r+1}$ دەوروبەریان، کاتێك $r \neq 0$ و $r \neq n$ و $n > 1$.

60 **بۆڵینگ** ئەگەری پێکانی یاریزانێکی بۆڵینگ لە دوو جار هەڵدانیدا یەکجار 40% بێت

أ هاوکێشەی هەژمارکردنی p بنووسە و پاشان شیکاربکە.

ج ئەگەر پێکانی یاریزانەکە لە هەردوو هەڵدانەکەدا چەندە؟

پێداچوونەوەی لولپێچی

هەژمارەی هەریەك لەمانە بکە $f(-3)$، $f(0)$، $f(2)$ (پۆلەکانی پێشوو)

61 $f(x) = -x^2 + 2x - 4$

62 $f(x) = (-x)^2 - 3x + 1$

ئەگەر y نەخشەیەکی توانی بێت بە پێی x دیاریبکە. ئەگەر وەها بوو بژمێری ڕوونکردنەوەیی بەکاربهێنە بۆ دۆزینەوەی نەخشەیەکی توانی کە پێدراوەکانی ئەم خشتەیە بنوێنێت.

63

x	1	2	3	4	5
y	1.4	2.6	3.8	5.0	6.2

64

x	1	2	3	4	5
y	10	22	36	52	70

ناوەندە ژمێری و ناوەڕاستە و باو بۆ هەر کۆمەڵەیەك لە پێدراوەکان بدۆزەوە (وانەی 2 − 6)

65 $\{2, 18, 15, 14, 18\}$

66 $\{6, 13, 9, 7, 6, 4\}$

67 $\{24, 20, 32, 24, 16, 34\}$

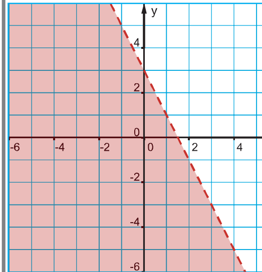
68 $\{10, 5, 15, 5, 8\}$

بەشی 2 ڕێبەری خوێندن: پێداچوونەوە

ئەم لاسەنگانەی خوارەوە بە ڕوونکردنەوەیی شیکاربکە

1 $y > -3$ **2** $y \le x + 3$

3 $2x + 4y > -12$ **4** $6x - 2y > 8$



5 لاسەنگەیەك بە دوونەزانراو بنووسە بەمەرجێك وێنەی بەرامبەر بیێتە شیکاری ڕوونکردنەوەیی لاسەنگەکە

6 بەڕێوەبەرایەتی یەکێك لە مۆزەخانەکان دوو جۆر بلیتی چوونە ژوورەوە دەفرۆشێت. بلیتێکیان بۆ یەك ڕۆژ نرخەکەی 12 000 دینارە و بلیتەکەی تر بۆ دوو ڕۆژە ونرخەکەی 21 000 دینارە. لە یەك ڕۆژدا بایی زیاتر لە 2 520 000 دینار بلیتی چوونە ژوورەوە فرۆشرا لاسەنگەکە بنووسەوە بە روون کردنەوەیی شیکاری بکە.

7 ئەو خاڵە ڕوونکردنەوەییانە دابنێ کە پێدراوەکانی خشتەکە دەنوێنێت هاوکۆلکەی پەیوەستی و هاوکێشەی ڕاستەهێڵی باشترین نواندن بدۆزەوە.

x	2	5	9	13	16
y	8	10	24	16	29

8 ئەم خشتەی خوارەوە پێدراوی داهاتی ساڵانەی هەندێك کەسە، و بەهای ئەو خانووەیکە هەیانە.

داهاتی ساڵانە (بەملیۆن دینار)	بەهای خانووەکەی (بەملیۆن دینار)
96.5	130.2
46.3	94.5
56.7	115.5
65.2	106.4
54.7	98.6
59.6	115.5

(أ) ئەم پێدراوانە بە شێوەی ڕوونکردنەوە بنوێنە، داهات وەك گۆڕاوێکی ئازاد بەکاربێنە.

(ب) هاوکۆلکەی پەیوەستی r و ڕاستەهێڵی باشترین نواندن بدۆزەوە

9 فرۆشراوی دوو لقی یەکێك لە کۆگا گەورەکان گەیشتە 12 ملیار دینار، هاوبەشی یەکێك لە لقەکان بەلایەنی کەمەوە 75% کۆی فرۆشراوەکان بوو سیستمی لاسەنگەی هێڵی بنووسە و بە شێوەی ڕوونکردنەوەیی شیکارییەکە بۆ دیاریکردنی فرۆشراوی لە تواناداڕبووی هەر لقێك.

سیستمی لاسەنگە هێڵییەکان بە ڕوونکردنەوەیی شیکاربکە

10 $\begin{cases} y + 1 > 4x \\ y \le x + 1 \end{cases}$ **11** $\begin{cases} y - 3x < 3 \\ 3y \ge x + 3 \end{cases}$

سیستمی لاسەنگە هێڵییەکان بە ڕوونکردنەوەیی شیکاربکە، ناوچەی شیکارەکە چی دەنوێنێت دیاریبکە

12 $\begin{cases} y \le -x + 2 \\ x > -1 \\ y > -1 \end{cases}$ **13** $\begin{cases} y \ge 2x \\ y < 4 \\ y > 2 \\ y \le \frac{1}{2}x + 4 \end{cases}$

14 **کارگێڕی کار** خاوەن دوکانێکی قاوە فرۆش ئارەزوو دەکات تێکەڵێکی لە دوو جۆر قاوە ئامادە بکات کە لە 120 کیلۆ گرام زیاتر نەبێت. نرخی هەر کیلۆ گرامی 10000 دینار کەمترە. بۆ ئەو مەبەستە جۆرێکیان نرخی یەك کیلۆ گرامی 8000 دینار و جۆرەکەی تر نرخەکەی 11500 دینار بوو. سیستمی لاسەنگەکان بنووسە. کە ئەو بڕانەی بەکار هاتووە لە دوو جۆرەکە دەربخات. پاشان سیستمەکە بە ڕوونکردنەوەیی شیکاربکە.

15 یەکێك لە دوکانەکان بابۆڵەی گەرم و سارد پێشکەش دەکات. ئەم خشتەیە پێدراوەکانی بابۆڵەکان دەنوێنێت کە دوکانەکە فرۆشتویەتی ژمارەی ئەو بابۆلانەی دوکانەکە دەیفرۆشێت لە 125 تێپەرناکات لە هەردوو جۆرەکە. دوکانەکە 750 دینار قازانج دەکات لە بابۆلەیەکی سارد و 1000 دینار لە بابۆلەی گەرم. چەند بابۆلە لە هەر جۆرێك پێویستە دوکانەکە بیفرۆشێت بۆ بە دەستهێنانی ئەو پەری قازانجی لە تواناداڕبوو؟

بابۆلە فرۆشراوەکان	نزمترین ڕادە	بەرزترین ڕادە
سارد	60	80
گەرم	40	60

بە شێوەی ڕوونکردنەوەیی ناوچەی گونجاو دیاریبکە.

16 $\begin{cases} x \ge 0 \\ y \ge 0 \\ y \le 3x + 1 \\ y \le -\frac{3}{4}x + 6 \end{cases}$ **17** $\begin{cases} y < 3 \\ y \ge 0 \\ y < 2x + 1 \\ y \le -x + 4 \end{cases}$

18 $\begin{cases} x>0 \\ y<0 \\ y>\frac{1}{2}x-6 \end{cases}$

19 $\begin{cases} y\le 2 \\ y\ge -1 \\ y\ge -1 \\ y\le -x+3 \end{cases}$

20 ئەو پەڕی بەهای نەخشەی بە سوودی $p=6x+10y$ چەندە؟ مەرجەکانی ڕاهێنانی 16 ساغدەکاتەوە.

21 ئەو پەڕی بەهای نەخشەی بە سوودی $p=14x+9y$ چەندە؟ مەرجەکانی ڕاهێنانی 17 ساغدەکاتەوە.

یەکێك لەکارگەکان دوو جۆرە پێڵاو دروست دەکات لە جۆری ئەستوور کە درووستکردنی 6 خولەکی دەوێت و بڕی 8000 دینار قازانج دەکات و جۆری تەنك دروستکردنی 4 خولەکی دەوێت و 9000 دینار قازانج دەکات. تۆڕی بەرهەمهێنان لە توانایدا هەیە 12 کاتژمێر ئیش بکات یان 750 خولەك بەپێی پێداویستییەکانی بازار کارگەکە پێڵاوی ئەستوور بەلایەنی کەمەوە دوو ئەوەندەی پێڵاوی تەنك دروست دەکات

22 ئەو بەرنامە هێڵییە بنووسە کە ئەم پرسیارە دەنوێنێت و بەڕوونکردنەوەیی ناوچەی گونجاو دیاریبکە.

23 نەخشەی بەسوود بنووسە.

24 زۆرترین قازانج لە تواناداییێت کە کارگەکە لە ڕۆژێکدا دەستی بکەوێت چەندە؟

25 **فرۆشراوەکان** دوکانی مۆبایل لە نێوان 10 تا 52 مۆبایل لەگەڵ بەڵێنی چاککردنەوە دەفرۆشێت و لەنێوان 5 تا 10 مۆبایل بەبێ بەڵێن دەفرۆشێت کۆی فرۆشراوەکان لە 30 مۆبایل تێپەرناکات لە ڕۆژێکدا دوکانەکە 35000 دینار بۆ هەر مۆبایلێك لەگەڵ بەڵێندا قازانج دەکات.و بڕی 5000 دینار قازانج دەکات بۆ هەر مۆبایلێك بەبێ بەڵێن بیفرۆشێت. پێویستە دوکانەکە چەند مۆبایل لە هەرجۆرێك بفرۆشێت بۆبە دەستهێنانی ئەو پەری قازانجی لە توانادابێ؟

ڕێگەی لابردن بۆ شیکارکردنی هەریەك لەم سیستمانە بەکاربێنە؟

26 $\begin{cases} x+3y+2z=13 \\ 2x+2y-z=2 \\ x-2y-3z=-12 \end{cases}$

27 $\begin{cases} x+y+z=2 \\ 3x+2y-z=-1 \\ 3x-y=4 \end{cases}$

پۆلینی ئەم سیستمانە بکە و ژمارەی شیکارەکانی دیاریبکە

28 $\begin{cases} x+y+z=-2 \\ -x+2y-5z=4 \\ 3x+3y+3z=5 \end{cases}$

29 $\begin{cases} -x-y+2z=-3 \\ 4x+4y-8z=12 \\ 2x+y-3z=-2 \end{cases}$

ناوەندی ژمێرەی و ناوەڕاستە و باو بۆ هەریەکە لەم پێدراوانە بدۆزەوە.

30 6 ،8 ،0 ،8 ،5

31 12 ،15 ،13 ،13 ،15 ،12

32 ئەم نەخشەیە دابەشبوونی ئەگەر بۆ ژمارەی ڕوداوەکانی ڕۆژانەی شارێکی بچووك دەنوێنێت. ژمارەی ڕووداوی چاوەڕوانکراو لە ڕۆژێکدا بدۆزەوە

ژمارەی ڕوداوەکانی n	0	1	2	3
ئەگەری n ڕووداو	0.65	0.22	0.1	0.03

33 ڕوونکردنەوەی سمێڵی دروستبکە بۆ ئەم کۆمەڵە پێدراوانە پاشان مەودای چواریەکی دیاریبکە:

71, 50, 29, 83, 48, 65, 52, 33

34 ژمارەی ئەو پێشبڕکێیانەی یەکێك لە شۆفێری ئۆتۆمبێلەکانی وەرزش تێیدا براوەیە لە هەر ساڵێك لە ساڵەکانی 10 ساڵی ڕابردوو بریتییە لە 5، 7، 4، 11، 8،10، 8، 6، 9، 7 ...؟ ژمارەی ئەو پێشبڕکێیانەی کە دوورییەکەی لە ناوەندە ژمێرەکەی لە لادانی پێوانەکەی لەیەك زیاتر نابێت بدۆزەوە.

35 خوێندکارانی پۆلی کۆتایی تاقیکردنەوەی وەرگرتنیان لە زانکۆ ئەنجامدا. ناوەندی ژمێری نمرەکانیان 81.3 بوو و لادانی پێوانەیی 4.4 بوو، کاوە، 96 نمرەی لە 100 بەدەستهێناوە. ئایا نمرەکەی بەهای پەرگە؟

36 ئەگەر نمرەکانی نەشمیل لە 6 تاقیکردنەوەدا بەم شێوەیەبێت. 73، 88، 86، 90، 87، 29 ئەوا لادانی نێوانەیی و لادانی پێوانەیی بۆ ئەم پێدراوانە بدۆزەوە ئەگەر نمرەکەی لە تاقیکردنەوەی حەوتەم 32 بێت کاریگەری ئەم نمرەیە ڕوونبکەوە لە سەر هەردوو لادانی نێوانەیی و پێوانەیی.

سەلمێنراوی کراوەی دوو ڕادەدار بۆ کردنەوەی ئەوانە بەکاربێنە

37 $(5+2x)^3$

38 $(x-2y)^4$

39 سەردار گوڵکەری تیپی تۆپی پێیە ئەگەری پێکانی گوڵ لە لێدانی سەربەخۆ بریتییە لە0.65 سەردار 57 لێدانی سەربەخۆی جێبەجێکرد ژمارەی پێشبینیکراو بۆ پێکانی گوڵ لە لێدانەکانیدا بدۆزەوە، لادانی پیوانەیی بدۆزەوە؟

بەشی 2

تاقیکردنەوەی بەش

1 یانەی دھۆك كراس و كڵاو كە دروشمی یانەكەی لەسەر نەخشكراوە دەفرۆشێت بۆ ئەوەی بەلایەنی كەمەوە 000 400 2 دینار كۆبكاتەوە. نرخی ھەر كراسێك 000 15 دینار و نرخی كڵاوێك 000 8 دینارە لاسەنگەیەك بنووسە ژمارەی كڵاوەكان و كراسەكان كە پێویستە یانەكە بیفرۆشێت بنوێنێت، لاسەنگەكە بە ڕوونكردنەوەیی شیكاربكە.

2 تیپێك لە توێژەوەران ھەستان بە توێژینەوەیەك لەسەر نەخۆشخانەكان، لە خشتەیەكدا پێدراوەكانی ژمارەی قەرەوێڵەكان و ژمارەی كارگوزارانی خەستەخانەكەیان تۆماركرد

ژمارەی قەرەوێڵەكان	ژمارەی كارمەندان
23	69
29	95
35	118
42	126
46	123
54	178
64	156
76	176

أ پێدراوەكانی خشتەكە بە ڕوونكردنەوەیی بنوێنە ژمارەی قەرەوێڵەكان بە گۆڕاوی ئازاد دابنێ.

ب ھاوكۆلكەی پەیوەستی و ھاوكێشەی ئەو ڕاستەھێڵەی باشترین نواندن بدۆزەوە. وێنەی ڕاستەھێڵەكە و خاڵەكانی بەڕوونكردنەوەیی بكێشە

ج ژمارەی ئەو قەرەوێڵەكانی ئەو نەخۆشخانەیەی كە 80 كەس ئێشی تیادەكات بخەمڵێنە.

ئەم سیستمی لاسەنگانە بە ڕوونكردنەوەیی شیكاربكە.

3 $\begin{cases} 2y-4x\geq 4 \\ y-x\geq 1 \end{cases}$

4 $\begin{cases} y+x\geq 3 \\ y-4\leq 0 \end{cases}$

5 **كیمیا** یەكێك لە كیمیازانان ئیش لەسەر ئاوێتەیەكی $250\,ml$، كە بەلایەنی زۆرە سوێریەكەی 18% بە بەكارھێنانی دوو گیراوە سوێری یەكەم 9% و سوێری دووەم 24% . سیستمی لاسەنگەكان بنووسە شیكاری بكە بۆ دۆزینەوەی ئەو بڕەی كە پێویستە لە ھەریەك لە دوو گیراوەكە بەكاریبھێنێت.

6 بچووكترین بەھا بۆ نەخشەی بەسوود $P=5x+9y$ بە پێی ئەم مەرجانە بدۆزەوە .

مەرجەكان $\begin{cases} x\geq 0 \\ y\geq 0 \\ y\leq 2x+1 \\ y\leq -3x+6 \end{cases}$

پۆلینی سیستمی ھێڵی بكەو بە ڕێگای لابردن سیستمی دیاریكراو شیكاربكە

7 $\begin{cases} x-y+z=-2 \\ 4x-y+2z=-3 \\ 2x-3y+2z=-7 \end{cases}$

8 $\begin{cases} 3x-y-z=-1 \\ x+y+2z=8 \\ 6x-2y-2z=5 \end{cases}$

ئەم خشتەیەی خوارەوە ژمارەی مانگەكانی ھەر ھەسارەیەك لە سیستمی ڕۆژی پیشان دەدات.

ھەسارەكە	ژمارەی مانگەكان
عەتارد	0
زوھرە	0
زەوی	1
مەریخ	2
موشتەری	63
زوحەل	33
ئۆرانۆس	27
نیبتۆن	13
بلۆتۆ	1

9 ئایا بەھای 63 بەھایەكی پەرگرە؟ ئەو ڕوونبكەوە.

10 ھەژماری ناوەندی ژمێری و ناوەڕاستە و باو و لادانی پێوانەیی ئەم كۆمەڵە پێدراوانە بكە: بەھای پەرگر لەو كۆمەڵەیە دیاریبكە. باسی بكە چۆن بەھای پەرگر كاردەكاتە سەر ناوەندە ژمێرەیی و لادانی پێوانەیی. $90, 114, 99, 128, 111, 12,$ $95, 98, 103, 110, 107, 93$

11 ڕادداری دووانی $(3x+4)^4$ بكەوە.

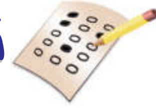
ئەگەری بردنەوە لە یەكێك لە یارییەكاندا بریتییە لە ئاوێتەكردنی 15% ھۆشیار 10 جار یاریكرد.

12 ئەگەری بردنەوەی دوو جار بدۆزەوە

13 ئەگەری بردنەوەی بەلایەنی كەمەوە دوو جار بدۆزەوە

بەشی 2

تاقیکردنەوەی کەڵەکەبوو

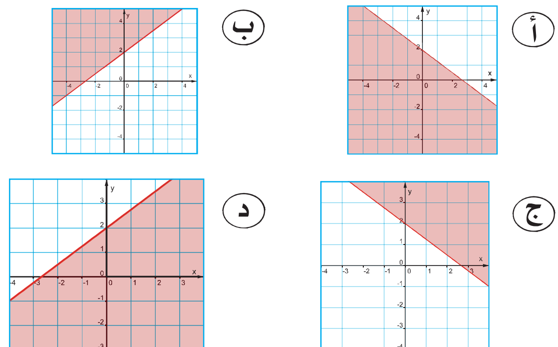


1 کام لەمانەی خوارەوە هاوکێشەی ئەو ڕاستەهێڵە دەنوێنێت کە بەخاڵی $(-2, 7)$ دا دەڕوات و لارییەکەی -3 ـە؟

أ) $y=-3x-1$ ب) $y=-3x+1$

ج) $y=-3x+13$ د) $y=-\frac{1}{3}x+1$

2 کام لەمانەی خوارەوە ناوچەی شیکاری لاسەنگەی $y+\frac{3}{4}x\geq 2$ دەنوێنێت؟



3 کام لەم کۆمەڵە ژمارانەی خوارەوە 3−دانەنییە تێیدا؟

أ) تەواوەکان ب) ڕاستییەکان

ج) ڕێژەییەکان د) سروشتییەکان

4 بڕی $4\sqrt{50}+3\sqrt{72}$ بەسادەترین شێوە بنووسە

أ) $4\sqrt{7}$ ب) $7\sqrt{112}$

ج) $12\sqrt{5}$ د) $38\sqrt{2}$

5 لاری ڕاستەهێڵی $-3y=6x+12$ چەندە؟

أ) -4 ب) -2 ج) $-\frac{1}{2}$ د) $-\frac{1}{4}$

6 ئەم خشتەیەی خوارەوە پێدراوی کرێی ڕۆژانەی کرێکارەکانی یەکێك لە کۆمپانیاکان بە پێی ساڵانی شارەزاییان ڕووندەکاتەوە. کام لەمانە بەهایەکی گونجاو بۆ لاری ڕاستەهێڵی زۆرترین نواندن؟

ژمارەی ساڵانەی شارەزایی	کرێ بەدینار
0	33 407
2	34 273
5	37 882
8	40 185
10	42 977
12	45 864
15	53 811

أ) 450 ب) 750 ج) 1275 د) 2650

7 تێچوونی بەکرێ گرتنی ئۆتۆمبێلێك 39 950 دینارە، لەگەڵ زیادکردنی 400 دینار بۆ هەر کیلۆمەترێك کە ئۆتۆمبێلەکە کە دەیبڕێت.
کام لەمانەی خوارەوە باشترین پەیوەندی دەنوێنێت لە نێوان تێچوون C و ژمارەی کیلۆمەتری بڕاو k .

أ) $C=39\ 950+400$

ب) $C=39\ 950k+400$

ج) $C=39\ 950+400k$

د) $C=39\ 950k+400k$

8 خاڵەکانی یەکتربڕینی ڕووتەختی $2x+y-5z=20$ لەگەڵ تەوەرەکانی بۆشایی پۆوتانەکاندا چەندە؟

أ) $x=0$ ، $y=0$ ، $z=0$

ب) $x=2$ ، $y=1$ ، $z=-5$

ج) $x=10$ ، $y=20$ ، $z=-4$

د) $x=10$ ، $y=20$ ، $z=4$

9 سەرەکانی ناوچەی گونجاو بریتییە لەخاڵی $(0,0)$ $(-2,6)$ $(3,-1)$ $(-1,1)$ $(-5,-5)$ گەورەترین بەهای تەخشەی بەسوود بۆ $P=4x-y$ لە ناوچەیەدا چەندە؟

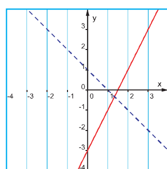
أ) 0 ب) 7 ج) 13 د) 25

10 ماڵی ڕۆڤەند 660 km دوورە لە زانکۆکەیەوە ئەگەر ڕۆڤەند ئۆتۆمبێلەکەی بە خێراییەکی نەگۆڕ 90 km / h لێبخوڕێت پێویستی بە 8 کاتژمێر هەیە بەنزیکی. کام لەم نەخشانەی خوارەوە ژمارەی ئەو کیلۆمەترانە دەنوێنێت کە بڕیویەتی لەدوایی x کاتژمێر لە دەرچوون لە ماڵەکەی.

أ) $f(x)=660-90x$ ب) $f(x)=660+90x$

ج) $f(x)=660-80x$ د) $f(x)=90x$

11 کام لەم سیستمی لاسەنگانە ئەم ناوچە شیکاری هەیە؟



أ) $\begin{cases} y\leq 2x-3 \\ y\geq -x+1 \end{cases}$ ب) $\begin{cases} y\leq 2x-3 \\ y>-x+1 \end{cases}$

ج) $\begin{cases} y<2x-3 \\ y>-x+1 \end{cases}$ د) $\begin{cases} y\geq 2x-3 \\ y<-x+1 \end{cases}$

12 کام لەم سیستمە هێڵییانەی خوارەوە سیستمێکی دیاریکراو

أ $\begin{cases} 2y+3x=-8 \\ 9x=-24-6y \end{cases}$

ب $\begin{cases} 2y+7x=24 \\ 5y-6=-4x \end{cases}$

ج $\begin{cases} y=-x+4 \\ 3y+3x=-21 \end{cases}$

د $\begin{cases} 2y=3x-6 \\ 8y-12x=80 \end{cases}$

کورتە وەڵام

13 لەکاتی هەژمارکردنی کۆ نمرەکانی پالێوراوێك لە تاقیکردنەوەکاندا کە لە کۆلێجێك وەربگیرێت نمرەی زانست لێکدانی 2 و نمرەی بیرکاری لێکدانی 3 نمرەی زێندەزانی لێکدانی 4 دەکرێت بەڵام ئەم نمرەی لە زمان وەریگرتووە لێکدانی هیچ هاوکۆڵکەیەك ناکرێت. نمرەکان شێرزاد 49 لە زمان و 32 لە زانست و 20 لە بیرکاری کۆی خاڵەکانی 411 بوو. ئایا نمرەکەی لە زیندەزانی چەندە؟

14 بچووکترین ژمارەی تەواوی موجەب کە شیکاری ئەم لاسەنگەیە دەکات بدۆزەوە. $\frac{|430-3x|}{3} > 816$

15 هەڵۆ 3 پارچە پیتزاو 8 شلێکی خوارد 975 گەرمۆکەی گەرمی وەرگرت کەچی بلّند 950 گەرمۆکەی گەرمی وەرگرت پاش خواردنی 4 پیتزا و 6 شلیك ئایا چەند گەرمۆکە گەرمی لە پارچە پیتزا کە هەیە؟

کورتە وەڵام

16 کۆمەڵەیەك لە سەردانکەرانی باخچەی ئاژەڵان 4 بلیتی چوونە ژووری گەورە و 5 بلیتی منداڵانیان کرێ برِی 68 000 دیناریاندا، کۆمەڵێکی تر 216000 دیناریان بۆ نرخی 12 بلیتی گەورە و 17 بلیتی منداڵاندا

أ سیستمی هاوکێشەکان بنووسە کە ئەم پرسیارە بنوێنێت

ب ئەم سیستمە بە ڕوونکردنەوەیی شیکاربکە.

ج سیستمەکەبە ڕێگایەکی ترشیکار بکە هۆی ئەوە روونبکەوە کە ئەو ڕێگای بەکارتهێناوە باشترە لە ڕێگای ڕوونکردنەوەیی نرخی بلیت لە هەر جۆرێك چەندە؟

17 خاڵی B وێنەی خاڵی $A(3,4)$ بە وێنەدانەوە بەدەوری تەوەری یەکەم.

أ پۆتانی خاڵی B چەندە؟

ب خاڵی C وێنەی خاڵی B بە ڕاکێشانی 3 یەکە بۆ لای چەپ و دووریەکە بۆ خوارەوە پۆوتانی خاڵی C چەندە؟

18 نەخشەی $g(x)$ نەخشەیەکی پەیدا بوو لە گۆڕانی نەخشەی $f(x)=4x-3$ بە ڕاکیشانی بۆ خوارەوە بەبرِی 5 یەکە.

أ هاوکێشەی نەخشەی $g(x)$ بنووسە.

ب هاوکێشەی نەخشەی $h(x)$ بنووسە کە پەیدابووە لە ئەنجامی گۆڕانی $g(x)$ بە وێنەدانەوەی بەدەوری تەوەری یەکەم.

وەڵامی درێژ

19 لە کارگەی پەردە 820 پاکەت دەزووی لۆکەو 1250 پاکەت دەزووی نایلۆن هەیە. بۆ دروستکردنی پەردەیەکی هەرزان 18 پاکەت دەزووی لۆکەی پێویستە. بەڵام درووستکردنی پەردەیەکی باش 32 پاکەت دەزووی نایلۆن پێویستە بەڵام بۆ دروستکردنی جۆرێکی باش 36 پاکەت دەزووی لۆکە و 28 پاکەت دەزووی نایلۆن پێویستە.

أ مەرجەکانی پرسیارەکە بنووسە.

ب وێنەی ناوچەی گونجاو بکێشە سەرەکانی دیارییکە.

ج کارگەکە 170 000 دینار بۆ پەردەی هەرزان و 190 000 دینار بۆ پەردەی باش قازانج دەکا نەخشەی بە سوود بنووسە.

د چەند پەردە پێویستە کارگەکە لە هەر جۆرێك درووستی بکات تا ئەوپەڕی قازانجی دەستبکەوێت؟

بەشی 3

ڕیزکراوەکان Matrices

بەشی سێیەم

وانەکان

جیهانی تەکنیکی

دەتوانیت ڕیزکراوەکان بەکاربێنیت بۆ خستنەڕووی پێدراوەکان و شیکردنەوەیان. وەك زیادبوونی ژمارەی ئەو هەرزەکارانەی ئامێری تەکنەلۆژیایان هەیە.

ئایا تۆ ئامادەیت؟

زاراوەکان

ئەم وشانە ببەستەوە بە پێناسەکەیەوە کە لەلای چەپدا هاتووە.

1 نیوتیرەی بازنە
2 سستەمی ئەستەم
3 سیستمیکۆتایی نەهاتوو
4 جێگۆڕکێی ئەندازەیی

أ کردارێکە ئەنجامی ناگۆڕێت ئەگەر شوێنی کۆلکەکانیان بگۆڕێت وەك. $ab = ba$, $a+b = b+a$
ب دووری نێوان چەق و خاڵێکی سەر چێوەکەیەتی.
ج سستەمی ئەو هاوکێشانەیە کە شیکاریان نییە.
د گۆڕانە لەجێگای شێوە ئەندازەییەکە یان لەپێوانەکانی یان شێوەکەی
هـ سستەمی ئەو هاوکێشانەیە کە ژمارەیەکی ناکۆتا شیکاری هەیە.

کۆکردنەوە و لێدەرکردنی ژمارە تەواوەکان

ئەم برانە بە سادەترین شێوە بنووسە.

5 $2+7+(-10)$
6 $-8+14+(-3)$
7 $-2+(-3)+(-5)$
8 $-9+15-7+1$
9 $20-(-5)+(-3)-2$
10 $9+8-7+5-(-3)+2$

لێکدان و دابەشکردنی ژمارە تەواوەکان

ئەم برانە بە سادەترین شێوە بنووسە.

11 $-18 \div 9$
12 $-6(-1)$
13 $16(-2)$
14 $-15 \div (-3)$

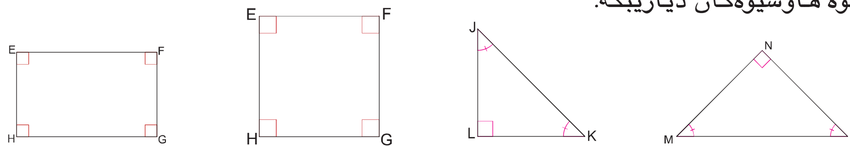
ڕیزبەندی کردارەکان

ئەم برانە بە سادەترین شێوە بنووسە.

15 $2(0.5)+2(0.6)$
16 $0(6.7)+1(0.3)-5(2)-3(8)$
17 $3(2+7+0)-5(3+6+4)$
18 $4(3-6+2)-5(2+0-1)$

جیاکردنەوەی شێوە هاوشێوەکان

19 شێوە هاوشێوەکان دیاریبکە.



دۆزینەوەی پێوانە، نەزانراوەکان لە شێوە هاوشێوەکاندا

20 هەردوو سێگۆشەی ABC و DEF هاوشێوەن $m\widehat{FDE} = 35^\circ$ چ گۆشەیەکی تر پێوانەکەی 35° ؟

21 هەردوو سێگۆشەی FGH و JKL هاوشێوەن $JL = 12$ ، $GH = 12$ ، $FH = 8$ ، KL بدۆزەوە.

بەشی 3

ڕێبەری خوێندن: تێڕوانین لەسەر بەشەکە

لە ڕابردوودا

خوێندوتە

- ڕێکخستنی پێدراوەکان لە خشتەدا.
- ئەنجامدانی کردارەکان لە ژمارە ڕاستیەکاندا.
- شیکارکردنی سستەمی دووانی 2×2
- شیکارکردنی هاوکێشە دووجاکان.

لەم بەشەدا

ئەمانە فێردەبیت

- ڕێکخستنی پێدراوەکان بەڕیزکراو.
- کردارەکان لەسەر ڕیزکراوەکان ئەنجام بدەیت
- سستەمی هاوکێشە هێڵییەکان بە بەکارهێنانی ڕیزکراوەکان شیکاربکەیت.
- بە بەکارهێنانی ڕیزکراوەکان جێگۆڕکێ ئەندازەییەکان ئەنجام بدەیت.
- جێبەجێکردنی کردارەکان لەسەر ژمارە ئاوێتە.

لە داهاتوودا

دەتوانیت کارامەییەکانی ئەم بەشە بەکاربێنێت

- لە کاتی لێکۆڵینەوە لە بابەتەکانی تری وەک ئەندازە و ئامار و کارگێڕی.
- لەو یارییانەی ئاستی جیاواز و ئاڵۆزی تێدایە.
- لە دەرەوەی خوێندنگا بۆ ڕێکخستنی پێدراوەکان و چارەسەرکردنیان ڕێگای شیکردنەوەی ئەو گۆڕانانەی بەسەر ئەنجامەکانیاندا دێت.

زاراوەکان — *Vocabulary*

زاراوەکان	Vocabulary
ناونیشان	Adress
پلە (جۆر)	Dimensions
دانە	Entry
تەوەری سەرەکی	Main diagonal
ڕیزکراو	Matrix
ڕیزکراوەی چوارگۆشەی	Square matrix

دەروازەیەک لەسەر زاراوەکان

بۆ ئەوەی لەگەڵ هەندێك لەم زاراوانەدا ڕابێی کە لەم بەشەدا هاتووە ئەم هەنگاوانە پەیڕەوبکە:

1. **ناونیشان** ژمارەیەکە لە ڕیزکراوەدا. ئەو ستوون و ڕیزەی بۆ دیاریدەکات کە ژمارەکە دەکەوێتە یەکتربڕینیانەوە. ئەو دوو دانەیە کامانەن کە بەکاری دەهێنیت بۆ دیاری کردنی ناونیشانی ماڵێك لە شارێکدا.

2. **پلە (جۆر)** ڕیزکراوە ژمارەی ڕیز و ستوونەکانت بۆ دیاریدەکات. چی لە هاورێکەت تێدەگەیت ئەگەر بڵێ یاریگایەك 50 m بە 30 m ؟

3. **تیرەی سەرەکی** لە ڕیزکراوەیەکدا لە گۆشەی سەرەوەی لای چەپەوە دەست پێدەکات بۆ گۆشەی خوارەوەی لای ڕاست. ئایا ژمارەی لاپەڕەی ئەم کتێبە دەکەوێتە سەر تیرە سەرەکییەکەی؟

4. وەك دەزانیت درێژی و پانی چوارگۆشە یەکسانن. دەرئەنجامی چی دەکەیت لە ڕیزکراوەیەك پێی بووترێت **ڕیزکراوەی چوارگۆشەیی**.

بەشی 3

بیرکاری به خوێندنەوە و نووسین



ستراتیژیەتی خوێندنەوە: خوێندنەوەی هێما بیرکارییەکان و تێگەیشتن لەوەی دەینوێنیت.

خوێندنەوەی هێما بیرکارییەکان و پەیبردن بە ماناکانیان شارەزاییەکە دەبێ هەتبێت، بۆئەوەی بابەتەکانی بیرکاری تێبگەیت. لەکاتی خوێندنی بیرکاری بە بەکارهێنانی ئەم کتێبە. بە دەنگێکی بەرز ئەو برانە بخوێنەوە کە هێما و نووسینی بیرکارییانەی تێدایە. ئەم جۆرە ڕاهێنانە توانای وەرگێڕانی هێمات بۆ وشە پێ دەبەخشێت.

هێمای باو

$=$	$\sqrt{\ }$	$\%$	$\lvert x \rvert$	∞
یەکسانە	ڕەگی دووجا	لەسەدا	بەهایی ڕووتیx	دونەهاتوو

هێمای لاسەنگە

$<$	$>$	$\leq$	$\geq$	$\neq$
بچووکتر لە	گەورەتر لە	بچووکتر یان یەکسان	گەورەتر یان یەکسان	یەکسان نییە یان (جیاوازە لە)

هێمای نەخشە و کۆمەڵە

$f(x)$	$\{$	$\wedge$	$\vee$	$\{x\vert\}$
f نەخشەی x دەخوێندرێتەوە ئیف ئۆف ئیکس	سستەم	و (یەکتربڕین)	یان (یەکگرتن)	کۆمەڵەی x کاتێك

نووسین بە هێما	وەرگێڕانی بە ووشە
$f(x)=\sqrt{16x}-4$	نەخشەی ئیف ئۆف x یەکسانە بەڕەگی دووجای 16 جاران x کەم 4
$\frac{\lvert x-15\rvert}{6}\leq 12$	بەهای ڕووتی x کەم 15 دابەش 6 بچووکترە یان یەکسانە بە 12
$\{x/(x\leq-19)\vee(x>8)\}$	کۆمەڵەی ژمارەکانی x کاتێك x بچووکترە یان یەکسانە بە19- یان x گەورەترە لە 8
$\begin{cases} y\leq-4x+8 \\ y>x-6 \end{cases}$	سستەمی دوو لاسەنگە کە پێکهاتووە لە «y بچووکترە یان یەکسانە بە سالب 4 جاران x کۆ 8» و «y گەورەترە لە x کەم 6»

هەوڵبدە

هەرنووسینێکی هێمادار بە وشە دەرببڕە.

1. $\{x/(x\geq-7)\vee(x\leq-1)$
2. $f(y)=\lvert 15y\rvert+\frac{y}{2}$
3. $\begin{cases} y=2x+3 \\ y=x \end{cases}$
4. $[-5,\infty[$

ئەم ڕستەی دێت بە بەکارهێنانی هێما بیرکارییەکان دەربڕە.

5. کۆمەڵەی ژمارەکانی x کاتێك لەنێوان سالب 8 و 10 دا بێت.

1-3 ڕیزکراوەکان Matrices



بۆچی ئەمە فێردەبین؟

ڕیزکراوەکان بەکاردەهێنرێت بۆ ڕێکخستنی پێدراوەکان وەك ڕێکخستنی کاڵاکانی دوکانێکی بازرگانی بەبەکارهێنانی ڕیزکراوەکان (نموونە 3)

ئامانجەکان

- ڕیزکراوەکان بەکاردەهێنێت بۆ نواندنی پێدراوەکانی بیرکاری و ژیانی ڕۆژانە.
- ڕیزکراوەکان کۆدەکاتەوە و لێکیان دەردەکات.
- ژمارەیەکی ڕاستی لە ڕیزکراوە دەدات.

زاراوەکان Vocabulary

ڕیزکراوە Matrix

پلەی ڕیزکراوە (جۆرەکەی) Dimensions

دانەی ڕیزکراوە Entry

ناونیشان Adress

ئەم خشتەیەی خوارەوە چالاکییەکی بازرگانی یەکێك لە دوکانەکانی فرۆشتنی شتومەکی ماڵان بە درێژایی مانگی نیسان پیشان دەدات. لە خشتەکەدا شتومەکەکانی دوکانەکە (دەرخستن لە یەکی نیساندا) و فرۆشتنەکان (لە مانگی نیساندا) کاڵا کڕاوەکان (لە مانگی نیساندا) پیشان دەدات.

	شتومەکەکانی ناو دوکانەکە لە سەرەتای مانگی نیسان		فرۆشراوەکان لە مانگی نیساندا		کاڵا کڕاوەکان لەمانگی نیساندا	
	بچووك	گەورە	بچووك	گەورە	بچووك	گەورە
مێزی ناو باخ	8	10	7	9	15	20
مقەڵی	15	12	15	12	18	24

داتوانیت پێدراوەکانی شتومەکەکان بە بەکارهێنانی **ڕیزکراوە بنوێنیت**. گەورە بچووك

$$\text{ڕیزکراوەی شتومەکەکان} \longleftarrow \quad \begin{matrix}\text{مێزی ناو باخ}\\ \text{مقەڵی}\end{matrix} \quad M = \begin{bmatrix} 8 & 10 \\ 15 & 12 \end{bmatrix} \qquad M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}$$

ڕیزکراوە Matrix خشتەیەکی لاکێشەییە لە چەند خانەیەك پێکدێت بە دوو کەوانەی ئەستوون دەورە دراون هەرخانەیەك لە ژمارەیەك پێکدێت پێی دەوترێت **دانەیەك Entry** لە دانەکانی ڕیزکراوەکە، **جۆری Dimension** ڕیزکراوە ژمارەی ڕیز و ستوونەکانی دەنوێنیت. بەم شێوەیەش دەنووسرێت: **ژمارەی ڕیزکراوەکان × ژمارەی ستوونەکان** ئەگەر ڕیزکراوەیەك لە دوو ڕیز و سێ ستوون پێکهاتبێت ئەوا جۆرەکەی (2×3)یە. بە 2 بە 3 دەخوێندرێتەوە. جۆری ڕیزکراوەی شتومەکەکانی سەرەوە ٢ × ٢. هەموو دانەیەك لە دانەکانی ڕیزکراوە **ناونیشانێکی Adress** هەیە کە شوێنەکەی لە ڕیزکراوەکەدا پیشان دەدات. ناونیشانی دانە لە ژمارەی ئەو ڕیزەی لەسەر یەکێك بەدوایدا ژمارەی ئەو ستوونەی لەخۆی دەگرێت پێکدێت. دانەی 10 لە ڕیزکراوەکەی سەرەوەدا ئەو دانەیەیە کە لەسەر ڕیزی یەکەم و ستوونی دووەمە. ئەم دانەیە m_{12} هێمادەکرێت.

نموونە 1 بەکارهێنانی ڕیزکراوە بۆ خستنەڕووی پێدراوەکان

پێدراوەکانی فرۆشتنەکانی مانگی نیسان بەکاربهێنە.

أ ڕیزکراوەیەك بەکاربێنە بۆ خستنەڕووی ئەو پێدراوانە.

$$\text{ڕیزکراوەی فرۆشتنەکان} \longleftarrow \quad \begin{matrix}\text{مێزی ناو باخ}\\ \text{مقەڵی}\end{matrix} \quad s = \begin{bmatrix} 7 & 9 \\ 15 & 12 \end{bmatrix} \qquad s = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix}$$

(ستوونەکان: بچووك، گەورە)

ب جۆری ڕیزکراوەی S چەندە؟

ڕیزکراوەی S دوو ڕیز و دوو ستوونی هەیە. کەواتە جۆرەکەی ٢ × ٢.

ج دانەی s_{12} کامەیە؟

دانەی s_{12} دەکەوێتە سەر یەکتربڕینی ڕیزی یەکەم و ستوونی دووەم. کە 9 یە. ئەم دانەیە ئەوە دەنوێنێت کە دوکانەکە 9 مێزی گەورەی لە مانگی نیساندا فرۆشتووە.

د ناونیشانی دانەی 15 چیە؟

دانەی 15 دەکەوێتە شوێنی یەکتربڕینی ڕیزی دووەم لەگەڵ ستوونی یەکەم. دانەی m_{21}



1. ڕیزکراوەی بەرامبەر بەکاربێنە بۆ وەڵامدانەوەی ئەم پرسیارانە.

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 9 \\ 12 & 11 & 4 & 12 \end{bmatrix}$$

أ جۆری ڕیزکراوەی M چەندە؟

ب دانەی m_{32} کامەیە؟

ج لەدوو شوێندا سفر دەردەکەوێت. ناونیشانی هەردووکیان کامەیە؟

دوو ڕیزکراوە یەکسان دەبن ئەگەر لەهەمان پلە(جۆر) بن و دانە بەرامبەرەکانی هەردوو ڕیزکراوەکە یەکسان بن (واتە ئەو دانانەی لەهەردوو ڕیزکراوەکەدا هەمان ناونیشانیان هەبێت).

نموونــــە 2 یەکسانبوونی ڕیزکراوەکان

بەهای x و y دیاریبکە، کاتێك هەردوو ڕیزکراوەکە یەکسان بن.

$$\begin{bmatrix} 2x+4 & 5 & 1 \\ -2 & -3y+5 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 5 & 1 \\ -2 & 5y-3 & -4 \end{bmatrix}$$

لەبەرئەوەی هەردوو ڕیزکراوەکە یەکسانن مانای $2x+4=12$ و $-3y+5=5y-3$

$2x=8$ و $-8y=-8$

$x=4$ و $y=1$



2. بەهای x و y دیاریبکە، کاتێك هەردوو ڕیزکراوەکە یەکسان بن

$$\begin{bmatrix} -3 & -2x & -3 \\ -2 & 3y & -12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -15 & -3 \\ -2 & -2y+15 & -12 \end{bmatrix}$$



کۆکردنەوە ولێدەرکردنی ڕیزکراوەکان

بەنووسین	بەژمارە	بەجەبری
بۆئەوەی دوو ڕیزکراوە کۆبکەیەوە یان لێکیاندەربکەیت دانە بەرامبەرەکان کۆبکەوە	$[1 \quad 2]+[5 \quad 10]=[6 \quad 12]$	$[a_{11} \quad a_{12}]+[b_{11} \quad b_{12}]=[a_{11}+b_{11} \quad a_{12}+b_{12}]$

بۆ کۆکردنەوەی دوو ڕیزکراوە یان لێدەرکردنی یەکێکیان لەوی تر پێویستە هەردووکیان هەمان جۆربن.

دەتوانرێت کرداری کۆکردنەوە ئەنجام بدرێت لەبەرئەوەی هەردوو ڕیزکراوەکە لەهەمان جۆرن	ناتوانرێت کۆکردنەوە ئەنجام بدرێت لەبەرئەوەی ڕیزکراوەکان هەمان جۆرنین
$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix}$	$[1 \quad 2]+\begin{bmatrix} 5 \\ 10 \end{bmatrix}$ $[a_{11} \quad a_{12}]+[b_{14} \quad b_{12} \quad b_{13}]$

نموونـــــه 3 کۆکردنەوە و لێدەرکردنی ڕیزکراوەکان

ئەم ڕیزکراوانە بەکاربهێنە بۆ وەڵامدانەوەی پرسیارەکان.

$$A=\begin{bmatrix}4&-2\\-3&10\\2&6\end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix}4&-1&-5\\3&2&8\end{bmatrix}\quad C=\begin{bmatrix}3&2\\0&-9\\-5&14\end{bmatrix}\quad D=\begin{bmatrix}0&1&-3\\3&0&10\end{bmatrix}$$

کۆیانبکەوە و لەیەکیان دەربکە (ئەگەر توانرا)

أ $A+C$

هەموو دانەیەکی ڕیزکراوەی یەکەم لەگەڵ دانەی بەرامبەری لەڕیزکراوەی دووەمدا کۆبکەوە

$$A+C=\begin{bmatrix}4&-2\\-3&10\\2&6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3&2\\0&-9\\-5&14\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4+3&-2+2\\-3+0&10+(-9)\\2+(-5)&6+14\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7&0\\-3&1\\-3&20\end{bmatrix}$$

ب $C-A$

$$C-A=\begin{bmatrix}3&2\\0&-9\\-5&14\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}4&-2\\-3&10\\2&6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3-4&2-(-2)\\0-(-3)&(-9)-10\\-5-2&14-6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&4\\3&-19\\-7&8\end{bmatrix}$$

ج $C+B$

لەبەرئەوەی جۆری ڕیزکراوەی C (3×2) و جیاوازە لەجۆری ڕیزکراوەی B (2×3) بۆیە کرداری کۆکردنەوەیان ناکرێت.



3. کۆبکەوە یان لێدەربکە (ئەگەر توانرا)

أ $B+D$ ب $B-A$ ج $D-B$

دەزانیت لێکدان کۆکردنەوەیەکی دووبارەیە. ئەمە کاتێک ڕاستە کە ڕیزکراوەیەک لە ژمارەیەک بدرێت.

ئەگەر $M=\begin{bmatrix}2&0\\1&5\end{bmatrix}$ دەتوانیت $M+M$ بە شێوەی $2M$ بنووسیت.

دەتوانیت ژمارەیەک لە ڕیزکراوەیەک بدەیت. ئەویش بە لێکدانی هەموو دانەیەک لە دانەکانی ڕیزکراوەکە لەو ژمارەیە

$$2\begin{bmatrix}2&0\\1&5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\times2&2\times0\\2\times1&2\times5\end{bmatrix}$$

نموونـــــه 4 جێبەجێکردن لە بازرگانیدا

بە گەڕانەوە بۆ نموونەی چالاکی بازرگانییەکەی دوکانی فرۆشتنی کەلوپەلی ناوماڵ. ڕیزکراوەی $M-S+D$ هەژماربکە. کاتێك M ڕیزکراوەی شتوومەکەکانی ناو دوکانەکە و S ڕیزکراوەی فرۆشتنەکان و D ڕیزکراوەی فرۆشتنەکان بێت. ڕیزکراوەی ئەنجامەکە چی دەنوێنێت؟

$$M-S+D=\begin{bmatrix}8&10\\15&12\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}7&9\\15&12\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}15&20\\18&24\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}8-7+15&10-9+20\\15-15+18&12-12+24\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}16&21\\18&24\end{bmatrix}$$

بچووک گەورە

$$=\begin{bmatrix}16&21\\18&24\end{bmatrix}$$ مێزی ناو باخ / مقەڵی

ڕیزکراوەی ئەنجامەکە شتوومەکەکانی ناو دوکانەکە دەنوێنێت لە کۆتایی مانگی نیساندا. دوکانەکە 16 مێزی ناوباخی بچووک و 21 مێزی گەورە و 18 مقەڵی بچووک و 24 گەورەی تیادەمێنێتەوە.



4. ڕیزکراوەی $A+2B-3C$ هەژماربکە کاتێك

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 2\end{bmatrix} \text{ و } B=\begin{bmatrix}-1 & 3\\ -2 & 5\end{bmatrix} \text{ و } C=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 2 & 3\end{bmatrix}$$

نموونـــه 5 نووسینی برە ڕیزکراوەییەکان بە سادەترین شێوە

ئەم ڕیزکراوانە بەکاربهێنە بۆ وەڵامدانەوەی پرسیارەکان

$$A=\begin{bmatrix}4 & -2\\ -3 & 10\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}4 & -1 & -5\\ 3 & 2 & 8\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 0 & -9\end{bmatrix},\quad D=\begin{bmatrix}-6 & 3 & 8\end{bmatrix}$$

بە سادەترین شێوە ئەمانە بنووسە

أ $2A-3B$ ئەگەر لە توانادا هەبوو

$$2A-3B=2\begin{bmatrix}4 & -2\\ -3 & 10\end{bmatrix}-3\begin{bmatrix}4 & -1 & -5\\ 3 & 2 & 8\end{bmatrix}$$

لەبەرئەوەی لێکدانی ڕیزکراوەیەك لە ژمارەیەکی نەگۆڕ جۆرەکەی ناگۆڕێت، کەواتە جۆری ڕیزکراوەی $2A$ و $3B$ یەکسان نابن. ئەمەش وادەکات کۆکردنەوەیان لە توانادا نەبێت.

ب $C-2A$

$$C-2A=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 0 & -9\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}4 & -2\\ -3 & 10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 0 & -9\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}(-2)\times 4 & (-2)\times(-2)\\ (-2)\times(-3) & (-2)\times 10\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 0 & -9\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-8 & 4\\ 6 & -20\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5 & 6\\ 6 & -29\end{bmatrix}$$

ڕۆشنایی

دووکەوانەی ڕیزکراوە هێمایە بۆ بەشبوون 2A – بەسەر هەموو دانەکانی ڕیزکراوەی A دا بەشبکە. پێش ئەوەی دەست بە کۆکردنەوە بکەیت وەك لە برە ژمارەییەکاندا دەکرێت



5. ئەگەر لە توانادابوو ئەمانە بە سادەترین شێوە بنووسە.

أ $2B+3C$ ب $4A-3C$ ج $D+0.5D$



سیفەتەکانی کۆکردنەوەی ڕیزکراوەکان

بەنووسین	بەژمارە	بەجەبری
سیفەتەکانی ئاڵوگۆڕ کۆکردنەوەی ڕیزکراوە کرداری ئاڵوگۆڕە	$\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2 & 7\\ 3 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 7\\ 3 & 4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 4\end{bmatrix}$	$A+B=B+A$
سیفەتەکانی یەکتربەستن کۆکردنەوەی ڕیزکراوە کرداری یەکتربەستنە	$\begin{bmatrix}5\\ 4\end{bmatrix}+\left(\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\\ 3\end{bmatrix}\right)=\left(\begin{bmatrix}5\\ 4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}\right)+\begin{bmatrix}2\\ 3\end{bmatrix}$	$A+B+C$ $=(A+B)+C$ $A+(B+C)$
ڕیزکراوەی بێ لایەن لەکۆکردنەوە کۆمەڵەی سفر دانەی بێ لایەنی ڕیزکراوەکانە	$\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 4\end{bmatrix}$	$A+0=A$
دژە کۆی ڕیزکراوە دژەکۆی ڕیزکراوەی M بریتییە لەو ڕیزکراوەی کە پەیدادەبێت لە ئەنجامی گۆڕینی هەردانەیەك لە دانەکانی M بە دژەکۆیەکەی	$\begin{bmatrix}-2 & 5\\ 9 & -6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2 & -5\\ -9 & 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$	ئەگەر B دژەکۆی A بێت ئەوا $A+B=0$ کاتێك 0 ڕیزکراوەی سفریە.

ڕۆشنایی

ڕیزکراوەی سفری ئەو ڕیزکراوەیە کە هەموو دانەکانی سفرن.

بیربكەوە و تاوتوێبكە

1. هەموو جۆرەكانی ئەو ڕیزكراوە كە لە توانادایە ژمارەی دانەكانی 8 بێت بدۆزەوە.
2. باسی ئەو كردارە بكە لە ڕیزكراوەكاندا كە وادەكات نیشانەی هەموو دانەكانی پێچەوانە بێتەوە.
3. ڕێكخەر بە ئەم خشتەی خوارەوە بنووسەوە، پاشان تەواویبكە. لەهەر خانەیەكدا نموونەیەكی ژمارەیی و نموونەیەكی ڕیزكراوەیی بهێنەوە.

كردار	ژمارە	ڕیزكراوە
كۆكردنەوە		
لێدەركردن		
لێكدان لە ژمارەیەك		



1-3 ڕاهێنانەكان

ڕاهێنانی ئاڕاستەكراو

1 **زاراوەكان** ئەو بەهایەی كە دەكەوێتە سەر یەكتربڕینی ڕیزێك و ستوونێك لە ڕیزكراوەیەكدا (دانەیەك یان ناونیشانی دانەیەك) دەنوێنێت.

بڕوانە نموونە 1

2 هۆشیار و شێركۆ و دڵسۆز كاری فرۆشتنی بلیتی ئاهەنگی كۆتایی ساڵیان گرتە ئەستۆ ئەم خشتەی خوارەوە ئەو پێدراوانە دەنوێنێت كە پەیوەندییان بەفرۆشتنی بلیتەكانەوە هەیە.

فرۆشتنەكانی بلیتەكانی ئاهەنگی كۆتایی ساڵی خوێندن			
خوێندكار	بلیتی تاك	دەفتەرە بلیت	كۆی پارەی گشتی
هۆشیار	39	15	114 000 دینار
شێركۆ	108	8	143 000 دینار
دڵسۆز	13	25	138 000 دینار

أ به ڕیزكراوەی A پێدراوەكانی خشتەكە بنوێنە.

ب جۆری ڕیزكراوەی A چەندە؟

ج دانەی a_{13} كامەیە؟ چی دەنوێنێت؟

د ناونیشانی دانەی 143 000 چییە؟

بڕوانە نموونە 2

3 بەهای x و y دیاریبكە، كاتێك هەردوو ڕیزكراوەكە یەكسانبن.

$$\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 4 & x+8 \\ 2y-1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 14-x \\ -13-y & 0 \end{bmatrix}$$

پڕوانە نموونە 3

ئەم ڕیزکراوانە بەکاربهێنە بۆ شیکارکردنی پرسیارەکانی 4 تا 7. کۆیان بکەوە و لەیەکیان دەربکە (ئەگەر توانرا)

$$A=\begin{bmatrix}1.5 & 3.8 & 3\\ -1.2 & 2.4 & 0\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}0 & 4 & 1\\ 0 & -2 & 1\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}-1 & 1.1 & 6\\ 4 & 0 & 1\\ 1 & 2.3 & 1\end{bmatrix}$$

4 $A+B$ **5** $B-C$ **6** $B-A$ **7** $B+A$

پڕوانە نموونە 4

8 بەکاربردن خشتەی بەرامبەر نرخی سێ جۆر پۆشاکی وەرزشی دەنوێنێت پێش دانانی باج لەسەریان. ئەم نرخانە بە ڕیزکراوەی M بنوێنە. پاشان ڕیزکراوەی T بدۆزەوە کە بەهای باجی هەر جۆرێکیان بنوێنێت. ئەگەر بزانیت ڕێژەی سەدی باج 8.25%. ڕیزکراوەی A بنووسە کە نرخی هەرسێ جۆر پۆشاکەکە بنوێنێت دوای زیادکردنی باج لەسەری.

نرخی پۆشاکی وەرزشی			
	سادە	بە ئارم	نایاب
کراسی لۆکە	9 000	13 000	14 000
شۆرتی کورت	6 000	9 500	11 000
شۆرتی درێژ	15 000	21 000	23 000

پڕوانە نموونە 5

ئەم ڕیزکراوانە بەکاربهێنە بۆ شیکاری پرسیارەکانی 9 تا 12. ئەنجامەکە بەسادەترین شێوە بنووسە. (ئەگەر توانرا).

$$A=\begin{bmatrix}1 & 3 & 3\\ -1 & 2 & 0\end{bmatrix}\ B=\begin{bmatrix}0 & 4 & 1\\ 0 & -2 & 1\end{bmatrix}\ C=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 6\\ 4 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix}$$

9 $3B$ **10** $\frac{1}{2}C$ **11** $A-2B$ **12** $2C-A$

ڕاهێنان و شیکارکردنی پرسیارەکان

ڕاهێنانی ئازاد	
شیکاری پرسیارەکان	سەیری نموونەی
13	1
14	2
18–15	3
19	4
23–20	5

13 پێدراوەکانی خشتەکە بەکاربهێنە بۆ وەڵامی پرسیارەکان

هەڵبژاردنەکانی گەشت			
نمرە	بلیت	ئۆتێل	ئۆتۆمبیل
سەرەتا	425 500	396 000	65 990
ئیش	385 980	245 500	45 900
ئابوورییانە	275 120	103 250	29 500

أ پێدراوەکانی خشتەکە بە ڕیزکراوەی A بنوێنە

ب جۆری ڕیزکراوەی A چەندە؟

ج دانەی a_{32} کامەیە؟ چی دەنوێنێت؟

د ناونیشانی دانەی 385 980 چییە؟

14 بەهای x و y دیاریبکە بۆ ئەوەی دوو ڕیزکراوەکە یەکسانبن

$[2x \quad y+1 \quad -2y]$ و $[3-2y \quad 14-x]$

ئەم ڕیزکراوانە بەکاربێنە بۆ شیکاری پرسیارەکانی 15 تا 18. کۆیانبکەوە و لەیەکیان دەربکە (ئەگەر توانرا)

$$D=\begin{bmatrix}5.1 & 2.5\\ -2 & 0\\ 0 & 1.5\end{bmatrix}\quad E=\begin{bmatrix}3.2 & -1\\ -1.5 & 2.4\end{bmatrix}\quad F=\begin{bmatrix}-4.2 & -1\\ 2.2 & 0\end{bmatrix}$$

15 $F-E$ **16** $D+E$ **17** $D+F$ **18** $E+F$

19 خوێندنی زانکۆ ئەم خشتەی خوارەوە تێچوونی ساڵانەی خوێندنی زانکۆدا دەردەخات.

بەهای نزیکەیی تێچوونی ساڵانەی خوێندنی زانکۆ			
	زانکۆی تایبەت	زانکۆی نەتەوەیی فەرمی	زانکۆی فەرمی بێگانە
تێچوون بەدینار	27 677 000	12 841 000	19 188 000

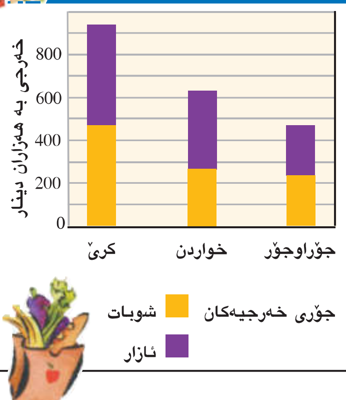
شارەزایان وا پێشبینی دەکەن کە ساڵانە بڕی تێچوون بە ڕێژەی 5% زیادبکات. بە بەکارهێنانی لێکدانی ژمارەیەک لە ڕیزکراوە بەهای نزیکەیی تێچوونی خوێندن لەهەرسێ جۆر زانکۆیەکە بدۆزەوە.

ئەم ڕیزکراوانە بەکاربێنە بۆ شیکاردنی پرسیارەکانی 19 تا 22. ئەنجامەکە بە سادەترین شێوە بنووسە (ئەگەر توانرا)

$$G=\begin{bmatrix}5&2\\-2&0\\0&1\end{bmatrix},\ H=\begin{bmatrix}0&-1\\-1&2\\0&2\end{bmatrix},\ J=\begin{bmatrix}4\\1\\-2\end{bmatrix},\ K=\begin{bmatrix}2&3\\3&-1\\5&0\end{bmatrix}$$

20 $2G$ **21** $\frac{1}{2}(H+J)$ **22** $2K-G$ **23** $H-0.3G$





24 وێنەی ڕوونکردنەوەیی بەرامبەر ئەو ئەنجامانە دەنوێنێت کە کلارا بە بەکارهێنانی بژمێر دەستیکەوتوە. پاش ئەوەی خەرجی مانگی شوبات وئازاری تێداتۆمارکرد. ڕیزکراوەی $F(3\times1)$ بەکاربێنە بۆ نواندنی خەرجییەکانی لە مانگی شوباتداو ڕیزکراوەی M بۆ نواندنی خەرجییەکانی لە مانگی ئازاردا. ڕیزکراوەکان کۆبکەوە بۆ دەستکەوتنی خەرجی گشتی لەهەردوو مانگەکەدا.

25 ئەندازە ڕیزکراوەی $\begin{bmatrix}2&2.5\\3&3.5\end{bmatrix}$ نیوەتیرەکانی چوار بازنە دەنوێنێت.

أ ڕیزکراوەیەک بنووسە چێوەی بازنەکان بنوێنێت.

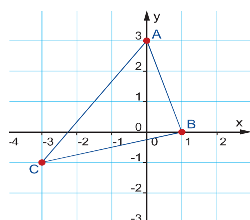
ب ئایا دەتوانین ڕیزکراوەیەک بەدەست بێنین ڕووبەری بازنەکان بنوێنێت بە بەکارهێنانی کۆکردنەوەی ڕیزکراوەکان و لێکدانیان لە ژمارەیەک؟ ئەوە ڕوونبکەوە.

بیری ڕەخنەگر **ڕوونبکەوە ئەم دەستەواژانە هەمیشە دروستن یان هەندێک جار دروستن یان هەمیشە نادروستن.**

26 دەتوانرێت دوو ڕیزکراوە کۆبکرێنەوە کە هەمان دانەیان هەبێت.

27 دەتوانرێت دوو ڕیزکراوە کۆبکرێنەوە کە ژمارەی دانەکانیان جیاوازبن.

28 دەتوانرێت دوو ڕیزکراوە کۆبکرێنەوە کەهەریەکەیان لە 3 ڕیز و 4 ستوون پێکهاتبن.



29 ئەگەر توانرا دووڕیزکراوە کۆبکرێنەوە ئەوا دەتوانرێت لەیەکیش دەربکرێت

30 **أ** ڕیزکراوەیەک بنووسە خاڵی سەرەکانی سێگۆشەکە بنوێنێت. بەجۆرێک پۆی خاڵەکان ڕیزی یەکەم و تانەکانیان لەسەر ڕیزی دووەم بێت.

ب کردارێک لەسەر ڕیزکراوەکان بەکاربێنە بۆ زیادکردنی 3 بۆ پۆی خاڵەکان و 1 بۆ تانی خاڵەکان.

ج وێنەی ئەو سێگۆشەیە بکێشە ڕیزکراوە تازەکە بنوێنێت. چۆن ئەم سێگۆشەیەت دەستدەکەوێت بە بەکارهێنانی سێگۆشە بنەڕەتییەکە؟

31 بەهای x و y و z دیاریبکە بۆئەوەی ڕیزکراوەکان یەکسان بن.

$$\begin{bmatrix}3&x\\-2&-8\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}11&-4\\y&12\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}14&-10\\9&z\end{bmatrix}$$

32 هەڵە لە شیکردنەوەدا هەڵەکە ڕوونبکەوە: $\begin{bmatrix}2 & 8\\4 & 7\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}6 & 3 & 0\\4 & 1 & 9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8 & 11 & 0\\8 & 8 & 9\end{bmatrix}$

33 بنووسە ئایا لێدەرکردنی ڕیزکراوەکان کردارێکی ئاڵوگۆڕە؟ بە نموونەیەك پاڵپشتی وەڵامەکەت بکە.

ئامادەکردن بۆ تاقیکردنەوە

34 $B=\begin{bmatrix}1 & 0.1 & 2\\1.5 & 2.1 & 0\end{bmatrix}$ و $C=\begin{bmatrix}2 & 0.4 & 6\\6 & 6.4 & 0\end{bmatrix}$. کام بڕە یەکسانە بە ڕیزکراوەی $\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 1 & 0\end{bmatrix}$

(أ) $2C-\frac{1}{2}B$ (ب) $C-2B$ (ج) $B-2C$ (د) $2B-\frac{1}{2}C$

35 کام دەستەواژە لەمانەی خوارەوە هەمیشە دروستە لە ڕیزکراوەی E کە لە پلەی $m\times n$ ؟

(أ) ژمارەی دانەکانی $m\times n$ (ب) دانەی e_{nm} هەیە

(ج) ژمارەی دانەکانی $m+n$ (د) m ستوون و n ڕیزی هەیە

36 بەهای x چەندە بۆئەوەی پاسادانی $x\begin{bmatrix}48 & 32\\8 & 28\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}12 & 8\\2 & 7\end{bmatrix}8$ بکات؟

(أ) 0.25 (ب) 0.5 (ج) 2 (د) 4

37 کورتە وەڵام بەهای x بدۆزەوە کە پاسادانی ئەم هاوکێشەیە دەکا $\begin{bmatrix}2 & -2\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}5 & -x\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-8 & -1\end{bmatrix}$

بەرەنگاری و فراوانکردن

38 بیری ڕەخنەگر چی دەربارەی ئەو ڕیزکراوانە دەڵێی کەژمارەی دانەکانیان ژمارەی خۆیەشە؟ ڕونبکەوە.

39 چی وادەکات هەردوو ڕیزکراوەی $A-B$ و $A+(-B)$ یەکسان بن، کاتێك A و B هەمان جۆربن؟

40 لە چوارگۆشە سیحرابیەکاندا. وەك دوو چوارگۆشەی بەرامبەر. هەمیشە هەمان ژمارەمان دەستدەکەوێت ئەگەر ئەو ژمارانەی لەسەر هەمان ڕیز یان ستوونن کۆیان بکەینەوە. ئایا سەرجەمی هەردوو ڕیزکراوەی چوارگۆشەی سیحراوی چوارگۆشەیەکی سیحراویە؟ ئەوە ڕوونبکەوە.

4	18	8
14	10	6
12	2	16

8	3	4
1	5	9
6	7	2

41 ڕیزکراوەی B بدۆزەوە بۆئەوەی ئەم یەکسانیە دروست بێت $3\begin{bmatrix}2 & -1\\0 & -4\end{bmatrix}-2B=\begin{bmatrix}1 & 5\\-2 & 2\end{bmatrix}$

پێداچوونەوەی لوولپێچی

بڕەیکی جەبری بنووسە کە هەر بارێك بنوێنێت. (پۆلەکانی پێشوو)

42 چێوەی سێگۆشەیەك درێژی لایەکانی سێ ژمارەی جووتی یەك بەدوای یەك بن.

43 ژمارەی ئەو بلیتانەی کە فرۆشراون بە 20 کەس. ئەگەر بزانیت n بلیتی کڕیوە.

44 پارە شیلان 36 پارچە پارەی پێیە کە لە دوو چەشنی 1 000 و 500 دینارین. بەهای ئەو بڕە پارەیە چەندە؟ ئەگەر بزانیت ژمارەی چەشنی 500 دیناریەکان دوو ئەوەندی ژمارەی چەشنی هەزار دیناریەکانە؟ (پۆلەکانی پێشوو)

ڕوونبکەوە کە ئایا خاڵی پێدراو شیکاری سستەمی هەردوو هاوکێشەکەن. (پۆلەکانی پێشوو)

45 $(2,-2)$ ؛ $\begin{cases}x-y=4\\5x+6y=2\end{cases}$

46 $(4.5,2)$ ؛ $\begin{cases}y=2\\2x-4y=1\end{cases}$

2-3

لێکدانی ڕیزکراوەکان
Multiplying Matrices



ئامانجەکان

- سیفەتەکانی ڕیزکراوەکان لە کرداری لێکداندا دەناسێتەوە بە لێکدانی ڕیزکراوەیەک لە یەکێکی تر.

زاراوەکان
Vocabulary

ئەنجامی لێکدانی دوڕیزکراو
Matrix product

ڕیزکراوەی چوارگۆشەیی
Square matrix

تیرەی سەرەکی
Main diagonal

ڕیزکراوەی یەکە
Unit matrix

کێ ئەمە بەکاردەهێنێت؟

خاوەن دامەزراوەکان ڕیزکراوە بۆ دۆزینەوەی دەستکەوت و تێچوون و قازانج بەکاردەهێنن (نموونەی 3)

لە وانەی پێشوودا لێکدانی ژمارەیەک لە ڕیزکراوەیەک فێربوویت. دەشتوانیت دوو ڕیزکراوە لە یەکتری بدەیت. لێکدانی دوو ڕیزکراوە، ڕیزکراوەیەکی تری لێپەیدادەبێت پێی دەوترێت **ئەنجامی لێکدانی دوو ڕیزکراوە Matrix product** . بۆ لێکدانی دوو ڕیزکراوە ئەم دوو ڕێسایە جێبەجێدەکەیت.

- کاتێك دەتوانیت ڕیزکراوەی A لە ڕیزکراوەی B بدەیت (واتە هەژماری $A \times B$ یان AB) بکەیت ئەگەر ژمارەی ستوونەکانی A یەکسان بێت بە ژمارەی ڕیزەکانی B .
- ئەنجامی لێکدانی ڕیزکراوەیەك جۆرەکەی $m \times n$ بێت لە ڕیزکراوەیەك جۆرەکەی $n \times p$ بێت، ڕیزکراوەیەکە جۆرەکەی $m \times p$.

$$A=\begin{bmatrix}3&5&7\\4&1&2\end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix}2&3&3&8\\9&5&2&0\\0&1&6&7\end{bmatrix}$$

A B AB

$2\times 3 \quad 3\times 4 \rightarrow 2\times 4$

ژمارەی ڕیزەکان = ژمارەی ستوونەکان

$$C=\begin{bmatrix}3&5\\4&1\\5&8\end{bmatrix} \quad D=\begin{bmatrix}2&3&3&8&4\\9&5&2&0&6\\0&1&6&7&2\end{bmatrix}$$

C D CD

$3\times 2 \quad 3\times 5$ پێناسە نەکراوە

ژمارەی ڕیزەکان $\neq$ ژمارەی ستوونەکان$(2 \neq 3)$

زۆرجار نوسینی $A_{m\times n}$ بەکاردەهێنرێت بۆ دەرخستنی ئەوەی جۆری ڕیزکراوەکە ـ mn

ڕۆشنایی

ئەمەی خوارەوە لەبیربێت بۆئەوەی ئەنجامی لێکدانی دوو ڕیزکراوە پێناسەکراو بێت پێویستە ژمارەی ستونەکانی ڕیزکراوەی لای چەپ یەکسان بێت بە ژمارەی ڕیزەکانی ڕیزکراوەی لای ڕاست.

نموونـــە 1 جیاکردنەوەی لە توانادابوونی لێکدانی دوو ڕیزکراو

ڕوونبکەوە کە ئەگەر ئەنجامیلێکدانی ئەم دوو ڕیزکراوانە پێناسەکراوە یان نا، ئەگەر پێناسەکراوبوو جۆرەکەی دیاربکە.

أ $A_{2\times 5}$ $B_{5\times 3}$

A B AB

$2\times 5 \quad 5\times 3 = 2\times 3$

لەبەرئەوەی ژمارەی ستوونەکانی ڕیزکراوەی A یەکسانە بە ژمارەی ڕیزەکانی ڕیزکراوەی B بۆیە ئەنجامی لێکدانیان پێناسەکراوە ڕیزکراوەکە لە جۆری 2×3 .

ب $C_{4\times 3}$ $D_{4\times 5}$

C D CD

$4\times 3 \quad 4\times 5$ پێناسە نەکراوە

لەبەرئەوەی ژمارەی ڕیزەکانی ڕیزکراوەی C یەکسان نییە بە ژمارەی ڕیزەکانی ڕیزکراوەی D . بۆیە ئەنجامی لێکدانیان پێناسە نەکراوە.



1. ڕیزکراوەکانی نموونەکە بەکاربهێنە بۆ وەڵامدانەوەی پرسیارەکان. ڕوونبکەوە کە لێکدانی دوو ڕیزکراوەکە پێناسەکراوە یان نا، ئەگەر پێناسەکراوبوو جۆرەکەی دیاربکە

أ BA **ب** DC **ج** DB

چۆن سەیری ژمارەی ستوونەکانی ڕیزکراوەی A و ژمارەی ڕیزەکانی ڕیزکراوەی Bت کرد بۆئەوەی بڕیار لەوە بدەیت کە لێکدانی AB پێناسەکراوە یان نا. بەو شێوەیەش بۆ هەژمارکردنی ئەنجامی لێکدانی دوو ڕیزکراوە هەمان کار بەکاردەهێنیت.



لێکدانی ڕیزکراوەکان

بەجەبری	بەژمارە	بەنووسین
$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ d_1 & d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1c_1+a_2d_1 & a_1c_2+a_2d_2 \\ b_1c_1+b_2d_1 & b_1c_2+b_2d_2 \end{bmatrix}$	$P=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}= \begin{bmatrix} 1\times5+2\times7 & 1\times6+2\times8 \\ 3\times5+4\times7 & 3\times6+4\times8 \end{bmatrix}$	بۆ هەژمارکردنی دانەی p_{kj} لە ڕیزکراوەی $P=AB$. هەر دانەیەکی ڕیزی k لە ڕیزکراوەی A لە دانەی بەرامبەری ڕیزی j لە ڕیزکراوەی B بدە، پاشان ئەنجامەکانیان کۆبکەوە.

نموونــــه 2

لێکدانی ڕیزکراوەکان

ئەم ڕیزکراوانە بەکاربێنە $A=\begin{bmatrix} 0 & 4 & 9 \\ -3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 7 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$ $D=\begin{bmatrix} 11 & -1 \\ 12 & 10 \end{bmatrix}$

ئەنجامی لێکدانەکان هەژماربکە (ئەگەر توانرا)

أ AB

جۆرەکان بپشکنە بۆئەوەی بڕیاربدەیت کە لێکدانەکە پێناسەکراوە. جۆری ڕیزکراوەی A بریتییە لە 2×3 ، جۆری ڕیزکراوەی B بریتییە لە 3×2 . مانای لێکدانی AB پێناسەکراوە. ئەنجامەکەشیان لە جۆری 2×2 . ڕیزی یەکەمی ڕیزکراوەی A لە ستوونی یەکەمی ڕیزکراوەی B بدە وەك لە خوارەوە ڕونکراوەتەوە. ئەنجامەکە لە ڕیزکراوەی C دا لە شوێنی دانەی C_{11} بنوسە.

$$C=AB=\begin{bmatrix} 0 & 4 & 9 \\ -3 & 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 7 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 46 & ? \\ ? & ? \end{bmatrix} \leftarrow 0(5)+4(-2)+9(6)$$

ئێستاش ڕیزی یەکەمی ڕیزکراوەی A لە ستوونی دووەمی ڕیزکراوەی B بدە. وەك لە خوارەوە ڕوونکراوەتەوە. ئەنجامەکە لە ڕیزکراوەی C دا لە شوێنی دانەی C_{12} بنووسە.

$$C=AB=\begin{bmatrix} 0 & 4 & 9 \\ -3 & 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 7 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 46 & 28 \\ ? & ? \end{bmatrix} \leftarrow 0(1)+4(7)+9(0)$$

ڕیزی دووەمی ڕیزکراوەی A لە ستوونی یەکەمی ڕیزکراوەی B بدە وەك لە خوارەوە ڕونکراوەتەوە. ئەنجامەکە لە ڕیزکراوەی C دا لە شوێنی دانەی C_{21} بنووسە.

$$C=AB=\begin{bmatrix} 0 & 4 & 9 \\ -3 & 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 7 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 46 & 28 \\ -9 & ? \end{bmatrix} \leftarrow (-3)(5)+3(-2)+2(6)$$

ڕیزی دووەمی ڕیزکراوەی A لە ستوونی دووەمی ڕیزکراوەی B بدە وەك لە خوارەوە ڕوونکراوەتەوە. ئەنجامەکە لە ڕیزکراوەی C لە شوێنی دانەی C_{22} بنووسە.

$$C=AB=\begin{bmatrix} 0 & 4 & 9 \\ -3 & 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 7 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 46 & 28 \\ -9 & 18 \end{bmatrix} \leftarrow (-3)(1)+3(7)+2(0)$$

کەواتە $C=AB=\begin{bmatrix} 46 & 28 \\ -9 & 18 \end{bmatrix}$

ب BA

جۆرەکان بپشکنە بۆئەوەی بڕیار بدەیت کە لێکدانیان پێناسەکراوە، جۆری ڕیزکراوەی B بریتییە لە 3×2 و جۆری ڕیزکراوەی A بریتییە لە 2×3 ئەنجامی BA پێناسەکراوە و ڕیزکراوەیەکە لە جۆری 3×3 .

$$BA=\begin{bmatrix}5(0)+1(-3) & 5(4)+1(3) & 5(9)+1(2)\\ -2(0)+7(-3) & -2(4)+7(3) & -2(9)+7(2)\\ 6(0)+0(-3) & 6(4)+0(3) & 6(9)+0(2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3 & 23 & 47\\ -21 & 13 & -4\\ 0 & 24 & 54\end{bmatrix}$$

ج AD

جۆرەکان بپشکنە بۆ ئەوەی بڕیار بدەیت، کە لێکدانیان پێناسەکراوە جۆری ڕیزکراوەی A بریتییە لە 2×3 و جۆرەی ڕیزکراوەی D بریتییە لە 2×2 . ئەنجامی AD پێناسە نەکراوە.

ئاگاداربە!

تێبینی ئەوە بکە ئەنجامی لێکدان AB و BA هەمیشە جیاوازن. لێکدانی ڕیزکراوەکان سیفەتی ئاڵوگۆڕی تێدانییە.



2. ئەنجامی لێکدانی ئەمانە هەژماربکە (ئەگەر توانرا)

أ BD ب DA

ڕیزکراوەکان بەکاردێن لە کاروباری کارگێڕی و هەژمارکردنی داهات و تێچوون و قازانج.

نموونـــــە 3 جێبەجێکردن لەسەر دەرخستە (جرد)



کۆمپانیای کەژێ بۆ کەل و پەلی وەرزشی دوو جۆر پۆشاکی ڕۆیشتن لە دوو دوکانی جیاوازدا دەفرۆشێت. خشتەی یەکەم کاڵاکانی ناو هەردوو جۆر پۆشاکەکە دەنوێنێت و دووەمیش نرخی فرۆشتن و تێچوون و قازانجی هەر تاکێک لە تاکەکانی جۆرەکان دەنوێنێت. تێچوونی گشتی هەردوو جۆر پۆشاکەکە لەهەر دوکانێکدا بدۆزەوە.

کاڵاکانی ناو هەردوو دوکان		
	پەسەند	نایاب
دوکانی 1	14	10
دوکانی 2	7	8

داهات وتێچوون وقازانج بەهەزاران دینار			
	نرخ	تێچوون	قازانج
پەسەند	89	44	45
نایاب	119	58	61

لێکدانی ڕیزکراوەکان بەکاربێنە بۆ دۆزینەوەی داهات و تێچوون و قازانجی هەر دوکانێك.

$$\begin{bmatrix}14 & 10\\ 7 & 8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}89 & 44 & 45\\ 119 & 58 & 61\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}14(89)+10(119) & 14(44)+10(58) & 14(45)+10(61)\\ 7(89)+8(119) & 7(44)+8(58) & 7(45)+8(61)\end{bmatrix}$$

	داهات	تێچوون	قازانج
دوکانی 1	2436	1196	1240
دوکانی 2	1575	772	803

$$=\begin{bmatrix}2436 & 1196 & 1240\\ 1575 & 772 & 803\end{bmatrix}$$

تێچوونی پۆشاك لە دوکانی 1 بریتییە لە 1196 هەزار دینار و لە دوکانی 2 دا 772 هەزار دینار



3. کاڵاکانی دوکانی ژمارە 2 بگۆڕە بە 6 جۆری پەسەند و 9 جۆری نایاب ڕیزکراوەی ئەنجامی لێکدانەکان هەژماربکەوە. قازانجی دوکانی 2 دیاریبکە.

ڕیزکراوەی چوارگۆشەیی Square matrix ئەو ڕیزکراوەیە کەهەمان ژمارە لە ڕیز و ستوونی هەیە ڕیزکراوەیەکە لەجۆری $m \times m$. **تیرەی سەرەکی Main diagonal** لە ڕیزکراوەی چوارگۆشەییدا ئەو تیرەیە کە گۆشەی سەرەوەی لای چەپ بە گۆشەی خوارەوەی لای ڕاست دەگەیەنێت.

ڕیزکراوەی یەکە Unit matrix ئەو ڕیزکراوەیە کە هەموو دانەکانی سفرە جگە لەو دانەی دەکەونە سەر تیرەی سەرەکی کە (I) ن. تەنها یەك ڕیزکراوەی یەکە بۆ هەموو جۆرێکی $n \times n$ لە جۆرەکانی ڕیزکراوەی چوارگۆشەیی هەیە.

ڕیزکراوەی یەکە بۆجۆری 2×2 بریتییە لە $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ بۆجۆری 3×3 بریتییە لە $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

لە لێکدانی ڕیزکراوەکاندا. ڕیزکراوەی یەکە لە پلەیەکی دیارکراو هەمان ڕۆڵی 1 دەبینێت لە لێکدانی ژمارەکاندا. ئەگەر A ڕیزکراوەیەکی چوارگۆشەیی پلە $m \times m$ بێت ئەوا $AI_m = I_m A = A$

ئەگەر $A = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ ئەوا:

$$AI_2 = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \times 1 + 7 \times 0 & 5 \times 0 + 7 \times 1 \\ -1 \times 1 + 4 \times 0 & -1 \times 0 + 4 \times 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = A$$

و

$$I_2 A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \times 5 + 0 \times (-1) & 1 \times 7 + 0 \times 4 \\ 0 \times 5 + 1 \times (-1) & 0 \times 7 + 1 \times 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = A$$

لەبەرئەوەی دەتوانرێت ڕیزکراوەیەکی چوارگۆشەیی لەخۆی بدرێت. دەتوانین ئەم کردارە چەندجارێك دووبارە بکەینەوە و هێزی ڕیزکراوەکەمان دەستبکەوێت.

نموونـــــە 4 هێزەکانی ڕیزکراوەی چوارگۆشەیی

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 5 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ئەگەر توانرا ئەمانە هەژماربکە.

أ A^2

$$A^2 = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \times 7 + 3(-2) & 7 \times 3 + 3 \times 0 \\ -2 \times 7 + 0 \times (-2) & -2 \times 3 + 0 \times 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 43 & 21 \\ -14 & -6 \end{bmatrix}$$

ب B^2

$$B^2 = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 5 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 5 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 \times 2 + 4 \times 5 + 1 \times 1 & 2 \times 4 + 4 \times 0 + 1(-1) & 2 \times 1 + 4(-2) + 1 \times 3 \\ 5 \times 2 + 0 \times 5 + (-2) \times 1 & 5 \times 4 + 0 \times 0 + (-2)(-1) & 5 \times 1 + 0(-2) + (-2) \times 3 \\ 1 \times 2 + (-1) \times 5 + 3 \times 1 & 1 \times 4 + (-1) \times 0 + 3(-1) & 1 \times 1 + (-1)(-2) + 3 \times 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 25 & 7 & -3 \\ 8 & 22 & -1 \\ 0 & 1 & 12 \end{bmatrix}$$



4. هەریەکە لەم ڕیزکراوانە هەژماربکە (ئەگەر توانرا)

أ C^2 ب A^3 ج B^3 د I^4

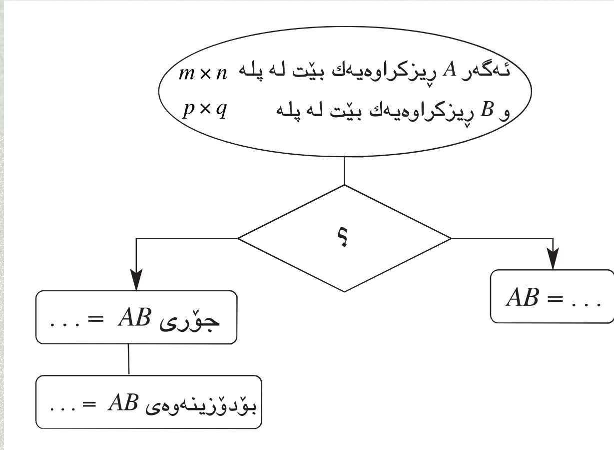
بیربکەوە و تاوتوێبکە

1. ڕوونبکەوە چی ڕوودەدات کاتێك هەوڵی دۆزینەوەی دانەی یەکەمی ئەنجامی لێکدانی AB دەدەیت ئەگەر جۆری هەردوو ڕیزکراوەکە 2×3 بێت.

2. ئایا لێکدانی ڕیزکراوەکان کرداری ئاڵوگۆڕە. نموونە بێنەوە بۆ پاڵپشتی وەڵامەکەت.

3. A ڕیزکراوەیەکە جۆرەکەی 4×2 ئایا دەتوانیت A^2 هەژماربکەیت؟ هۆیەکەی ڕوونبکەوە.

4. ڕیکخەربکە ئەم خشتەیە دروستبکەوە، پاشان تەواوی بکە پرسیارێك لەناو مەعینەکەدا بنووسە. وەڵامەکەی یارمەتیت بدا بە ئاراستەی ڕاست و چەپدا برۆیت





پاشان هێڵکارییەکە تەواوبکە بۆ ڕوونکردنەوەی لێکدانی ڕیزکراوەکان.

2–3 ڕاهێنانەکان

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

1 **زاراوەکان** ڕیزکراوەیەك لە جۆری 2×2 ، هەموو دانەکانی 1 بێت بریتییە لە ——— (ڕیزکراوەی چوارگۆشەییەکان یان ڕیزکراوەی یەکە).

بڕوانە نموونە 1

دیارییکە کە ئەگەر لێکدانی ئەمانە پێناسەکراوە. جۆرەکەی دیاربکە ئەگەر وابوو.

2 $A_{4\times 5}B_{5\times 3}$ **3** $B_{5\times 3}A_{4\times 5}$ **4** $C_{9\times 5}D_{5\times 9}$

5 $D_{5\times 9}C_{9\times 5}$ **6** $E_{6\times 2}F_{2\times 6}$ **7** $F_{2\times 6}E_{6\times 2}$

بڕوانە نموونە 2

ئەم ڕیزکراوانە بەکاربێنە بۆ وەڵامدانەوەی پرسیارەکانی 8 تا 13. ئەنجامی لێکدانیان هەژماربکە (ئەگەر توانرا)

$$A=\begin{bmatrix}0&7&3\\-2&3&0\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}4&2\\1&-3\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}-3&1\\5&-2\\0&1\end{bmatrix},\ D=\begin{bmatrix}3&-1&7&10\\1&-1&3&5\end{bmatrix},\ I=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$$

8 BA **9** CA **10** CB **11** DC **12** BI **13** IB

بڕوانە نموونە 3

14 **دووبارە دروستکردنەوە** خوێندکارانی ئامادەیی سلێمانی هەڵدەستن بە کۆکردنەوەی ئەو کەرەستانەی کە دەتوانرێت بەکاربهێنرێنەوە بۆ دروستکردن. بە مەبەستی فرۆشتن و خەرج کردنی لە ئاهەنگی کۆتایی ساڵی خوێندندا. خشتەی یەکەم ئەو کەرەستانە پیشان دەدات کە خوێندکاران لەماوەی سێ هەفتەدا کۆیانکردۆتەوە خشتەی دووەم بری ئەو پارانە پیشان دەدات کە لەبری هەر کیلۆگرامێك لە جۆرە جیاوازەکان وەریانگرتووە. لێکدانی ڕیزکراوەکان بەکاربێنە بۆ دۆزینەوەی بری هەموو ئەو پارانەی کە لە بری کۆکردنەوەی هەر جۆرە کەرەستەیەك وەریدەگرن.

کۆمەڵە کەرەستەکان			
جۆر	هەفتەی 1	هەفتەی 2	هەفتەی 3
شوشە	29	25	16
قووتوو	8	11	6
ڕۆژنامە	163	127	206
کاغەز	53	107	84

نرخەکان بەهەزاران دینار				
هەفتە	شوشە	قوتوو	ڕۆژنامە	کاغەز
1	20	700	20	1060
2	20	550	10	1000
3	10	420	20	1030

بڕوانە نموونە 4

ئەم ڕیزکراوانە بەکاربێنە بۆ شیکارکردنی پرسیارەکانی 15 تا 18. هەرهێزێك لەمانە هەژماربکە (ئەگەر توانرا)

$$A=\begin{bmatrix}-1 & -2\\ 1 & 0\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}3 & 4 & 2\\ -1 & 0 & 0\\ 3 & 0 & 1\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 0 & -2\\ 1 & 1\end{bmatrix}$$

15 A^2 **16** A^3 **17** C^2 **18** B^2

ڕاهێنان و شیکارکردنی پرسیارەکان

ڕاهێنانی سەربەست	
شیکاری پرسیارەکان	سەیری نموونەی
24–19	1
29–25	2
30	3
40–31	4

دیاریبکە کە ئەگەر لێکدانی ئەمانە پێناسەکراوە جۆرەکەی دیاریبکە ئەگەر وابوو.

19 $A_{2\times1}B_{2\times3}$ **20** $B_{2\times3}A_{2\times1}$ **21** $C_{3\times5}D_{5\times1}$

22 $D_{5\times1}C_{3\times5}$ **23** $E_{7\times7}F_{6\times7}$ **24** $F_{6\times7}E_{7\times7}$

ئەم ڕیزکراوانە بەکاربێنە بۆ شیکارکردنی پرسیاری 8 تا 13. ئەنجامی لێکدانەکە هەژماربکە (ئەگەر توانرا)

$$A=\begin{bmatrix}4\\ -1\\ 2\end{bmatrix}،\ B=\begin{bmatrix}-3 & 0\\ 7 & -2\\ 0 & 1\end{bmatrix}،\ C=\begin{bmatrix}-2 & 3 & -4\\ 1 & -1 & 1\\ 4 & 1 & 3\end{bmatrix}،\ I=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

25 AB **26** CA **27** CB **28** IC **29** CI

30 **دەرخستە (جردة)** دوکانێك دوو پێوانەی جیاواز سندوقی صابون دەفرۆشێت. خشتەی یەکەم لە خوارەوەدا کۆمەڵەی دانەکانی هەردوو جۆر سندوقەکە پیشان دەدات کە دوو لقی جیاواز لە لقەکانی دوکانەکەو. خشتەی دووەم داهات و تێچوون و قازانجی هەر لقێك لە لقەکانی دوکانە پیشان دەدات، لەهەر پێوانەیەك لە پێوانەکانی سندوقەکان. تێچوونی گشتی هەژماربکە.

کۆمەڵەی دانەکانی سندوقەکە لەهەردوو لقدا		
	پێوانەی ئاسایی	پێوانەی گەورە
لقی 1	11	7
لقی 2	8	6

داهات و تێچوون و قازانج			
	داهات	تێچوون	قازانج
پێوانەی ئاسایی	130 000	75 000	55 000
پێوانەی گەورە	190 000	110 000	80 000

ئەم ڕیزکراوانە بەکاربێنە بۆ شیکارکردنی پرسیارەکانی 31 تا 40. بەسادەترین شێوە بیان نووسە (ئەگەر توانرا)

$$C=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix}2 & 1 & 3\\ 0 & 3 & 5\end{bmatrix}\quad A=\begin{bmatrix}0 & -1\\ -1 & 4\\ 2 & 3\end{bmatrix}\quad T=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix}\quad S=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\end{bmatrix}\quad Q=\begin{bmatrix}4 & 13 & -9\end{bmatrix}$$

31 S^2 **32** B^2 **33** T^2 **34** S^3 **35** Q^3

36 AB **37** BA **38** $2BA-C$ **39** $3CB+2B$ **40** $(BA)^2$

41 **پێشبڕکێی پایسکیل** پێشبڕکێی پایسکیل لە سێ جۆر قۆناغ کە جیاوازن لە قورسیدا پێکدێت، ئەمەش وادەکات کە ئەنجامی هەر قۆناغێك لە هاوکۆلکەیەك دەدرێت کە ڕەچاوی قورسی قۆناغەکە و تەمەنی پێشبڕکێکەرەکە بکات. خشتەکەی خوارەوە ئەو خاڵانە دەنوێنێت کە هەریەکە لەو چوار پێشبڕکێکەرە لە قۆناغە جیاوازەکاندا بەدەستیانهێناوە. خشتەی دووەم هاوکۆلکەی ڕاستکردنەوە بۆ هەر قۆناغێك و هەر پێشبڕکێکەرێك پیشان دەدات.

خاڵەکانی هەر پێشبڕکێکەرێك لەهەرسێ قۆناغدا			
پێشبڕکێکەر	قوناغی 1	قوناغی 2	قوناغی 3
گۆران	23.0	18.5	19.5
هەڵۆ	24.0	28.5	25.0
کاوە	19.0	22.0	21.5
کارزان	27.0	26.5	28.0

هاوکۆلکەی ڕاستکردنەوە				
قوناغی	گۆران	هەڵۆ	کاوە	کارزان
1	1.2	1.6	2.0	1.8
2	2.3	2.0	2.8	2.5
3	2.7	2.6	3.2	3.1

أ پێدراوەکان لە دوو ڕیزکراوەدا ڕێکبخە. هەژماری لێکدانیان بکە.

ب ڕیزکراوەی ئەنجامی لێکدانەکان بەکاربێنە بۆ هەژمارکردنی خاڵەکانی کۆتایی هەر پێشبڕکێکەرێك

ج هۆی چییە کە وادەکات دانەکانی دەرەوەی تیرە سەرەکییەکە لە ئەنجامی لێکدانەکەدا هیچ مانایەك نەبەخشن لەم پرسیارەدا؟

بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە **دیاریبکە ئەم دەستەواژانە هەمیشە دروستن یان هەندێك جار دروستن یان هەمیشە نادروستن. وەڵامەکەت ڕوونبکەوە.**

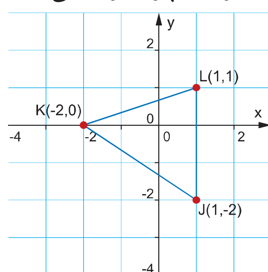
42 ئەگەر ڕیزکراوەی A لەجۆری 3×2 و ڕیزکراوەی B سێ ڕیزی هەبێت ئەوا ڕیزکراوەی AB پێناسەکراوە.

43 ئەگەر ڕیزکراوەی A لەجۆری 3×2 بێت وڕیزکراوەی B سێ ستوونی هەبێت ئەوا ڕیزکراوەی AB پێناسەکراوە.

44 ئەگەر ڕیزکراوەی AB پێناسەکراوبێت ئەوا ڕیزکراوەی BA پێناسەکراو دەبێت.

45 ئەگەر هەردوو ڕیزکراوەی AB و BA پێناسەکراوبوون ئەوا هەردوو ڕیزکراوەکە چوارگۆشەیی دەبن.

46 أ **بنووسە** ڕیزکراوەیەك خاڵی سەرەکانی سێگۆشەی JKL بنوێنێت، بەجۆرێك پۆی خاڵەکان لەسەر ڕیزی یەکەم و تانی خاڵەکان لەسەر ڕیزی دووەم بێت.



ب ڕیزکراوەی $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ بەکاربێنە بۆ لێکدانی پۆوتانەکانی لە 2.

ج وێنەی ئەو سێگۆشەیە بکێشە کە ڕیزکراوە نوێیەکە بنوێنێت.

47 بەهای x بدۆزەوە کە وادەکات هەردوو ڕیزکراوە یەکسان بن $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 & \frac{x}{2} \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 & -19 \\ 24 & -26 \end{bmatrix}$

48 **بنووسە** هۆی ئەمە چیەکە وادەکات یەکسان بوونی $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ دروست بێت؟

49 **پێشبڕکێی چنین** پێشبڕکێی چنین سێ شێوەی جیاواز لە قورسیدا لەخۆدەگرێت. ئەمەش وادەکات هەر شێوەیەك لە هاوکۆلکەیەك بدرێت کە ڕەچاوی قورسی و تەمەنی پێشبڕکێکەرەکە بکات. خشتەی یەکەمی خوارەوە ئەم خاڵانە دەنوێنێت کە هەریەکی لەو سێ پێشبڕکێکەرە بە دەستی هێناوە. خشتەی دووەم هاوکۆلکەی ڕاستکردنەوەی هەر شێوەیەك و هەر پێشبڕکێکەرێك دەنوێنێت.

ئەوخاڵانەی لێژنەی سەرپەرشتیکردن بۆپێشبڕکێکەرانی داناوە			
پێشبڕکێکەر	شێوەی 1	شێوەی 2	شێوەی 3
شارا	16.5	18.0	17.5
سازان	12.5	14.0	17.0
دیلان	16.0	19.5	18.0

هاوکۆلکەی ڕاستکردنەوە			
شێوە	شارا	سازان	دیلان
1	2	3	2
2	3	3	1
3	2	2	1

50 **فرۆشراوەکان** خشتەی یەکەمی خوارەوە فرۆشراوی چەند کرێکارێکی دوکانێکی پێڵاو دەنوێنێت خشتەی دووەم ڕێژەی کۆن و نوێی ئەو برە پارەیە دەنوێنێت کەهەر کرێکارێك لەبری فرۆشتنەکانی دەستی دەکەوێت.

فرۆشراوی کرێکارەکان بەدینار			
کرێکار	پیاوانە	ژنانە	منداڵانە
شێرزاد	5 200 000	4 200 000	2 300 000
بەختیار	8 100 000	8 400 000	3 100 000
زانا	2 700 000	7 400 000	6 300 000

ڕێژەی پارە		
	ڕێژەی کۆن	ڕێژەی نوێ
بۆ پیاوان	9%	9.5%
بۆ ژنان	9%	10%
بۆ منداڵان	13%	12%

أ ئەنجامی لێکدانی هەردوو ڕیزکراوەکە بدۆزەوە. ئەو برە پارەیە چەندە کەهەر کرێکارێك بەپێی ڕێژەکە وەریدەگرێت.

ب کام کرێکار لەهەموویان سوودمەندترە بە گۆڕینی ڕێژەی پارەکە؟

51 **مەتەڵ** لەپیشبڕکێیەکی تەلەفزیۆنیدا پێویست بوو پێشبڕکێکەران ئەو شوێنە دیاریبکەن کە پێویست بوو بۆی بچن. ئەو شوێنەش دانەکانی ڕیزکراوەی ئەنجامی لێکدانی ئەم دوو ڕیزکراوە دیاریدەکەن.

$$P=\begin{bmatrix}5 & 1\\ -11 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & -2\\ 9 & -3\end{bmatrix}$$



دانەی P_{21} شوێنی هێڵی پانی (باکوور ئەگەر دانە موجەب و باشوور ئەگەر دانە سالب بوو) دیاریدەکات، هەروەها دانەی P_{12} شوێنی هێڵی درێژی (ڕۆژ هەڵات ئەگەر دانەکە موجەب و ڕۆژ ئاوا ئەگەر دانەکە سالب بوو) دیاریدەکات کام یەکێك لەو شوێنانەی نەخشەی بەرامبەر پێویستە لەسەریان بیگەنێت.

52 **تۆپی پێ** کۆمەڵەی ئەو خاڵانە بدۆزەوە کەهەر تیپێك بەدەستی هێناوە.

تیپ	لێدانی کۆرنەڵ	لێدانی ڕاستەوخۆ	گۆڵەکان
یانەی هەولێر	11	9	4
یانەی پیرس	15	12	6
یانەی سلێمانی	6	5	9

جۆری گۆڵ	خاڵەکان
لێدانی کۆرنەڵ	6
لێدانی ڕاستەوخۆ	1
گۆڵەکان	3

53 **بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە** ڕیزکراوەی بەرامبەر بەشێوەی لێکدانی ڕیزکراوەیەك کە دانەکانی ژمارەی تەواوبن لە ژمارەیەکی ڕاستی بنووسە.

$$A=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{3}\\ \frac{2}{4} & \frac{5}{6}\end{bmatrix}$$



54 ڕیزکراوەی B لەجۆری 5×12. چ مەرجێك لە ڕیزکراوەی C دا هەبێت بۆئەوەی CB پێناسەکراو بێت؟

(أ) 5 ستوونی هەبێت (ب) 12 ستوونی هەبێت (ج) 5 ڕیزی هەبێت (د) 12 ڕیزی هەبێت

55 ئەنجامی کام یەکێك لەمانە یەکسان نییە بە سێ ئەنجامەکەی تر؟

(أ) $2\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 2\\ 2 & 2\end{bmatrix}$ (ج) $\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ (د) $\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}$

56 کام یەکێك لەم بڕانە یەکسانە بەدانەی C_{22} لە ئەنجامی لێکدانی $C=\begin{bmatrix}7 & -1\\4 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2 & 5\\3 & 8\end{bmatrix}$ ؟

(أ) $4(-2)+2\times 3$ (ب) $7\times 5+(-1)8$ (ج) $4\times 5+2\times 8$ (د) $(-1)3+2\times 8$

57 کورتە وەڵام $A=\begin{bmatrix}3 & 4\\-4 & 5\end{bmatrix}$ ، $B=\begin{bmatrix}3 & -6\\6 & 8\end{bmatrix}$ دیاریبکە ڕیزکراوەی $\begin{bmatrix}33 & -18\\-14 & 64\end{bmatrix}$ یەکسانە بە AB یان BA یان هیچ یەکێك لەوانە نییە.

بەرەنگاری و فراوانکردن

58 ئایا لێکدانی ڕیزکراوەکان کرداری یەکتربەستنی تێدایە؟ واتە ئایا $(AB)C=A(BC)$ وا دابنێ ئەنجامی لێکدانەکان پێناسەکراوە؟ بە نموونەیەك پاڵپشتی وەڵامەکەت بکە.

59 گوێزراوەی **Transpose** ڕیزکراوەی A بریتییە لە ڕیزکراوەی A^T کە لە ئەنجامی گۆڕینی هەر ڕیزێك لە ڕیزەکانی ڕیزکراوەی A بەو ستوونەی کەهەمان جۆری هەیە. نموونە بۆ ئەوەش ئەگەر $A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 3\\0 & 3 & 5\end{bmatrix}$ ئەوا گوێزراوە کەی بریتییە لە ڕیزکراوەی $A^T=\begin{bmatrix}2 & 0\\1 & 3\\3 & 5\end{bmatrix}$

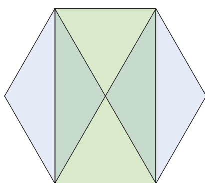
(أ) ئایا لێکدانی ڕیزکراوە یەك لە گوێزراوەکەی هەمیشە لە توانا دایە؟ وەڵامەکەت ڕوونبکەوە.

(ب) ڕیزکراوەی $P=AA^T$ بدۆزەوە. ئەگەر $A=\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}$ ئایا ڕیزکراوەی P دانەکانی یەکسانی تێدایە؟ کامانەن؟

60 هێزەکانی ڕیزکراوەی $B=\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}$ هەژماربکە. هەموو جارێك دانەی سەر ڕیزی دووەم و ستونی دووەم لە ڕیزکراوەی ئەنجامەکە بنووسە؟ پەیوەندی نێوان بەها یەك لەدوای یەکەکانی ئەو بەهایانە چییە؟

پێداچوونەوەی لوولپێچی

نەخشەدانانی زەخرەفە ڕووکاری دەرەوەی شێوەی بەرامبەر شەشلایەکی ڕێکە. سێگۆشە سەوزەکە لایەکسانە. (پۆلەکانی پێشوو)



61 شێوەکە چەند جووت گۆشەی سەر بەرامبەری تێدایە؟

62 شێوەکە چەند سێگۆشەی جووتبوو لەگەڵ سێگۆشە سەوزەکەی تێدایە؟

63 شێوەکە چەند پارچە ڕاستەهێڵی جووتبوو لەگەڵ لاکانی شەشلا ڕێکەکە تێدایە؟

لە تەوەری بۆشاییەکاندا ئەم خاڵانە دیاریبکە (وانەی 1-1)

64 $(0, 4, -5)$ **65** $(2, 2, 6)$ **66** $(-3, -3, 3)$ **67** $(1, -1, -1)$

ئەم بڕانەی خوارەوە هەژماربکە ئەگەر توانرا کاتێك $S=\begin{bmatrix}2 & 4\\-1 & 0\end{bmatrix}$ و $T=\begin{bmatrix}0.5 & 0.83\\5 & 0\end{bmatrix}$ و $V=\begin{bmatrix}2 & 3 & 0\\-4 & 1 & -1\end{bmatrix}$ (وانەی 1-3)

68 $S+T$ **69** $V-T$ **70** $4T$

3–3 ڕیزکراوەکان وجێگۆڕکێ ئەندازەییەکان

Matrices and Geometric Transformations

ئامانجەکان

- ڕیزکراوەکان بەکاردەهێنرێت بۆ جێگۆڕکێی شێوە ئەندازەییەکان

زاراوەکان

Vocabulary

ڕیزکراوەی ڕاکێشان

Translation matrix

ڕیزکراوەی خولانەوە

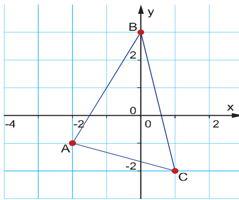
Rotation matrix

ڕیزکراوەی وێنەدانەوە

Reflection matrix

بۆچی ئەمە فێردەبین؟

هونەرمەندان ئەم شێوازە بۆ گۆڕانکارییە یەك لەدوای یەکەکان بەکاردەهێنن لەکاتی جێبەجێکردنی کارە هونەرییەکانیان (پرسیاری 16)



لە ڕووتەختی پۆوتانەکاندا دەتوانیت وەسفی شوێن و ڕووکار و پێوانەی شێوەیەکی ئەندازەیی بکەیت، بە بەکارهێنانی ئەو جووتە ڕێکخراوانەی کە سەرەکانی دەنوێنن. ئەگەر سێگۆشەی بەرامبەر وەربگریت دەبینیت سەرەکانی بریتین لە$A(-2, -1)$ و $B(0, 3)$ و $C(1, -2)$. دەتوانیت ئەم سێگۆشە بەم ڕیزکراوە بنوێنێت.

$$P = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

پۆی خاڵەکان x ←

تانی خاڵەکان y ←

ڕاکێشان Translation جێگۆڕکێیەکی ئەندازەییە خاڵی $A(x, y)$ دەگۆڕێت بۆ خاڵێکی تری وەك $A'(x', y')$ بە جۆری $x' = x + a$ و $y' = y + b$ (a و b دوو ژمارەی ڕاستی نەگۆڕن). دەتوانرێت ڕاکێشانی پێشوو بەهۆی ڕیزکراوەیەکەوە ئەنجام بدرێت کە تێدایە ستوونی $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ بەپێی سەرەکانی شێوە داواکراوەکە دووبارەبێتەوە. ئەم ڕیزکراوەیەش پێی دەوترێت **ڕیزکراوەی ڕاکێشان Translation Matrix**

نموونـــە 1 بەکارهێنانی ڕیزکراوەکان بۆ ڕاکێشانی شێوە ئەندازەییەکان

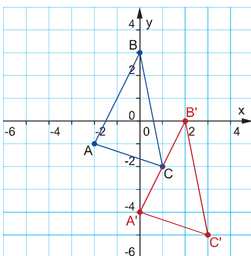
سێگۆشەی ABC ڕابکێشە کاتێك $A(-2, -1)$ و $B(0, 3)$ و $C(1, -2)$ دوو یەکە بۆلای ڕاست و 3 یەکە بۆ خوارەوە. پۆوتانی سەرەکانی سێگۆشەی وێنەکە هەژماربکە پاشان وێنەکەی بکێشە.

ڕیزکراوەی ڕاکێشان بریتییە لە

$$T = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -3 & -3 & -3 \end{bmatrix}$$

پۆی خاڵەکان ←

تانی خاڵەکان ←



بۆ هەژمارکردنی پۆوتانی وێنەی سێگۆشەکە بەو کشانەی سەرەوە ئەو ڕیزکراوەیەی کە سێگۆشە بنەڕەتییەکە دەنوێنێت لەگەڵ ڕیزکراوەی ڕاکێشان کۆبکەوە.

ڕیزکراوەی ڕاکێشان + ڕیزکراوەی سێگۆشەکە

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -3 & -3 & -3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2+2 & 0+2 & 1+2 \\ -1-3 & 3-3 & -2-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -4 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

وێنەی سێگۆشەی ABC بە ڕاکێشان بریتییە لە$A'B'C'$ کاتێك $A'(0, -4)$ ، $B'(2, 0)$ ، $C'(3, -5)$



1. سێگۆشەی ABC ڕابکێشە کاتێك $A(2, 4)$ و $B(3, 1)$ و $C(1, -1)$، 3 یەکە بۆلای ڕاست و یەکەیەك بۆ خوارەوە، پۆوتانی سەرەکانی وێنەی سێگۆشەکە هەژماربکە پاشان وێنەکەی بکێشە.

هاوڕێژەی ئەندازەیی Dilation ئەو گۆڕانەیە کەپێوانەی شێوەکە–وێنەکە دەگۆڕێت (بە گەورەکردن یان بچووک کردن) بە شێوەیەك شێوەکە–وێنەکە هاوشێوەی شێوە–وێنە بنەڕەتییەکە بێت. لەبیرت بێت شێوە هاوشێوەکان هەمان ڕووکاریان هەیە بەڵام پێوانەکانیان جیاوازن. گۆشە بەرامبەرەکان جووتن و لایەکانیان هاوڕێژە دەبن.

کاتێك چەقی هاوڕێژەبوونە ئەندازەییەکە خاڵی بنەڕەتی ڕووتەختی پۆوتانەکان بێت. ئەوەندە بەسە ڕیزکراوەی شێوەکە–بنەڕەتی لە ڕێژەی هاوڕێژەبوونە ئەندازەییەکە بدەین بۆئەوەی ڕیزکراوەی شێوەکە–وێنەکەت دەستبکەوێت. لەم بەشەدا تەنها باسی ئەو هاوڕێژە ئەندازەییانە دەکرێت کە چەقیان خاڵی بنەڕەت بێت.

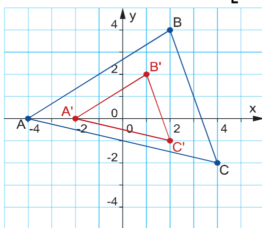
نموونـــــە 2 بەکارهێنانی ڕیزکراوەکان بۆ جێگۆڕکێ ئەندازەییەکان بە ڕێژەیەکی ئەندازەیی

سێگۆشەی ABC کاتێك $A(-4, 0)$ و $B(2, 4)$ و $C(4, -2)$ بێت بە هاوڕێژەیەکی ئەندازەیی کە چەقەکەی خاڵی بنەڕەت بێت و ڕێژەکەی $\frac{1}{2}$ بێت (بچووك کردنەوە) بگۆڕە. پۆوتانی سەری سێگۆشەی–وێنەکەی بدۆزەوە پاشان وێنەکەی بکێشە.

ڕیزکراوەی سێگۆشەکە لە $\frac{1}{2}$ بدە

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-4 & 2 & 4\\ 0 & 4 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}(-4) & \frac{1}{2}\times 2 & \frac{1}{2}\times 4\\ \frac{1}{2}\times 0 & \frac{1}{2}\times 4 & \frac{1}{2}(-2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 1 & 2\\ 0 & 2 & -1\end{bmatrix}$$

← پۆی خاڵەکان
← تانی خاڵەکان



پۆوتانی سەری سێگۆشەی–وێنەکەی بریتییە لە

$A'(-2, 0)$ و $B'(1, 2)$ و $C'(2, -1)$

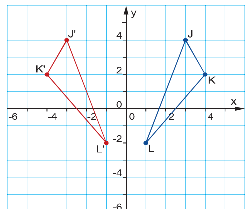


2. سێگۆشەی ABC کاتێك $A(2, 3)$ و $B(5, 1)$ و $C(-2, -7)$ بێت، بە هاوڕێژەیەکی ئەندازەیی کە چەقەکەی خاڵی بنەڕەت بێت و ڕێژەکەی $\frac{4}{3}$ بێت (گەورەکردن) بگۆڕە. پۆوتانی سەری سێگۆشەی–وێنەکەی بدۆزەوە و پاشان وێنەی بکێشە.

ڕیزکراوەی وێنەدانەوە Reflection Matrix ڕیزکراوەیەکە گۆڕان لە وێنەی شێوە ئەندازەییەك دەکات بە وێنەدانەوەی بەدەوری تەوەرەیەکدا. بۆئەوەی وێنەدانەوەی وێنەی شێوەیەکی ئەندازەییت دەستکەوێت بەدەوری تەوەرەی y دا ڕیزکراوەی $\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ لە ڕیزکراوەی شێوەکە بدە. ئەمەش وادەکات پۆی خاڵەکە x بگۆڕێت بۆ دژەکەی $(-x)$. و تانی خاڵەکە بەبێ گۆڕان وەك خۆی بهێڵێتەوە.

نموونـــــە 3 بەکارهێنانی ڕیزکراوەکان بۆ وێنەدانەوەی شێوە ئەندازەییەکان

وێنەدانەوەی سێگۆشەی JKL کاتێك $J(3, 4)$ و $K(4, 2)$ و $L(1, -2)$ بەدەوری تەوەرەی y دا دیاریکە پۆوتانی سەری سێگۆشە–وێنەکەی بدۆزەوە پاشان وێنەکەی بکێشە



$$\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 4 & 1\\ 4 & 2 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3 & -4 & -1\\ 4 & 2 & -2\end{bmatrix}$$

پۆی خاڵەکان لە -1 و تانەکان لە 1 دراوە سەرەکانی سێگۆشە –وێنەکەی بریتین لە $J'(-3, 4)$ و $K'(-4, 2)$ و $L'(-1, -2)$.

ئاگاداربە!

لێکدانی ڕیزکراوەکان کردارێکی ئاڵوگۆڕ نییە لەبەرئەوە دڵنیابە کە ڕیزکراوەی گۆڕاو لە چەپەوە نووسراوە



3. بۆئەوەی وێنەدانەوەی شێوەیەکی ئەندازەییت دەستکەوێت بەدەوری تەوەرەی x دا ڕیزکراوەی $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$ لە ڕیزکراوەی شێوەکە بدە، وێنەدانەوەی سێگۆشەی نموونەی 3 بەدەوری تەوەرەی x دیاربیکە پۆوتانی سەری سێگۆشەی–وێنەکە بدۆزەوە و وێنەکەی بکێشە.

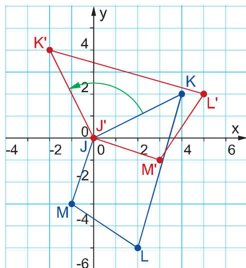
ڕیزکراوەی خولانەوە Rotation Matrix ڕیزکراوەی گۆڕانە کە وێنەی شێوە ئەندازەییەکەمان دەستکەوێت بە خولانەوە. نموونەی 4 جۆرەکانی ڕیزکراوەی خولانەوە دەردەخات.

نموونـــە 4 بەکارهێنانی ڕیزکراوەکان بۆ خولانەوەی شێوە ئەندازەییەکان

ئەم ڕیزکراوانە بەکاربێنە بۆ گۆڕینی چوارلای $JKLM$ کاتێک $J(0,0)$ و $K(4,2)$ و $L(2,-5)$ و $M(-1,-3)$ ، بێت خولانەوەی بەدەوری خاڵی بنەڕەت. وێنەی شێوە-وێنەکەی بکێشە باسیبکە

ڕۆشنایی

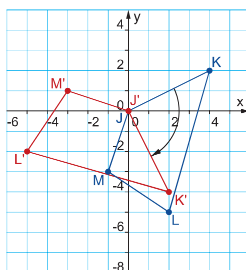
لێکدانی پۆوتان لە 1- دژەکەیمان دەداتی.



أ $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 4 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -5 & -3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & -2 & 5 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

وێنەکە، وێنەی چوارلایەکە بە خولانەوەی بەگۆشەی $90°$ بەپێچەوانەی ئاڕاستەی میلی کاتژمێر چەقی خولانەوەکە خاڵی بنەڕەت بێت.



ب $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 4 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -5 & -3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 2 & -5 & -3 \\ 0 & -4 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

وێنەکە، وێنەی چوارلایەکە بە خولانەوەی بەگۆشەی $90°$ بە ئاڕاستەی میلی کاتژمێر چەقی خولانەوەکە خاڵی بنەڕەت بێت.



4. ڕیزکراوەی $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ بەکاربێنە بۆ گۆڕینی سێگۆشەی ABC کاتێک $A(0,0)$ و $B(4,0)$ و $C(0,-3)$ بێت. بە خولانەوەی بە دەوری خاڵی بنەڕەت. شێوەی-وێنەکە بکێشە. باسیبکە

بیربکەوە و تاوتوێبکە

1. ئەو جێگۆڕکێ ئەندازەییەی کە لە ئەنجامی لێکدانی ڕیزکراوەی $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ لە ڕیزکراوەی شێوە ئەندازەییەکە پەیدادەبێت باسبکە.

2. ئەو گۆڕانە ڕوونبکەوە کە بەسەر پۆی خاڵەکاندا دێت لە ڕیزکراوەی شێوەیەکی ئەندازەیی کاتێک بە یەکێك لەم ڕیزکراوانە لێکدەدرێت.

أ $A=[1\ \ 0]$ **ب** $B=[0\ \ 1]$ **ج** $C=[0.5\ \ 0]$ **د** $D=[1\ \ 1]$

3. ڕیکخەربە ئەم خشتەیە دروستبکەوە و پاشان تەواوی بکە. Q ڕیزکراوەی سێگۆشە دەنوێنێت. لەهەر چوارچێوەیەکدا بڕەی ڕیزکراوەی گونجاو بنووسە.



جێگۆڕکێ	کردارەکە بەهۆی ڕیزکراوەوە
ڕاکێشانی سێگۆشەکە بەستوونی	
ڕاکێشانی سێگۆشەکە بەئاسۆیی	
گەورەکردن یان بچووك کردنی سێگۆشەکە	
وێنەدانەوەکەی بە دەوری تەوەرەی صادی	
وێنەدانەوەکەی بە دەوری تەوەرەی سینی	
خولانەوەی سێگۆشەکە بە گۆشەی $90°$ بە دەوری خاڵی بنەڕەت بە ئاڕاستەی میلی کاتژمێر	
خولانەوەی سێگۆشەکە بەگۆشەی $90°$ بە دەوری خاڵی بنەڕەت بەپێچەوانەی ئاڕاستەی میلی کاتژمێر	

3-3 ڕاهێنانەکان

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

1 زاراوەکـان ئەو شێوە ئەندازەییەی کە ـــــــ پەیدای دەکات وەك ئەوە وایە یەکێك لە تەوەرەکان دەوری ئاوێنەیەك ببینێت. (ڕیزکراوەی وێنەدانەوە یان ڕیزکراوەی ڕاکێشان)

بڕوانە نموونە 1

وێنەی چوارلای $ABCD$ کاتێك $A(-2, 4)$ و $B(3, 1)$ و $C(1, -4)$ و $D(-2, -2)$ بێت لەژێر کاری کشانەوەی دیاریکراو لە پرسیاری 2 و 3 دا دیاریکراوە. پۆوتانی سەرەکانی وێنەکەی بدۆزەوە و وێنەی بکێشە.

2 دوو یەکە بەرەو لای چەپ و یەك یەکە بۆ سەرەوە.

3 یەك یەکە بەرەو لای ڕاست و سفر یەکە بۆ خوارەوە.

بڕوانە نموونە 2

ڕیزکراوە بەکاربێنە بۆگەورەکردن یان بچووکردنەوەی چوارلای$ABCD$ کاتێك$A(-2, 4)$ و $B(3, 1)$ و$C(1, -4)$ $D(-2, -2)$ بەپێی ئەو ڕێژەیەی لەپرسیاری 4 و 5 دا دیارکراوە. پۆوتانی سەرەکانی شێوەی-وێنەکە بدۆزەوە و وێنەی بکێشە

4 بچووککردنەوەی چوارلایەکە بە ڕێژەی 0.5

5 گەورەکردنی چوارلایەکە بە ڕێژەی 2

بڕوانە نموونە 3

وێنەی چەندلای $ABCDE$ کاتێك $A(-2, 3)$ و $B(0, 4)$ و $C(2, 3)$ و $D(2, 1)$ و $E(-1, -1)$ بێت وەك لە پرسیاری 6 و 7دا دیارکراوە دیاریبکە. پۆوتانی سەرەکانی شێوەی-وێنەکە بدۆزەوە. وێنەکەی بکێشە.

6 وێنەدانەوەکەی بەدەوری تەوەرەی y

7 ڕیزکراوەی $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ بەکاربێنە بۆ دۆزینەوەی وێنەی چەندلایەکە بە وێنەدانەوەی بەدەوری ڕاستەهێڵی $y = x$.

بڕوانە نموونە 4

ڕیزکراوە بەکاربێنە بۆ دۆزینەوەی وێنەی چوارلای$LMNO$ کاتێك $L(1, 3)$ و $M(4, 2)$ و $N(1, 1)$ و $O(1, -1)$ بێت بەخولانەوەیەك کە ڕیزکراوەکەی لە پرسیاری 8 و 9دا دراوە. پۆوتانی سەرەکانی شێوەی-وێنەکە بدۆزەوە و وێنەکە بکێشە.

8 $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

9 $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

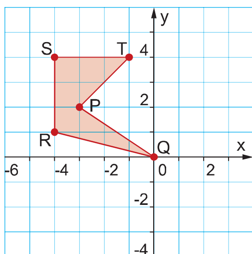
جێبەجێکردنەکان

ڕاهێنانی ئازاد	
بۆ شیکاری ڕاهێنانی	تەماشای نموونە
10	1
11	2
12	3
14-13	4

10 وێنەی ڕاکێشانی چوارلای $ABCD$ کاتێك $A(0, 4)$، $B(-3, -1)$، $C(1, -5)$، $D(1, 0)$ بە 3 یەکە بۆلای ڕاست و 3 یەکە بۆ سەرەوە. پۆوتانی سەرەکانی شێوەی-وێنەکە بدۆزەوە و وێنەکە بکێشە.

11 وێنەی چوارلای$ABCD$ بدۆزەوە کاتێك$A(1, 2)$ ، $B(-2, 3)$ ، $C(-3, 4)$ ، $D(-4, 1)$ بێت بەهاوڕێژەیەکی ئەندازەیی چەقەکەی خاڵی بنەڕەت بێت و ڕێژکەی $\frac{3}{2}$ بێت پۆوتانی سەرەکانی شێوەی-وێنەکە بدۆزەوە و وێنەکە بکێشە.

12 وێنەدانەوەی چەندلای $ABCDE$ بدۆزەوە کاتێك$A(-2, 3)$، $B(0, 4)$، $C(2, 1)$، $D(2, 1)$، $E(-1, -1)$ بەدەوری تەوەری x . پۆوتانی سەرەکانی شێوەی-وێنەکە بدۆزەوە و وێنەکە بکێشە.

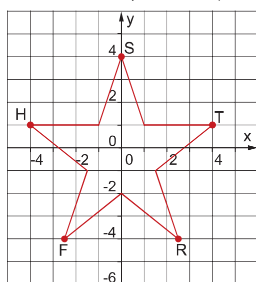


ڕیزکراوە بەکاربهێنە بۆ دۆزینەوەی وێنەی چەندلای$PQRST$ کاتێك$P(-3, 2)$ و $Q(0, 0)$ و $R(-4, 1)$ و $S(-4, -4)$ و $T(-1, 4)$ بێت بەخولانەوەیەك کە ڕیزکراوەکەی لە پرسیاری 13 و 14 دا دراوە پۆوتانی سەرەکانی شێوەیی-وێنەکە بدۆزەوە و وێنەکە بکێشە.

13 $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

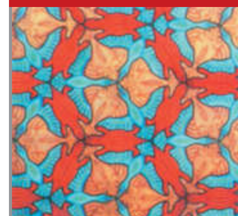
14 $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

15 **نەخشەکێشان** چنار نەخشەی ئارمێکی بۆ یانەی ژینگەپارێزی خوێندنگاکەیان دارشت لەشێوەی ئەستێرەی دەریادا. پۆوتانی سەرەکانی ئەستێرەکە بریتین لە $R(2.5, -4)$، $T(4, 1)$، $S(0, 4)$ $H(-4, 1)$ $F(-2.5, -4)$



أ ریزکراوەی $\begin{bmatrix} 0.81 & -0.59 \\ 0.59 & 0.81 \end{bmatrix}$ بەکاربێنە بۆ خولانەوەی ئەستێرەکە بە رێژەی $\frac{1}{10}$ ی خولەکێکی تەواو بە دەوری خاڵی بنەرەت. پۆوتانی سەرەکانی ئەستێرەی–وێنەکە بۆ نزیکترین نیو یەکە نزیکبکەوە.

ب ئایا ئەستێرەکە بە ئاراستەی میلی کاتژمێر خولاوەتەوە یان بە پێچەوانەی ئەو روونبکەوە.

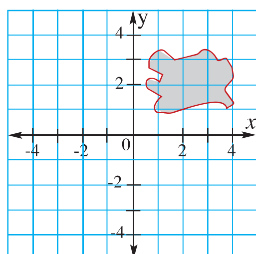


دەروازەیەک

مێژووی هونەر

هونەرمەندی بەناوبانگ ئیشەر (1898 – 1972) شێوە ئەندازەییە هاوجێکانی گۆڕیوەتە سەر شێوەی چۆلەکە و خشۆکەکان و شێوەیتر.

16 **نیگار** بۆ خشت ڕێژکردنی کارێکی هونەری وێنەی شێوە بنەرەتییەکە دەکێشرێت پاشان بەهۆی گۆڕانی ئەندازەیی چەندجارێك گۆڕانی بەسەردا دەکەن تاهەموو ئەو رووبەرە بگرێتەوە کەپێویستە خشتڕێژ بکرێت بێ ئەوەی هیچ بۆشاییەك یان زیادەڕۆیی هەبێت هونەرمەندێك وێنەی ئەو شێوەی لای چەپی دروستکرد.



أ هونەرمەندەکە شێوەکەی گۆڕی بە خولانەوەی بە گۆشەی $180°$ بەدەوری خاڵی بنەرەت. ریزکراوەی ئەم گۆڕانە بنووسە.

ب پۆوتانی هەر چوار سەرەکەی شێوەکە پاش گۆڕانەکە بنووسە.

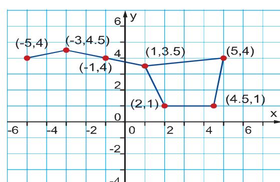
ج پاشان هونەرمەندەکە هەستا بە ڕاکێشانی ئەو وێنەیەی دەستی کەوتووە بە 4 یەکە بۆ سەرەوە 2 یەکە بۆلای راست.

د پۆوتانی سەرەکانی شێوەکە لە ئەنجامی ئەم ڕاکێشانە بدۆزەوە.

هـ لە رووتەختی پۆوتانەکاندا وێنەی شێوە بنەرەتییەکە و شێوەی کۆتایی بکێشە.

17 **بیری ڕەخنەگر** $T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ ئەنجامی لێکدانی ریزکراوەی T لە ریزکراوەی شێوەیەکی ئەندازەیی روونبکەوە. پاشان ئەنجامی لێکدانی T لە ئەنجامی لێکدانی پێشوو روونبکەوە.

وێنەی روونکردنەوەیی بەرامبەر ئەستێرەی ورچی گەورە دەنوێنێت. ریزکراوەیەك بنووسە پۆوتانەکانی وێنەکە بنوێنێت پاشان پۆوتانەکانی وێنەی ئەم بارانە بدۆزەوە.



18 کشانی 2 یەکە بۆ سەرەوە.

19 کشانی یەك یەکە بۆ خوارەوە، 3 یەکە بۆلای چەپ.

20 گەورەکردنێك بە ڕێژەی 2 .

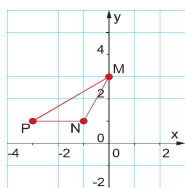
21 وێنەدانەوە بە دەوری تەوەرەی x .

22 خولانەوەیەك بە دەوری خاڵی بنەرەت بە گۆشەی $90°$ بە ئاراستەی میلی کاتژمێر.

23 خولانەوەیەك بەدەوری خاڵی بنەرەت بەگۆشەی $90°$ بە ئاراستەی پێچەوانەی میلی کاتژمێر.

24 **بنووسە** ئەنجامی لێکدانی ریزکراوەی $T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ لە ریزکراوەی شێوەیەکی ئەندازەیی.

25 ریزکراوەی ئەو گۆڕانە ئەندازەییە بنووسە کە نەخشەی $f(x)$ دەگۆڕێت بۆ نەخشەی $h(x) = -f(x)$ و ریزکراوەی ئەو گۆڕانەی دەیگۆڕێت بە $g(x) = f(-x)$



26 أ ریزکراوەی وێنەی بەرامبەر بنووسە.

ب ریزکراوەی $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ لە ریزکراوەی سێگۆشەکە بدە.

ج وێنەی سێگۆشە تازەکە بە بەکارهێنانی ریزکراوەی ئەنجامەکە بکێشە. باسی سێگۆشەکە بکە

د هەنگاوی ب و ج بەسەر سێگۆشە تازەکەدا جێبەجێبکە، چی دەربارەی سێگۆشەی سێیەم دەڵێیت.



27 سەرجۆن هەستا بە گۆڕینی شێوەیەكی ئەندازەیی، بە ڕێژەیەكی ئەندازەیی بە دوایدا خولانەوەیەك بە دەوری خاڵی بنەڕەت بە ئاڕاستەی میلی كاتژمێر بە گۆشەی $90°$ بەدوایدا وێنەدانەوەكەی بە دەوری تەوەری y . كام زنجیرە لەمانە ئەو گۆڕانە یەك لە دوای یەكە دەنوێنێت.

أ) لێكدانی ڕیزكراوەكە لە ژمارە، كۆكردنەوەی دوو ڕیزكراوەكە، لێكدانی دوو ڕیزكراوەكە.

ب) لێكدانی ڕیزكراوەكە لە ژمارە، لێكدانی دوو ڕیزكراوەكە، لێكدانی دوو ڕیزكراوەكە.

ج) كۆكردنەوەی دوو ڕیزكراوەكە، لێكدانی دوو ڕیزكراوەك، كۆكردنەوە دوو ڕیزكراوەكە.

د) لێكدانی دوو ڕیزكراوەكە، كۆكردنەوەی دوو ڕیزكراوەكە، لێكدانی ڕیزكراوەكە لە ژمارە.

28 ئەنجامی لێكدانی ڕیزكراوەی شێوەیەكی ئەندازەیی لە ڕیزكراوەی $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$ چی دەبێت؟

أ) گەورەكردنی شێوەكە؛ پاشان خولانەوە بەدەوری خاڵی بنەڕەت بەگۆشەی $90°$ بەئاڕاستەی میلی كاتژمێر.

ب) بچوككردنی شێوەكە؛ پاشان خولانەوەی بەدەوری خاڵی بنەڕەت بەگۆشەی $90°$ بەپێچەوانەی میلی كاتژمێر.

ج) بچوككردنی شێوەكە؛ پاشان وێنەدانەوەی بەدەوری تەوەری x

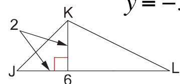
د) گەورەكردنی شێوەكە؛ پاشان وێنەدانەوەی بەدەوری تەوەری y

29 كام یەكێك لەم ڕیزكراوانە بەكاردەهێنرێت بۆ جێگۆڕكێی شێوەیەك بەخولانەوە بەدەوری بنەڕەت بەگۆشەی $180°$

أ) $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ ج) $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

بەرەنگاری و فراوانكردن

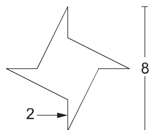
30 كام ڕیزكراوە بەكاردەهێنرێت بۆگۆڕینی شێوەیەك بەوێنەدانەوەی بەدەوری ڕاستەهێڵی $y=-x$



31 سێگۆشەی بەرامبەر لە ڕووتەختی پۆوتانەكاندا بكێشە و ڕیزكراوەكەی بنووسە.

أ) چۆن ئەم سێگۆشەیە دەگۆڕێت بۆ دەستكەوتنی شێوەكەی تر؟

ب) ڕیزكراوەكان بەكاربێنە بۆ هەستان بەم گۆڕانە. پۆوتانی هەر چوار سەری شێوەكەی–وێنەكە بنووسە.



32 شێوەیەكی ئەندازەیی بە جێگۆڕكێ بگۆڕە بە پێی ئەم ڕیزكراوەیە $\begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$ باسی ئەو جێگۆڕكێیە بكە.
چی ڕوودەدات ئەگەر ئەو شێوەیە چەندجارێك بەو جێگۆڕكێیە بگۆڕین.

پێداچوونەوەی لوولپێچ

33 دیاریبكە پێدراوەكانی ئەم خشتەیە وەك نەخشەیەكی هێڵی پێناسەدەكات (پۆلەكەی پێشو)

كارتەكان	2	5	8	11
تێچوون	35 000	87 500	140 000	192 500

دیاریبكە ئایا ئەم جووتە ڕیكخراوانە شیكارن بۆ سستەمی ئەم لاسەنگانە (وانەی 3−2)

34 $\begin{cases} y > 2x-8 \\ y \le \frac{1}{4}x+2 \end{cases}$؛ $(2, -4)$

35 $\begin{cases} y > 0 \\ y \ge 2x-11 \\ 5x+y < 5.5 \end{cases}$؛ $(0, 5)$

ئەمانە هەژماربكە ئەگەر توانرا (وانەی 2−3)

36 $\begin{bmatrix} 5 & -5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 10 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$

37 $\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

38 $\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$

سنووردەرەکان و ڕێسای گرامر

Determinants and Cramer's Rule

4-3



کێ ئەمە بەکاردەهێنێت؟

شارەزایانی بواری خواردنی وەرزشکاران پێویستیان بەشیکارکردنی هاوکێشە هێڵییەکان بۆ دیاریکردنی ئەو برە گەرمۆکیانە و پرۆتین و چەوری و کاربۆهیدرات کە پێویستە لە خواردنەکەیاندا هەبێت.

ئامانجەکان

• هەژمارکردنی سنووردەری ڕیزکراوەی 2×2 یان 3×3 دەکا.

• سستەمی هێڵی شیکاردەکات بە بەکارهێنانی ڕێسای گرامر.

زاراوەکان
Vocabulary

سنووردەر
Determinant

ڕیزکراوەی هاوکۆلکەکان
Coefficient matrix

ڕێسای گرامر
Crame's rule

زانایانی بیرکاری ڕیزکراوە چوارگۆشەییەکان و ژمارەکان جووت دەکەن. بە مەرجێك هەر ڕیزکراوەیەکی چوارگۆشەیی بەرامبەر ژمارەیەکی ڕاستی بێت کە پێی دەوترێت **سنووردەری ڕیزکراوە Determinant** . هێمای $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ بەکاردەهێنرێت بۆ دەرخستنی سنووردەری ڕیزکراوەی $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. سنووردەری ڕیزکراوەیی ڕۆڵێکی گرنگی هەیە. هەروەك لەمەودا دەیبینیت.



سنووردەری ڕیزکراوەی 2×2

بەنووسین	بەژمارە	بەجەبری
سنووردەری **Determinant** ڕیزکراوەی $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc$ پێناسە دەکرێت.	$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = (1)(4) - (3)(2) = -2$	$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

نموونـــه 1 دۆزینەوەی سنووردەری ڕیزکراوەی 2×2

سنووردەری ڕیزکراوەکە بدۆزەوە.

أ $\begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 8 & 3 \end{bmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} = 6 \times 3 - 5 \times 8$$

$$= 18 - 40 = -22$$ ئەنجامی لێکدانی دوو نێوانەکە لە ئەنجامی لێکدانی دوو لایەکە دەربکە.

سنووردەری ڕیزکراوەکە دەکاتە -22 .

ب $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -6 & 3 \end{bmatrix}$

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -6 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{3} \times 3 - \frac{2}{3}(-6) = 1 + 4 = 5$$

سنووردەری ڕیزکراوەکە دەکاتە 5.



1. سنووردەری ڕیزکراوەکە بدۆزەوە.

أ $\begin{bmatrix} 0.2 & 30 \\ -0.3 & 5 \end{bmatrix}$ ب $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 3 \\ \frac{5}{6} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$ ج $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{8} \\ 4 & 2\pi \end{bmatrix}$

دەتوانیت سنووردەرەکان بەکاربهێنی بۆ شیکاری سیستمی هاوکێشە هێڵییەکان. بۆ شیکاری سیستمی $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$ دەستپێبکە بە نووسینی ڕیزکراوەی $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$ کەپێی دەوترێت **ڕیزکراوەی هاوکۆلکەکان** **Coefficient matrix** پاشان سنووردەری D بدۆزەوە هەردوو سنووردەری لەگەڵ دۆزینەوەی $Dx=\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$ و $Dy=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$، ئێستاش ڕێسای گرامەر وەك لە خوارەوەدا دراوە بەکاربهێنە.



ڕێسای گرامەر بۆ سیستمی 2 × 2

ئەگەر سنووردەری ڕیزکراوەی هاوکۆلکەکان D جیاوازبێت لە 0، ئەوا سیستەمی $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$ تەنها یەك شیکاری هەیە کە بریتییە لە $x=\frac{Dx}{D}$ و $y=\frac{Dy}{D}$، کاتێك $Dx=\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$ و $Dy=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$

دەتوانیت سنووردەرەکانی D و Dx و Dy بەکاربهێنیت بۆ ئەوەی بزانیت سیستەمەکە سنووردارى (تەنهایەك شیکاری هەیە) یان ستەمە (شیکاری نییە) یان بێسنوورە (ژمارەیەکی بێسنوور شیکاری هەیە). لەو پۆلێنکردنەی دێت وا دادەنێین کە a_1 و b_1 سفرنین لە هەمان کاتدا، و a_2 و b_2 سفر نین لە هەمان کاتدا.

پۆلێنکردنی سیستمی دوو هاوکێشەی هێڵی دوو نەزانراو		
ئەگەر D≠0 ئەوا سیستمێکی سنووردارە	ئەگەر D=0 و Dx=Dy ئەوا سیستمێکی بێسنوورە.	ئەگەر D=0 و Dx≠0 یان Dy≠0 ئەوا سیستمێکی ئەستەمە.

نموونــــە 2 شیکاری سیستمی هێڵی 2×2 بە بەکارهێنانی ڕێسای گرامر

شیکارکردنی سیستمی هێڵی بە بەکارهێنانی ڕیسای گرامر.

أ $\begin{cases} x-y=3 \\ 2x-y=-1 \end{cases}$

هەنگاوی 1 سنووردەری ڕیزکراوەی هاوکۆلکەکان بدۆزەوە.

$$D=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=1(-1)-2(-1)=1$$

سیستمێکی سنووردارە چونکە $D\neq0$

هەنگاوی 2 بەهای هەر نەزانراوێك هەژماربکە. بە بەکارهێنانی ڕێسای گرامەر.

$$Dx=\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}=-4 \quad، \quad Dy=\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=-7$$

شیکار بریتییە لە (−4, −7) .

ب $\begin{cases} y-2=3x \\ 3x-y=7 \end{cases}$

هەنگاوی 1 سیستمەکە بە شێوە گشتیەکە بنووسە.

$$\begin{cases} 3x-y=-2 \\ 3x-y=7 \end{cases}$$

هەنگاوی 2 سنووردەری ڕیزکراوەی هاوکۆلکەکان بدۆزەوە.

$$D=\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}=3(-1)-3(-1)=0$$

هەنگاوی 3 Dx هەژمار بکە.

لەبەر ئەوەی $D=0$، $Dx\neq 0$، $Dy\neq 0$ ئەوا سیستمەکە ئەستەمە.

$$Dx=\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 7 & -1 \end{vmatrix}=9$$

$$Dy=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}=27$$

ڕۆشنایی

ئەگەر هاتوو $D=0$ و $Dx=0$ ئەوا پێویستە Dy بدۆزیتەوە بۆ ئەوەی بڕیار لەسەر سیستمەکە بدەی کە ئەستەمە یان سەربەخۆیە.



2. بە بەکارهێنانی ڕێسای گرامر سیستمەکە شیکاربکە. $\begin{cases} 6x-2y=14 \\ 3x=y+7 \end{cases}$

بۆئەوەی ڕێسای گرامەر بۆ شیکارکردنی سیستمی هێڵی 3×3 بەکاربێنیت. پێویستە هەژماری سنووردری ڕیزکراوەکانی پلە 3×3 بکەیت. ئەم هێڵکارییەی خوارەوە یەکێکە لە ڕێگاکان بۆ ئەنجامدانی ئەم کارە.

دوو ستوونی یەکەم لەلای ڕاستی سنووردەرەکە بنووسە.

ئەنجامەکانی لێکدانی ژمارەکانی هەر تیرەیەکی سوور کۆبکەوە. پاشان سەرجەمی ئەنجامەکانی لێکدانی هەر تیرەیەکی شینی لێدەربکە.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}\begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{matrix} \quad a_1b_2c_3+b_1c_2a_3+c_1a_2b_3-(a_3b_2c_1+b_3c_2a_1+c_3a_2b_1)$$

نموونە 3 هەژمارکردنی سنووردەری ڕیزکراوەی 3 × 3

سنووردەری ڕیزکراوەی $A=\begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -3 & 10 & 1 \\ 2 & 6 & -1 \end{bmatrix}$ بدۆزەوە.

سنووردەرەکە بنووسە پاشان دوو ستوونی یەکەم لەلای ڕاستی سنووردەرەکە بنووسە:

$$\begin{vmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -3 & 10 & 1 \\ 2 & 6 & -1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 4 & -2 \\ -3 & 10 \\ 2 & 6 \end{matrix}$$

$$\begin{vmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -3 & 10 & 1 \\ 2 & 6 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 4 & -2 \\ -3 & 10 \\ 2 & 6 \end{matrix}$$

هەنگاوی 1 هەژماری ئەنجامی لێکدانی هەرتیرەیەکی بەرەوژێربکە و ئەنجامیان کۆبکەوە $(4)(10)(-1)+(-2)(1)(2)+(0)(-3)(6)=-44$

هەنگاوی 2 هەژماری ئەنجامی لێکدانی هەرتیرەیەکی بەرەوژوور بکە وئەنجامیان کۆبکەوە
$(2)(10)(0)+(6)(1)(4)+(-1)(-3)(-2)=18$

هەنگاوی 3 ئەنجامی دووەم لە ئەنجامی یەکەم دەربکە
$-44-18=-62$

```
[A]
  [[4  -2  0 ]
   [-3 10  1 ]
   [2  6  -1]]
det([A])
           -62
```

سنووردەری ڕیزکراوەی A دەکاتە -62 . بەبژمێرەکەت ساغ بکەوە.

ڕۆشنایی

وێنەی تیرەکان بە هێڵی کاڵ یارمەتیت دەدات بۆ دیاری کردنی ئەنجامی شەش لێکدانەکەی پێویستە بۆ هەژمارکردنی سنووردەرەکە



.3 سنووردەری ڕیزکراوەی $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -2 \\ 10 & 3 & -2 \end{vmatrix} = A$ بدۆزەوە.

دەتوانین ڕێسای گرامر فراوان بکەین بۆئەوەی سستەمی هێڵی 3×3 بگرێتەوە.



ڕێسای گرامەر بۆ سستەمی 3 × 3

ئەگەر سنووردەری ریزکراوی هاوکۆلکەکان جیاوازبن لە سفر ئەوا سستەمی:
$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases}$$

$x=\frac{Dx}{D}$ ، $y=\frac{Dy}{D}$ ، $z=\frac{Dz}{D}$ و $Dx=\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ و $Dy=\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}$ و $Dz=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$ تەنها یەک شیکاری هەیە.

کاتێک $D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ هێمای سنووردەری هاوکۆلکەکان بێت.

ئەگەر $D\neq0$ ئەوا سستەمێکی دیاریکراو دەبێت.

ئەگەر $D=0$ و هیچ کام لە سنووردەرەکانی یەکسان نەبێت بە سفر ئەوا سیستمێکی ئەستەمە.

ئەگەر $D=0$ و یەکێك لە سنووردەرەکانی یەکسان بێت بە سفر ئەوا سیستمێکی نادیار دەبێت.

نموونــــە 4 جێبەجێکردن لەسەر خۆراکزانی



یەکێك لە شارەزایانی خۆراك ئیش لەسەر دارشتنی سیستمی خۆراکی یاریزانانی تۆپی پێ دەکات. لەم سیستمەدا داوا لە یاریزانان دەکات 3600 گەرمۆکە بەکاربێنین لە بڕی 750 g خۆراکی ڕۆژانە سەرچاوەی ئەم گەرمۆکەیە پێویستە بڕی پرۆتین و چەوری 60% ی کۆی گەرمۆکەکان بێت. چەند گرام لە پرۆتین و کاربۆهیدرات و چەوری پێویستە لەم سیستمەدا.

گەرمۆکە لەهەر گرامێکدا	
خۆراك	گەرمۆکە
پرۆتین	4
کاربۆهیدرات	4
چەوری	9

ئاگاداربە!

وریابە لە گرنگی نووسینی ژمارە 0 وەکو هاوکۆلکەی نەزانراوی نادیار
$4p+0c+9f=2160$

ئەم سستەمە خۆراکییە پێکهاتووە لە p گرام پرۆتین و c گرام کاربۆهیدرات و f گرام چەوری.

$4p+4c+9f=3600$ کۆی گەرمۆکەکان

$p+c+f=750$ بڕی خۆراکی گشتی

$4p+0c+9f=2160$ گەرمۆکەکانی پرۆتین و چەوری دەکاتە $60\%(3600)=2160$

$$Df = \begin{vmatrix} 4 & 4 & 3600 \\ 1 & 1 & 750 \\ 4 & 0 & 2160 \end{vmatrix} ،Dc = \begin{vmatrix} 4 & 3600 & 9 \\ 1 & 750 & 1 \\ 4 & 2160 & 9 \end{vmatrix} ، Dp = \begin{vmatrix} 3600 & 4 & 9 \\ 750 & 1 & 1 \\ 2160 & 0 & 9 \end{vmatrix} ، D = \begin{vmatrix} 4 & 4 & 9 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 9 \end{vmatrix} = -20$$

$$f = \frac{Df}{D} = \frac{-2400}{-20} = 120 \text{ ، } c = \frac{Dc}{D}\frac{-7200}{-20} = 360 \text{ ، } p = \frac{Dp}{D} = \frac{-5400}{-20} = 270$$

ئەم سستەمە پێکهاتووە لە g 270 پرۆتین و g 360 کاربۆهیدرات و g 120 چەوری



4. چی دەبێت ئەگەر. . .؟ سستمەکە ڕۆژانە داوای بەکاربردنی 3200 گەرمۆکەی گەرمی و g 700 خۆراك بکات، پێویستە ئەو گەرمۆکە گەرمییەی سەرچاوەکەی کاربۆهیدراتیە 70% کۆی گەرمۆکەکانی گەرمی بێت. چەند گرام لە پرۆتین و کاربۆهیدرات و چەوری پێویستە لەم سستمەدا؟

بیربکەوە و تاوتوێبکە

1. باسی ڕیزکراوەیەك بکە سنووردەرەکەی سفر بێت.
2. چۆن دەزانیت سێ سنووردەرەکە چی لێدێت، کاتێك ڕێسای گرامەر لەسەر سستەمی هێڵی بۆ دوو هاوکێشە بە دوو نەزانراو جێبەجێدەکرێت؟ ئەگەر یەکێکیان لە ئەنجامی لێکدان ئەویتریان لە ژمارەیەك، پەیدابووبێت.
3. ڕێکخەربە ئەم خشتەیە بنووسەوە و تەواوبکە. لەهەر چوارچێوەك ڕێسای گونجاوی بۆ بنووسە



	ڕیزکراوەی 2 x2	ڕیزکراوەی 3 x3
سنووردەر		
ڕێسای گرامر		

4-3 ڕاهێنانەکان

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

1 زاراوەکان واتای چییە یەکێك لە دانەکانی ڕیزکراوە هاوکۆلکەکان سفر بێت؟

بڕوانە نموونە 1 سنووردەری ئەم ڕیزکراوانە بدۆزەوە.

2 $\begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 9 & 2 \end{bmatrix}$ 3 $\begin{bmatrix} 1.5 & 0.25 \\ 6 & 2.5 \end{bmatrix}$ 4 $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \\ \frac{3}{4} & -4 \end{bmatrix}$ 5 $\begin{bmatrix} -3 & 40 \\ -5 & 66\frac{2}{3} \end{bmatrix}$

بڕوانە نموونە 2 ڕێسای گرامەر بەکاربێنە بۆ شیکارکردنی ئەم سستەمە هێڵییانە.

6 $\begin{cases} 6x = 2 - y \\ 3x + 1 = 2y \end{cases}$ 7 $\begin{cases} 4x + y + 6 = 0 \\ 8x + 2y = 9 \end{cases}$ 8 $\begin{cases} 5x - 2y = 3 \\ 2.5x - y = 1.5 \end{cases}$ 9 $\begin{cases} 2y = 2 - x \\ -3x + 6y = -9 \end{cases}$

3	پڕوانە نموونە

سنووردەری ئەم ڕیزکراوانە بدۆزەوە.

10 $P=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 4 & 0 & 1\\ 1 & -2 & 3\end{bmatrix}$ **11** $S=\begin{bmatrix}0 & -5 & -1\\ 4 & 1 & 6\\ 2 & 0.5 & 3\end{bmatrix}$ **12** $E=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}$

4	پڕوانە نموونە

13 **بەکاربردن** هەتاو 2kg فستق و1.5kg بادەم و 3kg بندقی کڕی. بڕی 28 420 دینار پارەیدا. بەڵام دوێنی هاوڕێی 39 390 دینار پارەی دا نرخی 4.5kg فستق و 2kg بندق، نرخی هەر کیلۆگرامێك لەهەر جۆرێکیان چەندە؟ ئەگەر بزانیت نرخی یەك کیلۆگرام فستق یەکسانە بەکۆی کیلۆگرامێك بادەم و کیلۆگرامێك بندق.

جێبەجێکردنەکان

ڕاهێنانی ئازاد	
بۆشیکارکردنی تەماشای	
ڕاهێنانی	نموونەبکە
17-14	1
21-18	2
24-22	3
25	4

سنووردەری ئەم ڕیزکراوانە بدۆزەوە.

14 $\begin{bmatrix}3 & -0.4\\ 5 & 0.3\end{bmatrix}$ **15** $\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ **16** $\begin{bmatrix}-\frac{2}{5} & 8\\ -\frac{1}{2} & 10\end{bmatrix}$ **17** $\begin{bmatrix}r & -1\\ -2r^2 & \pi r\end{bmatrix}$

ڕێسای گرامەر بەکاربێنە بۆ شیکاری سستەمی هێڵی

18 $\begin{cases}0.5x+6y=2\\ 0.25x+3y=0.5\end{cases}$ **19** $\begin{cases}x+2y=3.5\\ 3x-y=2.7\end{cases}$ **20** $\begin{cases}2x+y=3\\ x+\frac{y}{2}=2\end{cases}$ **21** $\begin{cases}3y-x=7\\ 2x+3y=-7\end{cases}$

سنووردەری ئەم ڕیزکراوانە بدۆزەوە.

22 $A=\begin{bmatrix}2.5 & 1.5 & 0\\ 3.2 & 1 & -4\\ 6.4 & -5 & 2.1\end{bmatrix}$ **23** $L=\begin{bmatrix}-2.4 & 1 & 0\\ 3 & 0 & 0.5\\ 0 & 3.5 & 1\end{bmatrix}$ **24** $W=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & -5 & 0\\ 3 & 0 & 4\end{bmatrix}$

25 **لەش جوانی (ڕشاقە)** ئاراس ژمارەی کاتژمێری ئەو مەشقانەی پێی هەڵدەستێت بە ژمارەی گەرمۆکەکانی گەرمی ڕۆژانە پێویستیەتی تۆمارکرد. ئاراس چەند گەرمۆکەی پێویستە لەهەر کاتژمێرێکدا بۆهەر جۆرێك لەو مەشقانەی ئەنجامی دەدات. ڕێسای گرامەر بەکاربێنە بۆ شیکاری پرسیارەکە.

تۆماری کاتەکانی مەشقەکانی ئاراس				
	پاسکیل سواری	تۆپی سەرمێز	مەلەوانی	گەرمۆکەی پێویست
دووشەممە	1.5 h	1h	0.75 h	1620
چوارشەممە	0.75 h		1 h	915
پێنجشەممە	1 h	1.5 h		1320

26 **زانستەکان** ئەم خشتەی خوارەوە بارستە گەردیلەکانی سێ بابەت نیشان دەدات، سستەمێکی هاوکێشەی هێڵی بنووسە ڕێسای گرامر بۆ دیاریکردنی بارستە گەردیلەی هەر یەك لە کاربۆن (C)، هایدرۆجین (H)، ئۆکسجین (O) بەکاربهێنە

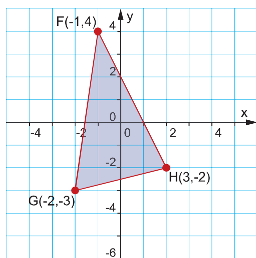
مادده	شێوگ	بارستەگەردیلە
میثان	CH_4	16
گلسیرۆل	$C_3H_8O_3$	92
ئاو	H_2O	18

ئەندازە سێگۆشەیەك سەرەکانی (x_1, y_1) و (x_2, y_2) و (x_3, y_3) ڕووبەرەکەی یەکسانە بە بەهای ڕووتی سنووردەری $A=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}$. ئەم زانیارییە بەکاربێنە بۆ شیکاری پرسیاری **26** و **27**.

27 ڕووبەری دورگەیەی خوارەوە بدۆزەوە.



28 ڕووبەری سێگۆشەی FGH بدۆزەوە.



29 **بیری ڕەخنەگری** بەهای c چەندە کەوا لە سنووردەری ڕیزکراوەی هاوکۆلکەکانی سستەمی $\begin{cases} 2x+y=6 \\ cy=3-x \end{cases}$ بکات یەکسانە بێت بە سفر؟ ڕوونیبکەوە چۆن دەیدۆزیتەوە.

30 **ئەنتەرنێت** یەکێك لەماڵپەڕەکانی ئەنتەرنێت داوای هەڵسەنگاندنی بابەتێکی کرد. بە پێدانی خاڵێك یان دوو خاڵ یان 3 خاڵ. ژمارەی هەڵسەنگکاران 38 کەس بووە. ژمارەی ئەوانەی 3 خاڵیان دابوو دوو ئەوەندەی ئەوانە بوون کە یەك خاڵیان دابوو. ژمارەی کەسەکانی هەرجۆرە هەڵسەنگاندنێك چەندە؟ ئەگەر زانیت ژمارەی گشتی خاڵەکان 85 خاڵە.

سنووردەری ئەم ڕیزکراوانە بە پێی x بدۆزەوە.

31 $A=\begin{bmatrix} x & x-1 \\ x+1 & x \end{bmatrix}$

32 $B=\begin{bmatrix} x-2 & x+2 \\ x+2 & x+6 \end{bmatrix}$

33 $C=\begin{bmatrix} 6x^2 & -6x+2x^2 \\ 3x & x-3 \end{bmatrix}$

34 **کانزای بەنرخ** پارچەیەك پارەی بچووك زیو $2.268\ g$ و پارچەیەك پارەی گەورەی زیو $5\ g$. ئومێد 425 پارچە پارەی لەهەردوو جۆرەکە هەیە. کێشی هەمووی 1483 g بوو.

أ ئومێد چەند پارچە پارەی لەهەر جۆرێك لایە.

ب نرخی زیوەکان چەندە، ئەگەر نرخی پارچە بچووکەکە 30 000 دینار و پارچە گەورەکەش 72 000 دینار بێت؟

35 کۆمەڵێك لە 6 گەورە و 3 منداڵ پێکهاتبوون سەردانی باخچەی ئاژەڵانیان کرد 48 000 دینار پارەیان دا. لەکاتێکدا کۆمەڵێکی تر لە دوو گەورە و 10 منداڵ پێکهاتبوون 52 000 دینار پارەیان دا بۆ چوونە ژوورەوە. نەزانراوی x بەکاربێنە بۆ نرخی بلیتی منداڵان و y بۆ نرخی بلیتی گەورەکان.

أ ئەو هاوکێشانە بنووسە کە ئەم پرسیارە ڕوونبکاتەوە؟

ب ڕیزکراوەی هاوکۆلکەکان بنووسە و هەژماری سنووردەرەکەی بکە؟

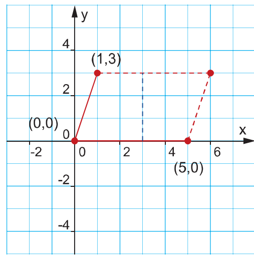
ج پرسیارەکە چەند شیکاری هەیە؟

د ڕێسای گرامەر بەکاربێنە بۆ دۆزینەوەی بەهای دوو نەزانراو؟

هـ نرخی بلیتی چوونە ژووری گەورەکان چەندە؟ نرخی بلیتی چوونە ژوورەوەی منداڵان چەندە؟

36  **بنووسە** چۆن ساغیدەکەیتەوە کە هاوڕێژەیەك ڕاستە؟ و چۆن ساغیدەکەیتەوە کە سنووردەری ڕیزکراوەی 2×2 دەکاتە سفر. بەراوردی بکە.

37 **هەنگاوی جۆراوجۆر** دوو خاڵی $(5,0)$ و $(1,3)$ دووسەری لاتەریبێکن، یەکێك لەسەرەکانی خاڵی بنەڕەتە لە ڕووتەختی پۆوتانەکاندا، وەك لەم وێنەیە نیشاندراوە.



أ ڕووبەری لاتەریبەکە بدۆزەوە.

ب هەردوو خاڵەکە بەڕیز لە $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}$ دابنێ هەژماری بەهای سنووردەرەکە بکە. پەیوەندی چییە لەنێوان بەهای سنووردەرەکە و ڕووبەری لاتەریبەکە؟

ج درێژی و پانی لاتەریبەکە بگۆڕە، پاشان هەژماری ڕووبەرەکەی و بەهای سنووردەرەکەی بکە. ئایا ئەو پەیوندییەی دۆزیتەوە ڕاستە لەنێوان سنووردەرەکە و ڕووبەرەکە؟

د ئاڵوگۆڕ بکە لەنێوان دوو خاڵی لقی (ب) بەشێوەیەك خاڵی (x_1, y_1) ببێتە خاڵی $(1, 3)$ سەرلەنوێ هەژماری سنووردەرەکەی و ڕووبەرەکەی بکە. کاریگەری ئەم ئاڵوگۆڕکردنە چییە لەسەر بەهای سنووردەرەکەی؟



38 کام باسێك لەمانە ڕاستە لەسەر ئەم سستەمە هێڵییە $\begin{cases} 3x = y - 1 \\ x + 2y = 16 \end{cases}$ ؟

(أ) بێسنوور؛ ژمارەیەکی نادیار شیکاری هەیە (ج) ئەستەمە؛ شیکاری نیە

(ب) ئەستەمە؛ شیکاری زۆرە (د) سنوورداره؛ یەك شیکاری هەیە

39 کام ڕیزکراوە سنووردەرەکەی 1 ؟

(أ) $\begin{bmatrix} 3 & 11 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} 3 & -11 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ (ج) $\begin{bmatrix} -3 & 11 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ (د) $\begin{bmatrix} 3 & 11 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$

40 **کورتە وەڵام** بەهای x بدۆزەوە ئەگەر بزانیت $25 = \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 1 & 2x \end{vmatrix}$.

بەرەنگاری پەرەپێدان

41 وادابنێ یەکێك لە ستوونەکان یان ڕیزەکانی ڕیزکراوەی 3×3 هەمووی سفرە. کاریگەری چی دەبێت لەسەر سنووردەرەکەی.

42 ڕیزکراوەێك بنووسە کە سنوورەکەی $x^2 + y^2$ بێت.

43 بەهای a و b و c بدۆزەوە ئەگەر $x = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}}{5}$ و $y = \dfrac{\begin{vmatrix} 7 & a \\ b & c \end{vmatrix}}{5}$.

44 **شارستانی** بەمەبەستی دانانی پەیکەرێك لە یەکێك لەگۆڕەپانەکانی شارێك. کە لە بەشی باکوور و باشوور پێکهاتووە ڕاپرسییەك لە نێوان دانیشتوانەکەیدا ئەنجامدرا. ئەنجامی ئەم ڕاپرسییە بەڕێژەی سەدی نووسراوە لە خشتەی بەرامبەردا لەبەشی باشوور لەگەڵ دانانی پەیەکەرەکەن ئەگەر بزانیت ژمارەی ئەوانەی بەشداری ڕاپرسییەکەیان کردووە 4 826 کەسن.

ئەنجامی ڕاپرسی		
بەش	لەگەڵدانان	دژی دانان
باکوور	47%	53%
باشوور	85%	15%
کۆی	49%	51%

ژمارەی ئەو هاولاتیانەی بەشی باشوور چەندە؟ کە دەنگیان بۆ ئەم ڕاپرسیە داوە.

پێداچوونەوەی لوولپێچی

45 بەکاربردن ساڤان 135 000 دیناری پێبوو. کاتێك چووە دوکانی پێڵاوی ژنان پێڵاوێکی بینی نرخەکەی بەڕێژەی 25% داشکابوو. لاسەنگەیەك بنووسە کە نرخە بنەڕەتیەکە پاسەدان بکات. ئەگەر بزانیت ساڤان پێڵاوەکەی کڕی. (پۆلەکانی پێشوو)

ئەم هاوکێشانە بە لەجیاتیدانان شیکاربکە. (پۆلەکانی پێشوو)

46 $\begin{cases} x = \frac{1}{3}y \\ 6x - 6y = 16 \end{cases}$

47 $\begin{cases} x + y = -5 \\ 2x - y = -7 \end{cases}$

48 $\begin{cases} 2x = y \\ 4x + y = -2 \end{cases}$

ڕیزکراوە بەکاربێنە بۆ گۆڕینی چوارلای $DEFG$ کاتێك $D(1, 1)$ و $E(4, -2)$ و $F(-2, -3)$ و $G(-1, -1)$ بێت. (وانەی 3-3)

49 ڕاکێشانی 5 یەکە بۆلای ڕاست و 3 یەکە بۆ سەرەوە.

50 وێنەدانەوەی بەدەوری تەوەری یەکەم.

51 ڕاکێشانی یەك یەکە بۆلای چەپ و دوو یەکە بۆ خوارەوە.

52 هاوڕێژەیەکی ئەندازەیی ڕێژەکەی 3 بێت.

بەشی 3

تاقیکردنەوەی نیوەی بەش

3–1 ڕیزکراوەکان و پێدراوەکان

سیفەتە میدالیاکانی یاری ئۆڵۆمپی			
	زێڕ	زیو	برۆنزی
کێش	567 *gr*	567 *gr*	453.6 *gr*
مس	7.5	7.5	90
ژمارەی کاتژمێری دروستکردن	19.65	18.30	18.45

خشتەکە بەکاربێنە بۆ شیکارکردنی ڕاهێنانی 1 تا 4

1 ڕیزکراوەی M بەکاربێنە بۆ نیشاندانی پێدراوی ناو خشتەکە.

2 ڕیزکراوەی M چ جۆرێکە؟

3 بەهای M_{32} چەندە؟ ئەم بەهایە چی دەنوێنێت؟

4 ناونیشانی دانەی 90 چەندە؟

ئەم ڕیزکراوانە بەکاربێنە بۆ شیکارکردنی ڕاهێنانی 5 تا 8

$$A=\begin{bmatrix}3&4\\1&-2\\0&-1\end{bmatrix} ، B=\begin{bmatrix}4&0\\0&4\end{bmatrix} ، C=\begin{bmatrix}1&-1\\3&2\\5&-1\end{bmatrix} ، D=\begin{bmatrix}5&1&-1\\-1.5&2&-2\end{bmatrix}$$

5 $A+C$ **6** $2B$ **7** $C-D$ **8** $C-3A$

3–2 لێکدانی ڕیزکراوەکان

جۆری ڕیزکراوەکانی $P_{5\times2}$ ، $Q_{2\times5}$ ، $R_{1\times5}$ ، $S_{5\times2}$ بۆ شیکارکردنی پرسیارەکانی 9 تا 12 .
دیاریبکە ئایا ئەنجامی لێکدانەکە پێناسەکراوە. ئەگەر پێناسەکراو بوو جۆرەکەی بنووسە.

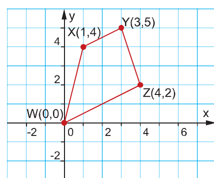
9 PQ **10** QR **11** RS **12** SP

ئەم ڕیزکراوانەی خوارەوە بەکاربێنە بۆ شیکارکردنی ڕاهێنانی 13 تا 16

$$E=\begin{bmatrix}1&-2&-1\\5&3&0\\-1&-1&2\end{bmatrix} ، F=\begin{bmatrix}0.5&0.75&-1\end{bmatrix} ، G=\begin{bmatrix}1&2\\2&-1\end{bmatrix} ، H=\begin{bmatrix}-1&4\\2&0\\0&-1\end{bmatrix}$$

13 EF **14** FH **15** HG **16** G^2

3–3 جێگۆڕکێ ئەندازەییەکان بە بەکارهێنانی ڕیزکراوەکان



ئەم جێگۆڕکێ ئەندازەییانە پۆوتانی سەری چوارلایەکەی بدۆزەوە و وێنەی بکێشە.

17 ڕاکێشانی یەك یەکە بۆلای چەپ و دوو یەکە بۆ خوارەوە.

18 بچووککردنەوەیەك بەڕێژەی $\frac{2}{3}$

19 گۆڕینی ڕیزکراوەکەی بە $\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}$ جۆری وێنەکە دیاریبکە.

20 گۆڕینی ڕیزکراوە بە $\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}$ جۆری وێنە دیاربکە

21 گۆڕینی ڕیزکراوە بە $\begin{bmatrix}0&2\\2&0\end{bmatrix}$ جۆری وێنە دیاربکە

3–4 سنووردەرەکان

سنووردەری ئەم ڕیزکراوانە بدۆزەوە.

22 $\begin{bmatrix}3&-1\\1&3\end{bmatrix}$ **23** $\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&0\\3&\frac{4}{5}\end{bmatrix}$ **24** $\begin{bmatrix}0.5&1.2\\-0.2&2.0\end{bmatrix}$ **25** $\begin{bmatrix}2&-1&3\\0&-2&1\\4&4&1\end{bmatrix}$

بە بەکارهێنانی ڕێسای گرامەر. ئەمانە شیکاربکە.

26 $\begin{cases}2x+3y=5\\y=1-x\end{cases}$ **27** $\begin{cases}x-y=2\\y-x+4=0\end{cases}$ **28** $\begin{cases}2x-y+z=3\\3x+2y=2z+1\\z=x+2\end{cases}$



5-3 هەڵگەڕاوەی ڕیزکراوەکان

Matrix Inverse

ئامانجەکان

- بڕیاردەدا ڕیزکراوەیەك هەڵگەڕاوەی هەیە یان نا.
- سیستمی هاوكێشەی هێڵی. بەبەكارهێنانی هەڵگەڕاوەی ڕیزكراوەكان شیكاردەكات.

زاراوەکان Vocabulary

هەڵگەڕاوەی ڕیزکراوە Matrix inverse

هاوکێشەی ڕیزکراوەکان Matrix equation

ڕیزکراوەی نەزانراوەکان Variable matrix

ڕیزکراوەی نەگۆڕەکان Constant matrix

کێ ئەمە بەکاردەهێنێت؟

ئەوانەی ئیش لە ئاوێتەکردن و کردنەوەی جفرەکاندا دەکەن. بۆ پاراستنی نهێنی نامەکان (نموونە 4)

دەتوانیت نامە بە جفرە بنووسێت بە هۆی ڕیزکراوەکان. ئەو کەسەی نامەکەی پێدەگات. پێچەوانەی کردارەکە بەکاردەهێنێت. بۆ کردنەوەی جفرەکە و خوێندنەوەی نامەکە.

بۆئەوەی ڕیزکراوە هەڵگەڕاوەی هەبێت پێویستە چوارگۆشەیی بێت. هەرچەندە ئەم مەرجە بەس نییە، چونکە هەندێك ڕیزکراوەی چوارگۆشەیی هەڵگەڕاوەی نییە. کاتێك ئەنجامی لێکدانی ڕیزکراوەی A لە ڕیزکراوەی B یەکسان بێت بە ڕیزکراوەی یەکە I ئەوا $AB=BA=I$. لەم بارەدا بە ڕیزکراوەی B دەوترێت **هەڵگەڕاوەی ڕیزکراوەی** A **Matrix Inverse** . هێمای A^{-1} بۆ دادەنرێت.

نموونە 1 دیاریکردنی ڕیزکراوەیەك هەڵگەڕاوەی ڕیزکراوەیەکی تر بێت

دیاریبکە ئایا ڕیزکراوەی B هەڵگەڕاوەی ڕیزکراوەی A یە.

أ $A=\begin{bmatrix}2&0&1\\4&1&2\\2&0&4\end{bmatrix}$ ؛ $B=\begin{bmatrix}\frac{2}{3}&0&-\frac{1}{6}\\-2&1&0\\-\frac{1}{3}&0&\frac{1}{3}\end{bmatrix}$

$$AB=\begin{bmatrix}2&0&1\\4&1&2\\2&0&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{2}{3}&0&-\frac{1}{6}\\-2&1&0\\-\frac{1}{3}&0&\frac{1}{3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=I$$

لەبەرئەوەی ئەنجامی لێکدانیان ڕیزکراوەی یەکەیە کەواتە ڕیزکراوەی B هەڵگەڕاوەی A یە.

ب $A=\begin{bmatrix}2&3\\7&10\end{bmatrix}$ ؛ $B=\begin{bmatrix}-10&6\\7&-4\end{bmatrix}$

$$AB=\begin{bmatrix}2&3\\7&10\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-10&6\\7&-4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix}$$

بە پشت بەستن بەوەی پێشوو. ڕیزکراوەی B هەڵگەڕاوەی ڕیزکراوەی A نییە.

لەبیرت بێت

ڕیزکراوەی یەکەی پلە n ڕیزکراوەیەکی چوارگۆشەییە لەجۆری n کە هەموو دانەکانی 0 . جگە لە دانانەکانی تیرەی سەرەکی نەبێت. کە هەموویان یەکسانن بە 1 . ڕیزکراوەی یەکە لە جۆری 3 بریتییە لە:

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$



1. دیاریبکە ئایا ڕیزکراوەی A هەڵگەڕاوەی ڕیزکراوەی B یە.

$A=\begin{bmatrix}-1&0&2\\4&1&-1\\2&0&1\end{bmatrix}$ ، $B=\begin{bmatrix}-0.2&0&0.4\\1.2&1&-1.4\\0.4&0&0.2\end{bmatrix}$



هەڵگەڕاوەی ڕیزکراوەی چوارگۆشەیی پلە 2

ئەگەر سنووردەری ڕیزکراوەی $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ یەکسان نەبێت بەسفر ئەوا ئەو ڕیزکراوەیە هەڵگەڕاوەی دەبێت و بریتییە لە $M^{-1} = \frac{1}{|M|}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

ڕیزکراوە هەڵگەڕاوەی نابێت ئەگەر سنووردەرەکەی یەکسان بێت بە سفر.

نموونـــــە 2 دۆزینەوەی هەڵگەڕاوەی ڕیزکراوەی چوارگۆشەیی پلە دوو

هەڵگەڕاوەی ئەم ڕیزکراوە بدۆزەوە ئەگەر هەبوو.

أ $M = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$

هەژماری سنووردەرەکەی بکە.

$$|M| = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = (-2)(-4) - 2\times 3 = 2 \neq 0$$

لەبەرئەوەی سنووردەرەکەی یەکسان نییە بە سفر کەواتە هەگەڕاوەکەی بریتییە لە:

$$M^{-1} = \frac{1}{|M|}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -4 & -2 \\ -3 & -2 \end{vmatrix}$$

ب $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 2 \\ 3 & 12 \end{bmatrix}$

هەژماری سنووردەرەکەی بکە.

$$|A| = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 2 \\ 3 & 12 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\times 12 - 2\times 3 = 0$$

لەبەرئەوەی سنووردەرەکەی یەکسانە بە سفر، کەواتە ڕیزکراوەکە هەڵگەڕاوەی نییە.

ڕۆشنایی

بۆ بەدەستهێنانی ڕیزکراوەی $\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ لە ڕیزکراوەی $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ەوە ئاڵوگۆڕ بکە لەنێوان دانەی a و d و نیشانەی دوو دانەکەی تر پێچەوانە بکە.



2. هەڵگەڕاوەی ڕیزکراوەی $C = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ بدۆزەوە.

دەتوانیت ڕیزکراوەکان بەکاربێنیت بۆ شیکارکردنی سستەمی هاوکێشەی هێڵی. بە بەکارهێنانی ڕیزکراوەکان سستەمی هاوکێشەکان دەگۆڕێتە سەر کردارێکی هاوشێوەی هاوکێشەی هێڵی وەك $5x = 20$. بە لێکدانی هەردوولای هاوکێشەکە لەهەڵگەڕاوەی هاوکۆلکەی 5 واتە $\frac{1}{5}$.

بۆ ئەنجامدانی ئەم کارە سستەمی هاوکێشەکان دەگۆڕیت بۆ **هاوکێشەی ڕیزکراوەی** $AX=B$ **Matrix equation** ، کاتێك A هێمای ڕیزکراوەی هاوکۆلکەکانی سستەمەکە بێت. بەڵام X هێمای **ڕیزکراوەی نەزانراوەکان Variable matrix** بێت. هەروەها B هێمای **ڕیزکراوەی نەگۆڕەکان Constant matrix** بێت.

ئەو هاوکێشە ڕیزکراوەییەی سستەمی ئەم دوو هاوکێشە هێڵییە دەنوێنێت $\begin{cases} x + y = 8 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$ بریتییە لە:

$$A \bullet X = B$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ڕیزکراوەی هاوکۆلکەکان ← A ؛ ڕیزکراوەی نەگۆڕەکان ← B ؛ ڕیزکراوەی نەزانراوەکان ← X

بۆ شیکار کردنی هاوکێشەی ڕیزکراوەیی $AX=B$ هەردوولا لێکدانی هەڵگەڕاوەی ڕیزکراوەی A بکە. «وادابنێ هەیە»: $A^{-1}AX = A^{-1}B$

$IX = A^{-1}B$

$X = A^{-1}B$

ئەنجامی لێکدانی ڕیزکراوەی A لە هەڵگەڕاوەکەی بریتییە لە ڕیزکراوەی یەکە I

نموونـــــە 3 شیکارکردنی سیستمی هاوکێشەی هێڵی بە بەکارهێنانی هەڵگەڕاوەی ڕیزکراوە

هاوکێشەیەکی ڕیزکراوەیی بنووسە کە ئەم سیستمە هێڵیە بنوێنێت $\begin{cases} x+y=8 \\ 2x+y=1 \end{cases}$ پاشان شیکاربکە.

هەنگاوی 1 ئەو هاوکێشە ڕیزکراوەییە بنوسە کە ئەم سستەمی دوو هاوکێشەییە بنوێنێت.

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}} \underset{X}{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}} = \underset{B}{\begin{bmatrix} 8 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

هەنگاوی 2 سنووردەری ڕیزکراوەی هاوکۆلکەکان بدۆزەوە.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1\times1 - 1\times2 = -1 \neq 0$$

هەنگاوی 3 هەڵگەڕاوەی ڕیزکراوەی هاوکۆلکەکان بدۆزەوە.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

هەنگاوی 4 شیکاربکە.

$$\underset{X}{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}} = \underset{A^{-1}}{\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}} \underset{B}{\begin{bmatrix} 8 \\ 1 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} -7 \\ 15 \end{bmatrix}$$

کەواتە شیکارەکەی: $x=-7$ و $y=15$.

ئاگاداربە!

لەبەرئەوەی لێکدانی ڕیزکراوە کرداری ئاڵوگۆڕ نییە. بۆیە پێویستە گرنگی بدەی بە لێکدانی هەڵگەڕاوەکەی بە هەمان ڕیزی هەردوولای یەکسانەکە. پێویستە A^{-1} لەهەردوولا بکەوێتە یەکەمی لای چەپ.



خاڵی چاودێری

ئەو هاوکێشە ڕیزکراوەییە بنووسە کە ئەم سیستمە دەنوێنێت $\begin{cases} x+y=4 \\ 2x+3y=9 \end{cases}$ پاشان شیکاری بکە.

ی	1	ر	13	ل	25
ا	2	ز	14	ڵ	26
ە	3	ژ	15	م	27
ب	4	س	16	ن	28
پ	5	ش	17	هـ	29
ت	6	ع	18	و	30
ج	7	غ	19	وو	31
چ	8	ف	20	ۆ	32
ح	9	ڤ	21	ی	33
خ	10	ق	22	ێ	34
د	11	ك	23	ـــ	0
ڕ	12	گ	24		

ئەو ڕیزکراوانەی هەڵگەڕاوەیان هەیە بەکاردێن بۆ جفرەکردنی نامەکان. وا دابنێ دەتەوێت ئەم نامەیە جفرەبکەی: «بابان لە ڕێیە» قۆناغی یەکەم لە کرداری جفرەکردن بریتییە لە گۆڕینی نامەکە بۆ ژمارەی یەکبەدوای یەك. بە بەکارهێنانی خشتەی جفرەکردن. هەر پیتێك دەگۆڕێت بۆ ژمارەیەك «نامەنێر و نامەوەرگر هەمان خشتەی جفرەکردن بەکاردێنن» دەتوانیت خشتەی بەرامبەر بەکاربێنێت. کاتێك ـــ هێمای بۆشایی نێوان دوو وشە بێت. نامەکە پیت بە پیت بنووسە. لەگەڵ بەکارهێنانی هێمای ـــ بۆ جیاکردنەوەی وشەکان.

ب	ە	ی	ا	ن	ی	ـــ	ز	ە	م	ا	و	ە	ن	د	ە
4	3	33	2	28	33	0	14	3	27	2	30	3	28	11	3

ئاگاداربە!

ئەگەر ژمارەی دانەکانی یەکبەدوای یەکەکە تاك بوو پێویستە لە کۆتایی یەکبەدوای یەکەکە 0 زیادبکەیت تا داناکان ببێت بە جووت پاشان بکرێت بە ڕیزکراوە.

ئەم یەکبەدوای یەکە لە ڕیزکراوەیەکی دوو ڕیزدا بنووسە لە ڕاستەوە بۆ چەپ. ئەم ڕیزکراوەیەت دەستدەکەوێت.

$$A = \begin{bmatrix} 14 & 0 & 33 & 28 & 2 & 33 & 3 & 4 \\ 3 & 11 & 28 & 3 & 30 & 2 & 27 & 3 \end{bmatrix}$$

کردنەوەی جفرەی ئەم نامەیە کارێکی گران نییە بۆیە نامەنێر ڕیزکراوەیەکی چوارگۆشەیی کە هەڵگەڕاوەی هەبێت بەکاردێنێت بۆ شاردنەوەی یەکبەدوای یەکە ژمارەییەکە پێش ناردنی. نامە وەرگر هەڵگەڕاوەی ڕیزکراوەکە بەکاردێنێت بۆ لابردنی شاردنەوەکە لەسەر ئەو یەکبەدوای یەکە ژمارەییەی پێی دەگات ڕیزکراوەی شاردنەوەی $M = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ بەکاربێنە و لێکدانی ڕیزکراوەی A بکە ئەمەت دەست دەکەوێت.

$$B = MA\begin{bmatrix} 45 & 11 & 127 & 87 & 36 & 101 & 36 & 15 \\ 76 & 22 & 221 & 146 & 70 & 169 & 69 & 26 \end{bmatrix}$$

نامەنێر ئەم یەکبەدوای یەکە دەنێرێت:

76 22 221 146 70 169 69 26 45 11 127 87 36 101 36 15

نامەوەرگر پێویستە ئەم یەکبەدوای یەکە بە ڕیزکراوەی دوو ڕیز لە ڕاستەوە بۆ چەپ. ئەم ڕیزکراوەیەی دەستدەکەوێت.

$$C = \begin{bmatrix} 45 & 11 & 127 & 87 & 36 & 101 & 36 & 15 \\ 76 & 22 & 221 & 146 & 70 & 169 & 69 & 26 \end{bmatrix}$$

پاشان لێکدانی هەڵگەڕاوەی ڕیزکراوەی M ی دەکەین کە بریتییە لە $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} = M^{-1}$ ئەنجامی لێکدانی $M^{-1}C$ بریتییە لە:

$$A = \begin{bmatrix} 14 & 0 & 33 & 28 & 2 & 33 & 3 & 4 \\ 3 & 11 & 28 & 3 & 30 & 2 & 27 & 3 \end{bmatrix}$$

وەرگر دانەکانی ئەو ڕیزکراوەکەی بەدەستی هێناوە بەیەك بەدوای یەکی ژمارەیی دەنوسێت بە دەستپێکردن لە لای ڕاستی ڕیزی یەکەم ئەمەی دەستدەکەوێت.

3 11 28 3 30 2 27 3 14 0 33 28 2 33 3 4

لەژێر هەر ژمارەیەکدا پیتەکەی بەرامبەری لە خشتەی جفرەکەوە دەنووسێت.

3	11	28	3	30	2	27	3	14	0	33	28	2	33	3	4
ە	د	ن	ە	و	ا	م	ە	ز	ـــ	ی	ن	ا	ی	ە	ب

نامەکە دەخوێنێتەوە «بەیانی زەماوەندە»

نموونـــــە 4 جێبەجێکردن لەسەر جفرە

هەژار ئەم نامەیەی لە لاوینی هاوڕێیەوە پێگەیشت 119 63 36 15 9 25 85 51 33 11 6 25 . لاوین و هەژار ڕیزکراوەی شاردنەوەی $M = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ بەکاردەهێنن. نامەکەی لاوین چییە؟

هەنگاوی 1 هەڵگەڕاوەی ڕیزکراوەی M بدۆزەوە.

$$M^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

هەنگاوی 2 ئەو نامەیەی هەژار بەدەستی گەیشتوە لە ڕاستەوە بۆ چەپ بەشێوەی ڕیزکراوەی دوانی بنووسە.

$$A = \begin{bmatrix} 25 & 9 & 15 & 36 & 63 & 119 \\ 25 & 6 & 11 & 33 & 51 & 85 \end{bmatrix}$$

هەنگاوی 3 $M^{-1}A$ هەژماربکە.

$$M^{-1}A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 25 & 9 & 15 & 36 & 63 & 119 \\ 25 & 6 & 11 & 33 & 51 & 85 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 25 & 0 & 3 & 27 & 27 & 17 \\ 0 & 3 & 4 & 3 & 12 & 34 \end{bmatrix}$$

هەنگاوی 4 ڕیزکراوەکە بەشێوەی یەکبەدوای یەك بنووسە.

0 3 4 3 12 34 25 0 3 27 27 17

هەنگاوی 5 جفرەی نامەکە بکەوە.

0	3	4	3	12	34	25	0	3	27	27	17
ـــ	ە	ب	ە	ر	یٚ	ل	ـــ	ە	م	م	ش

(شەممە لێرەبە) نامەکەی لاوینە.



4. ڕیزکراوەی شاردنەوەی $M = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ بەکاربێنە بۆ کردنەوەی ئەم نامەیە 0 20 60 27 36 12 0 46 148 69 75 31 .

بیربکەوە و تاوتوێبکە

1. ئەگەر زانیت ڕیزکراوەی A هەڵگەڕاوەی هەیە. چ ئەنجامێك دەرئەنجام دەکەیت؟

2. هەڵگەڕاوەی ڕیزکراوەی یەکە چەندە؟



3. ڕێکخەربە ئەم خشتەیە دروستبکە و تەواوی بکە، بەراوردبکە لەنێوان هەڵگەڕاوەی ڕیزکراوە و هەڵگەڕاوەی ژمارەی ڕاستی.

	ژمارە ڕاستییەکان	ڕیزکراوەکان
نووسین لەگەڵ نموونە		
چۆن هێمای هەڵگەڕاوەی ڕیزکراو یان هێمای هەڵگەڕاوەی ژمارە ئامادە دەکەیت		
سیفەتی ئاڵوگۆڕکردن		

5-3 ڕاهێنانەکان

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

1 **زاراوەکان** چۆن سیستمی هاوکێشەی هێڵی بە دوو نەزانراو بەشێوەی ڕیزکراوە دەنووسیت.

بڕوانە نموونە 1

دیاریبکە ئەگەر هەر ڕیزکراوەیەك هەڵگەڕاوەی ڕیزکراوەکەی تریان بێت.

2 $\begin{bmatrix} -\frac{1}{8} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

3 $\begin{bmatrix} 3 & 12.5 & 3 \\ -1.6 & 2 & -1 \\ 5 & 1 & -10 \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} 1 & 0.4 & 1 \\ 1.2 & 0 & 0.8 \\ -1.6 & 0.2 & -1 \end{bmatrix}$

4 $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

بڕوانە نموونە 2

هەڵگەڕاوەی ڕیزکراوەکە بدۆزەوە ئەگەر هەبوو.

5 $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

6 $\begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$

7 $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 3 \\ \frac{3}{2} & 9 \end{bmatrix}$

8 $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

9 $\begin{bmatrix} 8 & 7 \\ 9 & 8 \end{bmatrix}$

پڕوانە نموونە 3	ئەم سیستمی هاوکێشانە بەشێوەی ڕیزکراوەیی بنووسە.

10 $\begin{cases} 3x - y = 5 \\ y = 2x - 4 \end{cases}$ **11** $\begin{cases} 5x + 9y = 1 \\ 2 - 4x - 7y = 4 \end{cases}$ **12** $\begin{cases} 2x + 4y = 3 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases}$

پڕوانە نموونە 4

13 **جفرە** سیروان نامەیەکی لە ئامانجی هاوڕێیەوە پێگەیشت. کاتی دیداری هەردووکیانی تێدا دیاری کردوە. ئەمەش نامەکەیە: 93 6 34 105 85 126 221 14 82 255 199 298 سیروان ڕیزکراوەی $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$ بەکارهێنابوو بۆ شاردنەوەی نامەکەی، کاتی دیداری هەردووکیان چەندە؟

ڕاهێنان و شیکارکردنی پرسیارەکان

ڕاهێنانی ئازاد	
بۆشیکارکردنی ڕاهێنانەکان	تەماشای نموونە
16–14	1
21–17	2
24–22	3
25	4

ئایا هەریەك لەم ڕیزکراوانە هەڵگەڕاوەی ئەویتریانە؟

14 $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

15 $\begin{bmatrix} -\frac{16}{15} & -\frac{4}{15} \\ -\frac{2}{15} & -\frac{8}{15} \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -2 \end{bmatrix}$

16 $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0.2 & -0.2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

هەڵگەڕاوەی ئەم ڕیزکراوانە بدۆزەوە ئەگەر هەڵگەڕاوەی هەبوو.

17 $\begin{bmatrix} -0.25 & -0.5 \\ -1.5 & -2 \end{bmatrix}$ **18** $\begin{bmatrix} 7 & 14 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ **19** $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$ **20** $\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ **21** $\begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 7 & 11 \end{bmatrix}$

هەریەك لەم سستمانە بەشێوەی ڕیزکراوەیی بنووسە.

22 $\begin{cases} x - y = 5 \\ 2y - x = 6 \end{cases}$ **23** $\begin{cases} x + 2y = 6 \\ 2x + y = 9 \end{cases}$ **24** $\begin{cases} 4x + 7y = 10 \\ 3x + 5y = 9 \end{cases}$

25 **جفرە** ئاری لە هاوڕێکەیەوە ئەم نامەیەی پێگەیشت. ناوی ئەو شارەی تێدا دیاریدەکات کە ئێستا لێی دەژیت نامەکە بریتییە لە: 277 15 198 27 136 167 59 62 3 43 6 33 40 14

ڕیزکراوەی شاردنەوەی $\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ بەکارهاتووە بۆ شاردنەوەی نامەکە. ناوی ئەو شارە چییە؟

26 **گونجاندن (توضیب)** هەتاو سێ جۆر میوەی پیشاندراوی بەراوردکرد. هاوکێشەی ڕیزکراوەیی بۆ بنووسە و شیکاری بکە. بۆ دۆزینەوەی نرخی هەر کیلۆگرامێك هەرمێ و خۆخ و هەڵوژە.



27 **هەنگاوی جۆراوجۆر** یانەی بابل گەشتێکی دەریایی ڕێکخست کە بەلەمی تێدا بەکارهاتبوو دوو جۆر بوون، گەورەکان 6 کەسی دەگرت. بچووکەکانیان دوو کەسی دەگرت. ژمارەی گەشتیاران 34 کەس بوو پرسیارەکە دەردەبڕدرێت بەم سستەمە هێڵییە $\begin{cases} 6x + 2y = 34 \\ x + y = 7 \end{cases}$. کاتێك x هێمای ژمارەی بەلەمە گەورەکانە و y ژمارەی بەلەمە بچووکەکانە.

أ ڕیزکراوەی هاوکۆلکەکان بنووسە؟

ب سستمەکەی پێشوو لەسەر شێوەی ڕیزکراوە بنووسە؟

ج هەڵگەڕاوەی ڕیزکراوەی هاوکۆلکەکان بنووسە؟

د شیکاری هاوکێشەی ڕیزکراوەیی بکە بۆ دۆزینەوەی ژمارەی بەلەمەکانی هەرجۆرێك؟

28 **بیری ڕەخنەگر** ئەو پەیوەندییە چییە. ڕیزکراوە و هەڵگەڕاوەکەی و ڕیزکراوەی یەکە بەیەکەوە دەبەستێت؟

29 هەکار نامەیەکی جفرە کرد و دەیەوێت بۆ هاوڕێیەکەی بینێرێت نامە جفرەکراوەکە لە ڕیزکراوەی C دا نووسی. ڕیزکراوەی شاردنەوەی M ی بەکارهێنا. نامەیەکی شاراوەی جفرەکراوی D دەستکەوت. ئەو مەرجانە چین پێویستە ڕەچاوبکرێن بۆ ڕیزکردنی ڕیزکراوەکان.

30 **هەڵە لە شیکردنەوە** هەریەکە لە شوان و ساڤان. هەژماری هەڵگەڕاوەی ڕیزکراوەی $M = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ یان کرد. ئایا کامیان هەڵەی کردووە؟ هەڵەکە ڕوونبکەوە.

أ شوان $M^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

ب ساڤان $M^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$

31 **بۆ خۆشی** باوکت ووتی 5000 دینار لە گیرفانمدایە، پێکهاتووە لە جۆری 50 دیناری و 100 دیناری دەیدەم بە تۆ ئەگەر بزانیت چەند پارچە لەهەر جۆرێك لە گیرفانمدایە، بۆ یارمەتیدانت ووتی ژمارەی پارچەکان هەمووی 73 پارچەیە. هەڵگەڕاوەی ڕیزکراوە بەکاربێنە بۆ بردنەوەی 5000 دینارەکە.

32 **ئاو** شارەوانی شارێك بۆڕییەکی ئاوی لە یەکێك لە باخچە گشتییەکانی شار دانا. بۆئەوەی گەشتیاران بەکاریبێنن. ئەم بۆڕیە 24 کاتژمێر لە ڕۆژێکدا ئیش دەکات دەتوانرێت بەسێ خێرایی هێواش و ناوەند و خێرا بەکاربهێنرێت. ئەم خشتەیەی خوارەوە پێدراوەکانی بەکارهێنانی بۆڕییە ئاوەکەیە. لەماوەی سێ ڕۆژدا. خێرایی هەرسێ جۆرەکە بە کیلۆلیتر بۆ هەر کاتژمێرێك بدۆزەوە.

	هێواش ژمارەی کاتژمێرەکان	ناوەند ژمارەی کاتژمێرەکان	خێرا ژمارەی کاتژمێرەکان	برەکەی بە کیلۆمەتر
یەکشەممە	15	7	2	199
دووشەممە	16	4	4	208
سێشەممە	12	8	4	236

33 **چی دەبێت ئەگەر...** وا دابنێین کە دانەکانی ڕیزکراوەی $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ بکەیت بە دوو ئەوەندە؟

أ دانەکانی هەڵگەڕاوەی ڕیزکراوەکە چۆن دەگۆڕێت؟

ب دەستەواژەیەك بنووسە لەسەر چۆنیەتی گۆڕانی دانەکانی هەڵگەڕاوەی ڕیزکراوێکی سنووردار. ئەگەر ڕیزکراوەکە لێکدانی ژمارە k بکەیت؟

34 هەرێم 24 000 دیناری دا بۆ نرخی چوونەژوورەوەی 7 بلیتی منالان و 2 بلیتی گەورە بۆ باخچەی ئاژەڵان. مازن 46 000 دینار پارەی دا نرخی 4 بلیتی گەورە و 13 بلیتی منالان. نەزانراوی x بەکاربێنە بۆ نرخی بلیتی گەورە و نەزانراوی y بۆ نرخی بلیتی منداڵان.

أ بەهۆی سستەمی هاوکێشەکانەوە ئەم پرسیارە دەرببڕە.

ب ئایا سنووردەری ڕیزکراوەی هاوکۆلکەکان یەکسانە بە سفر؟ ژمارەی شیکارەکانی چەندە؟

ج شێوەی ڕیزکراوە و هەڵگەڕاوەی ڕیزکراوە بەکاربێنە بۆ دۆزینەوەی x و y.

د نرخی بلیتی گەورە چەندە؟ نرخی بلیتی منداڵان چەندە؟

35 **بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە** أ بیسەلمێنە هەڵگەڕاوەی ڕیزکراوەی $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ بریتییە لە $\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

ب هەڵگەڕاوەی ڕیزکراوێك $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ سنووردەرەکەی 1 بێت چەندە؟

ج ئەو هۆیە چییە کە وادەکات دانەکانی هەڵگەڕاوەی ڕیزکراوەی $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ژمارەی تەواوبێت. کاتێك دانەکانی ڕیزکراوەکە ژمارەی تەواوبن و سنووردەرەکەی 1 بێت.

36 بەهای x بدۆزەوە کاتێك ڕیزکراوەی $\begin{bmatrix} 2 & x \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ هەڵگەڕاوەی نەبێت.

37 هەڵگەڕاوەی ئەو ڕیزکراوەیە چەندە کە تەنها یەك دانەی هەیە $[a]$ ؟

38 **کیمیا** سانا بڕێك لە گیراوەیەك 15%ی ترشی گۆگرد بێت تێکەڵ کرد لەگەڵ گیراوەیەکی تر کە 40% ئەو ترشەی تێدابێت. بڕی 50L بەدەستهێنا ڕێژەی ترشی گۆگرد تێیدا 35% بوو. ئایا چەند لیتر لەهەریەك لە گیراوەکان تێکەڵ کرا؟



39 **بنووسە** ئەنجامی لێکدانی $\begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 & -5 \\ -7 & 6 \end{bmatrix}$ بدۆزەوە. پەیوەندی چییە لەنێوان ئەم دوو ڕیزکراوەیە؟



ئامادەکردن بۆ تاقیکردنەوە

40 کام لەمانەی خوارەوە هاوکێشەی ڕیزکراوەیی سستەمی $\begin{cases} 3x+2y=8 \\ x=y+1 \end{cases}$ ؟

أ $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

ب $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 8 \\ 1 \end{bmatrix}$

ج $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

د $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 8 \\ 1 \end{bmatrix}$

41 کام لەمانەی خوارەوە ڕاستە بۆ ئەم ڕیزکراوەیە $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 6 & -9 \end{bmatrix}$ ؟

أ ڕیزکراوەکە هەڵگەڕاوەی هەیە. چونکە سنووردەرەکەی یەکسان نییە بە سفر.

ب ڕیزکراوەکە هەڵگەڕاوەی هەیە. چونکە سنووردەرەکەی یەکسانە بە سفر.

ج ڕیزکراوەکە هەڵگەڕاوەی نییە. چونکە سنووردەرەکەی یەکسانە بە سفر.

د ڕیزکراوەکە هەڵگەڕاوەی نییە. چونکە سنووردەرەکەی یەکسان نییە بە سفر.

42 دانەی b_{11} چەندە؟ ئەگەر B هەڵگەڕاوەی ڕیزکراوەی $A=\begin{bmatrix} -1 & 6 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ بێت؟

أ 1 ب $-\frac{1}{9}$ ج 3 د $-\frac{1}{27}$

43 کام لەمانەی خوارەوە ڕاستە لەسەر ڕیزکراوەی $M=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ئەگەر سنووردەرەکەی یەکسان نەبێت بە سفر و کاتێك $a>0$ و $b<0$ و $c<0$ و $d>0$ ؟

أ هەموو دانەکانی M^{-1} سالب نییە.

ب ڕیزکراوەی M^{-1} تەنها یەك دانە سالبی تێدایە.

ج ڕیزکراوەی M^{-1} تەنها دوو دانە سالبیی تێدایە

د ڕیزکراوەی M^{-1} تەنها سێ دانە سالبی تێدایە.

44 **کورتە وەڵام** پێشانگایەکی تابلۆکانی هونەر. تابلۆیەکی هونەری تێچوونەکەی 25 000 دینارە پێشکەش بەو کەسە دەکات کە 500 000 دینار دەبەخشێت. تابلۆیەك تێچوونەکەی 50 000 دینار دەبەخشێتە ئەو کەسەی 1 000 000 دینار دەبەخشێت. پێشانگاکە 24 000 000 دینارى لە بەخشینەکان کۆکردەوە بەرامبەر پێدانی 35 تابلۆ. ژمارەی بەخشینەکان لەهەر جۆرێك چەندبوو؟

بەرەنگاری و فراوانکردن

45 **خولیاکان** نمرەکانی کۆتایی ساڵی خوێندکارێك بەرزدەکرێتەوە بەهاوکۆلکەی جیاواز بە پێی هەر بابەتێك. ئەم خشتەیەی خوارەوە نمرەکانی 4 خوێندکار لە 4 بابەت و سەرجەمی هەریەکەیان روونەکاتەوە. پێویستە لەسەرت بەرزکردنەوەی هەر بابەتێك بدۆزێتەوە.

نمرەکانی تاقیکردنەوەی کۆتایی ساڵ					
خوێندکار	بیرکاری	زانست	زمانی عەرەبی	زمانی بیانی	سەرجەم
هیوا	65	72	55	50	1038
رێبەر	40	45	66	60	890
رەوەند	55	65	60	65	1030
عیماد	85	75	65	75	1275

46 بەهای دانەکانی ریزکراوەی $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ بدۆزەوە بۆئەوەی یەکسان بێت بە هەڵگەڕاوەکەی.

47 ژیکاڵ لە باوکیەوە ئەم نامەیەی پێگەیشت 18 ، 0 ، 30 ، 15 ، -33 ، -8 ، 7 ، -5 ، -3 ، 5 ، 3 ، 12 ، 4 ، 8 ، 33 ، 6 ، 0 ، 0 . بۆ کردنەوەی نامەکە ریزکراوەیەکی شاراوەی 3 × 3 کە هەموو دانەکانی ژێرتیرەی سەرەکی سفرە، لە کاتێکدا دانەکانی تر هەموویان یەکسانن بە 1.

أ ئەو نامەیە چییە کە ژیکاڵ پێی گەیشتووە؟

ب ریزکراوەی شاردنەوە کە کامەیە؟

ج ژیکاڵ وەڵامی نامەکەی باوکی داوە بەم شێوەیە «بەڵێن دەدەم». ئەو نامەیە چییە کە باوکی پێی دەگات.

پێداچوونەوەی لوولپێچی

شیکاریکە (پۆلەکەی پێشوو)

48 $\frac{2x}{10} = \frac{12}{30}$ **49** $\frac{0.5}{0.2x} = \frac{100}{7}$ **50** $125\%x = 117$

رێگای لابردن بەکاربێنە بۆ شیکارکردنی سیستمی ئەم هاوکێشانە. (وانەی 5-2)

51 $\begin{cases} x+y-z=2 \\ 2x+3y-6z=5 \\ -4z-5y+0.25z=-9 \end{cases}$

52 $\begin{cases} y-x-3z=4 \\ 2x+y-4z=-3 \\ 0.25x+8z+3=2y \end{cases}$

سنووردەری ئەم ریزکراوانە بدۆزەوە. (وانەی 4-3)

53 $\begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0.5 \end{bmatrix}$ **54** $\begin{bmatrix} \frac{1}{6} & 3 \\ 1 & 12 \end{bmatrix}$ **55** $\begin{bmatrix} -4 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ **56** $\begin{bmatrix} \frac{4}{9} & 8 \\ \frac{3}{2} & -81 \end{bmatrix}$

لاپەڕەی تەکنۆلۆژیا

شیکارکردنی سیستمی هێڵی بە بەکارهێنانی بەرنامەی Excel

پەیوەندە بە وانەی 5-3

چالاکی

شیکاری ئەم سیستەمە بکە $\begin{cases} 7x+2y=-8 \\ -3x+y=9 \end{cases}$

دەتوانیت بەرنامەی Excel بەکاربێنیت بۆ هەژمارکردنی سنووردەری ڕیزکراوەکە و هەڵگەڕاوەی ڕیزکراوەکە. بە نیازی شیکارکردنی سستەمی $AX=B$ بە نووسینی $X=A^{-1}B$ و هەژماری ڕیزکراوەی $A^{-1}B$ بۆ دۆزینەوەی A^{-1} . دەستبکە بەهەژماری سنووردەری ڕیزکراوەیی A لەبیرت بێت. سنووردەری ڕیزکراوەی $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ بریتییە لە $|A|=ad-bc$

C5		fx =B2*C3-B3*C2		
	A	B	C	D
1				
2	Matrix A	7	2	
3		-3	1	
4				
5	Determinant A		13	

هەرچوار هاوکۆلکەکانی سستەمەکە a لە $B2$ ، b لە $C2$ ، c لە $B3$ ، d لە $C3$ بخە ناو بژمێرەکەوە. بۆ هەژمارکردنی سنووردەری ڕیزکراوە ئەمانە $=\boldsymbol{B2*C3-B3*C2}$ لە خانەی $C5$ تۆماربکە.

لەلایەکی تر، لەبیرت بێت هەڵگەڕاوەی ڕیزکراوەی $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

بریتییە لە $A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ یان $A^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{d}{|A|} & -\frac{b}{|A|} \\ -\frac{c}{|A|} & \frac{a}{|A|} \end{bmatrix}$ ، $=\boldsymbol{C3/C5}$ بخەناو خانەی $\boldsymbol{C7}$ بۆ هەژماری $\frac{d}{|A|}$

و بۆ هەژماری $\frac{a}{|A|}$ ، $=\boldsymbol{B2/C5}$ لەخانەی $\boldsymbol{D8}$ تۆماربکە.

		fx =C7*E7+D7*E8			
	A	B	C	D	E
6					Matrix B
7	Inverse A or A^{-1}		0.076923	-0.15385	-8
8			0.230769	0.538462	9
9					
10		Solution A^{-1}B		-2	
11					

شیکاری ڕیزکراوەکە لە ستوونێك پێکدێت ئەویش $A^{-1}B$ دوو ژمارەی لای ڕاستی هاوکێشەکە واتە(8- و 7)لە دوو خانەی $E7$ و $E8$ بەودای یەکدا تۆماربکە. بۆ هەژماری ڕیزکراوەی $A^{-1}B$ ئەمانە تۆماربکە.

$=\boldsymbol{C7*E7+D7*E8}$ لە خانەی $D10$

و $=\boldsymbol{C8*E7+D8*E8}$ لە خانەی $D11$.

D11		fx =C8*E7+D8*E8			
	A	B	C	D	E
6					Matrix B
7	Inverse A or A^{-1}		0.076923	-0.15385	-8
8			0.230769	0.538462	9
9					
10		Solution A^{-1}B		-2	
11				3	

شیکار بریتییە لە $x=-2$ و $y=3$. بەرنامەیەکت دارشت بۆ شیکارکردنی سستەمی هاوکێشە هێڵیەکانی 2×2 . یەکێك لە هاوکۆلکەکانی سستەمی پێشوو بگۆڕە یان یەکێك لە ژمارەکانی لای ڕاست بگۆڕە. تێبینی بکە چۆن ئەنجامەکان دەگۆڕێت.

هەوڵبدە

1 هەردوو ژمارەی لای ڕاستی دوو هاوکێشەکە بگۆڕە بەدوو ژمارەی 5− و 9 ، سستەمی نوێ شیکاربکە بە بەکارهێنانی ئەو بەرنامەی داتڕشتووە.

2 چۆن ڕاستی ئەنجامەکەت دەسەلمێنێت بەکارهێنانی بەرنامەی Excel ؟

3 **بیری ڕەخنەگر** ئەو بەرنامەیە بەکاربێنە بۆ شیکارکردنی سستەمێکی ئەستەم کە پێشتر زانیوتە. و یەکێکی تر دیارینەکراو بێت. چۆن بەرنامەی Excel بەکاردەهێنیت بۆئەوەی بزانیت کە ئەم سستەمە ئەستەمە یان دیارینەکراوە.

6-3 ژمارە ئاوێتەکان

Complexe Numbers

ئامانجەکان

- ناسینەوەی ژمارە خەیاڵییەکان و ئاوێتەکان و چۆنیەتی بەکارهێنانیان
- هاوکێشە دووجاکان کە لەژمارە ڕاستییەکاندا ڕەگیان نییە شیکاردەکات.

زاراوەکان
Vocabulary

یەکەی خەیاڵی
Imaginary unit

ژمارەی خەیاڵی
Imaginary number

ژمارەی ئاوێتە
Complex number

بەشی ڕاستی
Real part

بەشی خەیاڵی
Imaginary part

ئاوەڵی ژمارەی ئاوێتە
Complex conjugate

بۆچی ئەمە فێردەبین؟

دەتوانرێت ژمارە ئاوێتەکان بۆ شیکاری ئەو هاوکێشە دووجایانە بەکاربهێنرێت کە لە ژمارە ڕاستیەکاندا شیکاریان نییە (نموونە 4)

$f(x)=x^2+1$

دەتوانیت بە ڕوونکردنەوەیی دڵنیابیت کە نەخشەی $f(x)=x^2+1$ شیکاری نییە لە کۆمەڵەی ژمارە ڕاستیەکاندا. ئەگەر هەوڵبدەیت شیکاری ئەم هاوکێشە دووجایە $x^2+1=0$ بکەیت کە ئاوەڵیەتی ئەوا $x=\pm\sqrt{-1}$ دەستدەکەوێت. ئەمەش دڵنیات دەکات کە ڕەگەکانی ڕاستی نین.

بەڵام بۆئەوەی لەتواناتدا هەبێت ئەم جۆرە هاوکێشانە شیکاربکەیت پێویستە ڕەگی دووجای ژمارەی سالب بزانیت. زانایانی بیرکاری ئەم جۆرە ڕەگانەیان خستەناو زانستی بیرکاریەوە و ناویان لێنا **ژمارە ئاوێتەکان Complex numbers** . یەکەمین ژمارە لەم ژمارانە $i=\sqrt{-1}$ ناویان لێنا **یەکەی خەیاڵی Imaginary Unit**. دەتوانیت ڕەگی دووجا بۆهەر ژمارەیەکی سالب بە بەکارهێنانی یەکەی خەیاڵی بنووسیت.



ژمارە خەیاڵیەکان

بەنووسین	بەژمارە	بەجەبر
ژمارەی خەیاڵی Imaginary Number ڕەگی دووجای ژمارەیەکی سالبە دەتوانرێت هەموو ژمارەیەکی خەیاڵی لەسەر شێوەی bi بنوسرێت کاتێك b ژمارەی ڕاستی و i یەکەی خەیاڵی بێت. دووجای هەر ژمارەیەکی خەیاڵی دەکاتە ئەو ژمارە سالبەی بۆ پێناسەکردنی بەکارهاتووە.	$\sqrt{-1}=i$ $\sqrt{-2}=\sqrt{-1}\sqrt{2}=i\sqrt{2}$ $\sqrt{-4}=\sqrt{-1}\sqrt{4}=2i$ $i^2=\left(\sqrt{-1}\right)^2=-1$	ئەگەر b ژمارەیەکی ڕاستی موجەب بێت ئەوا: $\sqrt{-b}=i\sqrt{b}$ $\sqrt{-b^2}=ib$ $\left(\sqrt{-b}\right)^2=-b$

نموونە 1 سادەکردنی ڕەگە دووجاکانی ژمارە سالبەکان

هەر برەیەك بەپێی i بنووسە.

أ $3\sqrt{-16}$

$3\sqrt{(16)(-1)}$	-16 شیتەڵ بکە
$3\sqrt{16}\sqrt{-1}$	سیفەتی لێکدانی ڕەگەکان
$3\times 4\sqrt{-1}$	سادەبکە
$12\sqrt{-1}$	لێکبدە
$12i$	بەپێی i بنووسە

ب $-\sqrt{-75}$

$-\sqrt{(75)(-1)}$	-75 شیتەڵ بکە
$-\sqrt{75}\sqrt{-1}$	سیفەتی لێکدانی ڕەگەکان
$-\sqrt{25}\sqrt{3}\sqrt{-1}$	سیفەتی لێکدانی ڕەگەکان
$-5\sqrt{3}\sqrt{-1}$	سادەبکە
$-5\sqrt{3}i=-5i\sqrt{3}$	بەپێی i بنووسە

خاڵی چاودێری

1. هەر برەیەك بە پێی i بنووسە.

أ $\sqrt{-12}$ **ب** $2\sqrt{-36}$ **ج** $-\frac{1}{3}\sqrt{-63}$

نموونــــه 2 شیکارکردنی ئەو هاوکێشە دووجایانەی کە دوو ڕەگەکەی خەیاڵین

هاوکێشەکە شیکاربکە.

أ $x^2 = -81$

$x = \pm\sqrt{-81}$ ڕەگی دووجای هەردوولا وەربگرە

$x = \pm 9i$ بەپێی i بنووسە

پاسادانبکە

$x^2 =$	-81
$(9i)^2$	-81
$81i^2$	-81
$81(-1)$	-81 ✓

$x^2 =$	-81
$(-9i)^2$	-81
$81i^2$	-81
$81(-1)$	-81 ✓

ب $3x^2 + 75 = 0$

$3x^2 = -75$ بۆهەردوولا زیادبکە -75

$x^2 = -25$ هەردوولا دابەشی بکە

$x = \pm\sqrt{-25}$ ڕەگی دووجای هەردوولا وەربگرە

$x = \pm 5i$ بەپێی i بنووسە

پاسادانبکە

$3x^2 + 75 =$	0
$3(\pm 5i)^2 + 75$	0
$3(25)i^2 + 75$	0
$75(-1) + 75$	0 ✓



2. هاوکێشەکە شیکاربکە.

أ $x^2 + 36 = 0$ ب $x^2 + 48 = 0$ ج $9x^2 + 25 = 0$

ژمارەی ئاوێتە Complex Number

ژمارەیەکە دەتوانیت بەشێوەی $a + ib$ بینووسیت کاتێک a و b ژمارەی ڕاستی بن، $i = \sqrt{-1}$ کۆمەڵەی ژمارەی ڕاستییەکان R بەشێکە لە کۆمەڵەی ژمارە ئاوێتەکان C واتە $R \subseteq C$

ژمارە ئاوێتەکان C

$3 + 7i \quad 3 + \frac{2}{3}i \quad 4 - i$

ژمارە ڕاستییەکان (R): $-\frac{1}{2} \quad 1.73 \quad 0 \quad \pi \quad -9.6 \quad \sqrt{2}$

ژمارە خەیاڵییەکان: $i \quad 3i \quad -5i \quad \sqrt{-7}$

هەموو ژمارەیەکی ئاوێتە بەشێکی ڕاستی **Real Part** (a) و بەشێکی خەیاڵی **Imaginary Part** (b) هەیە.

بەشی ڕاستی ← a + bi → بەشی خەیاڵی

ژمارە ڕاستییەکان ژمارەیەکی ئاوێتەن کە بەشە خەیاڵییەکانیان سفرە. ژمارە خەیاڵییەکانیان ژمارەی ئاوێتەن کە بەشە ڕاستییەکانیان سفرە. بەشە خەیاڵییەکەیان سفر نییە. دوو ژمارەی ئاوێتە یەکسان دەبن ئەگەر بەشە ڕاستییەکانیان یەکسان بن و بەشە خەیاڵییەکانیان یەکسان بن.

نموونــــه 3 یەکسانبوونی دوو ژمارەی ئاوێتە

بەهای هەریەکە لە x و y بدۆزەوە بەمەرجێك ئەم یەکسانبوونە دروستبێت. $3x - 5i = 6 - (10y)i$

دوو بەشە ڕاستییەکە: $3x$ و 6

$$3x - 5i = 6 - (10y)i$$

دوو بەشە خەیاڵییەکە: $-5i$ و $-(10y)i$

$3x = 6$ دوو بەشە ڕاستییەکە یەکسان دەبن

$x = 2$

$-(10y) = -5$ دوو بەشە خەیاڵییەکە یەکسان دەبن

$y = \frac{1}{2}$



3. بەهای هەریەکە لە x و y بدۆزەوە بۆئەوەی یەکسانبوونەکە دروستبێت.

أ $2x-6i=-8+(20y)i$ ‌ ‌ ‌ ب $-8+(6y)i=5x-i\sqrt{6}$

نموونــــە 4 دۆزینەوەی سفرە ئاوێتەکانی نەخشە دووجاکان

هەردوو سفری نەخشە دووجاکە بدۆزەوە.

أ $f(x)=x^2-2x+5$

$x^2-2x+5=0$ هاوکێشەکە بنووسە

$x^2-2x+1=-5+1$ زیادبکە بۆ ئەوەی

$(x-1)^2=-4$ ببێت بەدووجای تەواو

$x-1=\pm\sqrt{-4}$ ڕەگی دووجا وەربگرە

$x=1\pm 2i$ سادەبکە

ب $g(x)=x^2+10x+35$

$x^2+10x+35=0$ هاوکێشەکە بنووسە

$x^2+10x+25=-35+25$ زیادبکە بۆ ئەوەی

$(x+5)^2=-10$ ببێت بەدووجای تەواو

$x+5=\pm\sqrt{-10}$ ڕەگی دووجا وەربگرە

$x=-5\pm i\sqrt{10}$ سادەبکە



4. هەردوو سفری نەخشە دووجاکە بدۆزەوە.

أ $f(x)=x^2+4x+13$ ‌ ‌ ‌ ب $g(x)=x^2-8x+18$

لە نموونەی 4ـ ب دا پەیوەندییەك هەیە هەردوو سفری نەخشەکە $-5+i\sqrt{10}$ و $-5-i\sqrt{10}$ بە یەکەوە دەبەستێت. ئەو دوو ژمارە ئاوێتەیە **ئاوەڵی یەکتردەبن**. بەشە ڕاستییەکانیان یەکسانن و بەشە خەیاڵییەکانیان دژە کۆی یەکتردەبن. **ژمارەی ئاوەڵ Conjugate Number** بۆ ژمارەی ئاوێتەی $a+bi$ بریتییە لە ژمارە ئاوێتەی $a-bi$ ئەگەر هەردوو ڕەگەکانی هاوکێشەیەکی دووجا هاوکۆڵکەکانیان ژمارەی ڕاستی بن و خۆیان راستی نەبوون ئەوا ڕەگەکانیان دوو ژمارەی ئاوێتەی ئاوەڵی یەکتردەبن.

ڕۆشنایی

ئەگەر هاوکۆڵکەکانی هاوکێشەیەکی دووجا ژمارەی ڕاستی بن، یەکێك لە ڕەگەکانیمان زانی و ژمارەی ئاوێتە بوو ئەوا ڕەگی دووەم دەبێتە ئاوەڵی ئەو ڕەگە.

نموونــــە 5 دۆزینەوەی ژمارەی ئاوەڵ بۆ ژمارەیەکی ئاوێتە

ئاوەڵی ئەم ژمارە ئاوێتانە بدۆزەوە.

أ $2i-15$

$-15+2i$ بەشێوەی $a+bi$ بنووسە

$-15-2i$ $a-bi$ بدۆزەوە

ب $-4i$

$0+(-4)i$ بەشێوەی $a+bi$ بنووسە

$0-(-4)i$ $a-bi$ بدۆزەوە

$4i$ سادەبکە



5. ئاوەڵی ئەم ژمارە ئاوێتانە بدۆزەوە.

أ $9-i$ ‌ ‌ ‌ ب $i+\sqrt{3}$ ‌ ‌ ‌ ج $-8i$

بیربکەوە و تاوتوێبکە

1. ئەگەر زانیت $3+i$ ڕەگێکی هاوکێشەیەکی دووجایە کە هاوکۆڵکەکانی ژمارەی ڕاستین چۆن ڕەگەکەی تر دەدۆزیەوە

2. ژمارە ئاوێتەی $a+bi$ بنووسە کاتێك $a\neq 0$ و $b=0$ پاشان ژمارە ئاوێتەی $a+bi$ بنووسە کاتێك $a=0$ و $b\neq 0$ وەڵامەکەت ڕوونبکەوە

3. ڕێکخەربە ئەم هێلکاریە درووستبکە و پاشان تەواوی بکە. لەهەر چوار چێوەیەکدا پێناسە و نموونەی گونجاو بنووسە.

ژمارە ئاوێتەکان

(ژمارە ئاوێتەکان) (ژمارە خەیاڵییەکان)



6-3 ڕاهێنانەکان

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

1 **زاراوەکان** ژمارە 7 بریتییە لە ـــــــــ لە ژمارەی $\sqrt{5}+7i$. (بەشی ڕاستی یان بەشی خەیاڵی).

بڕوانە نموونە 1 ژمارەکە بەپێی i بنووسە.

2 $5\sqrt{-100}$ **3** $\frac{1}{2}\sqrt{-16}$ **4** $-\sqrt{-32}$ **5** $\sqrt{-144}$

بڕوانە نموونە 2 هاوکێشەکە شیکاربکە.

6 $x^2=-9$ **7** $2x^2+72=0$ **8** $4x^2=-16$ **9** $x^2+121=0$

بڕوانە نموونە 3 بەهای x و y بدۆزەوە کە وادەکەن ئەم یەکسانییە دروست بێت.

10 $-2x+6i=(-24y)i-14$ **11** $-4+yi=-12x-i+8$

بڕوانە نموونە 4 سفرەکانی نەخشەکە بدۆزەوە.

12 $f(x)=x^2-12x+45$ **13** $g(x)=x^2+6x+34$

بڕوانە نموونە 5 ژمارەی ئاوەڵ بدۆزەوە.

14 $-9i$ **15** $\sqrt{5}+5i$ **16** $8i-3$ **17** $6+i\sqrt{2}$

ڕاهێنان و شیکارکردنی پرسیارەکان

ڕاهێنانی ئازاد	
بۆشیکارکردنی ڕاهێنانەکان	سەیری نموونە
21-18	1
25-22	2
27-26	3
31-28	4
35-32	5

ژمارەکە بەپێی i بنووسە.

18 $8\sqrt{-4}$ **19** $-\frac{1}{3}\sqrt{-90}$ **20** $6\sqrt{-12}$ **21** $\sqrt{-50}$

هاوکێشەکە شیکاربکە.

22 $x^2+49=0$ **23** $5x^2=-80$ **24** $3x^2+27=0$ **25** $\frac{1}{2}x^2=-32$

هەردوو بەهای x و y بدۆزەوە کە وادەکەن یەکسانیەکە دروست بێت.

26 $9x+yi-5=-12i+4$ **27** $5(x-1)+(3y)i=-15i-20$

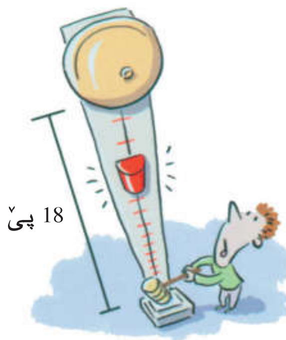
سفرەکانی نەخشەکە بدۆزەوە.

28 $f(x)=x^2+2x+3$ **29** $g(x)=4x^2-3x+1$

30 $f(x)=x^2+4x+8$ **31** $g(x)=3x^2-6x+10$

ژمارەی ئاوەڵ بدۆزەوە. پاشان هاوکێشە دووجاکە کە ڕەگەکانی ئەم ژمارەو ئاوەڵەکەیتی بنووسەوە:

32 i **33** $-\frac{\sqrt{3}}{2}-2i$ **34** $-2.5i+1$ **35** $\frac{i}{10}-1$



36 چی دەبێت ئەگەر؟ لە یەکێك لە یارییەکانی شاری یاری پێویستە یاریکەرەکە چەندی لەتوانادابێت سپرنگێك ڕابکێشێت بۆئەوەی گۆیە ئاسنەکە بە ئاراستەی زەنگەکە هەڵبدات. یاریکەرەکە یارییەکە دەباتەوە ئەگەر گۆیەکە بەر زەنگەکە بکەوێت، نەخشەی $d(t)=16t^2-32t+18$ نموونەی هەژمارکردنی دووریە d بەپێ لەنێوان گۆ و زەنگەکە بە پێی ژمارەی چرکەکان t لەو کاتەوە کە یاریکەرەکە لەتوانایدایە یارییەکە بباتەوە؟

ڕەگی دووەمی ئەو هاوکێشە بدۆزەوە کەهاوکۆلکەکانی ڕاستین ئەگەر بزانی ژمارە پێدراوەکە یەکێکە لەڕەگەکانی

37 $1+14i$ **38** $\frac{5}{7}i$ **39** $4i-2\sqrt{5}$

40 $-12-i$ **41** $9-i\sqrt{2}$ **42** $-\frac{17}{3}i$

هەردوو بەهای c و d بدۆزەوە کە وادەکەن یەکسانییەکە دروست بێت

43 $2ci+1=-d+6-ci$ **44** $c+3ci=4+di$ **45** $c^2+4i=d+di$

هاوکێشەکە شیکاربکە.

46 $8x^2=-8$ **47** $\frac{1}{3}x^2=-27$ **48** $2x^2+12.5=0$

49 $\frac{1}{2}x^2+72=0$ **50** $x^2=-30$ **51** $2x^2+16=0$

52 $x^2-4x+8=0$ **53** $x^2+10x+29=0$ **54** $x^2-12x+44=0$

55 $x^2+2x=-5$ **56** $x^2+18=-6x$ **57** $-149=x^2-24x$

ئەم دەستەواژانەی خوارەوە هەمیشە دروستن یان هەندێك جار دروست نین یان هەمیشە نادروستن.
ئەگەر هەندێك جار دروست بوون نموونەیەك بێنەوە پاڵپشتی وڵامەکەت بکات.

58 ژمارەیەکی ڕاستی، ژمارەیەکی خەیاڵییە.

59 ژمارەی خەیاڵی ژمارەیەکی ئاوێتەیە.

60 ژمارەی ڕێژەیی ژمارەیەکی ئاوێتەیە.

61 ژمارەی ئاوێتە ژمارەیەکی خەیاڵییە.

62 ژمارەیەکی ڕاستی، ژمارەیەکی ئاوێتەیە.

63 هاوکێشە دووجاکان ڕەگی ڕاستیان نیە.

64 هاوکێشەی دووجا ڕەگێکی ڕاستی و ڕەگێکی ئاوێتەی هەیە.

65 هاوکێشە دووجاکان ڕەگی ڕاستییان نیە.

سفرەکانی نەخشەکە بدۆزەوە.

66 $f(x)=x^2-10x+26$ **67** $g(x)=x^2+2x+17$ **68** $h(x)=x^2-10x+50$

69 $f(x)=x^2+16x+73$ **70** $g(x)=x^2-10x+37$ **71** $h(x)=x^2-16x+68$

72 بیری ڕەخنەگر ئایا دەتوانێت دوو سفری نەخشەی $f(x)=x^2+64$ بە ڕوونکردنەوەیی بدۆزیتەوە؟ وەڵامەکەت ڕوونبکەوە.

73 بیری ڕەخنەگر ئەو ژمارە ئاوێتەیەی ئاوەڵی ژمارەیەکی ڕاستیە چییە؟



74 بنووسە ئەو ڕێگایە چییە بەکاریدێنیت بۆ شیکارکردنی هاوکێشەیەکی دووجا کە ڕەگی ڕاستی نییە؟

75 یاریکەرێك تۆپێکی بۆ سەرەوە لێدا نەخشەی $h(t)=-4.9t^2+40t$ نموونەیە کە بۆهەژمارکردنی بەرزی تۆپەکە بە مەتر لەدوای t چرکە لەکاتی لێدانیدا.

أ گۆڕەپانەکە سەقفێکی بەتۆڕی هەبێت بەرزیەکەی 72 مەتر بێت هاوکێشەی $-4.9t^2+40t=85$ شیکاربکە.

ب پشتبەستن بەوەی لە پرسیاری (أ) دا دۆزیتەوە ئایا تۆپەکە دەگاتە تۆڕەکە؟ ئەوە ڕوونبکەوە.

ج بەرزترین بەرزی چەندەکە تۆپەکە دەتوانێت بیگاتێ. بەپشت بەستن بە نموونەکە؟

دەروازەیەك

مێژووی بیرکاری



زانای بیرکاری سویسری لیونارد ئۆلر *Euler* (1707–1783) یەکەم کەس بوو هێمای i بەکارهێنا بۆ $\sqrt{-1}$ وە $f(x)$ بەکارهێنا بۆ بەهای نەخشەی f کاتێك گۆڕاوی x گۆڕاوێکی ئازاد بێت.

76 کام لەمانە ئاوەڵی ژمارە ئاوێتەی $-2+i$ یە؟

أ) $2+i$ ب) $2-i$ ج) $i-2$ د) $-2-i$

77 کام لەمانە دەکاتە $\sqrt{-225}$ نوسراوە بەپێی i ؟

أ) $15i$ ب) $-15i$ ج) $i\sqrt{15}$ د) $-i\sqrt{15}$

78 کام لەمانە دوو سفری نەخشەی $f(x)=x^2-2x+17$ ؟

أ) $1\pm 4i$ ب) $4\pm i$ ج) $-1\pm 4i$ د) $-4\pm i$

79 کام بەها بۆ نەزانراوی c دا لەم یەکسانییە $3-4i-5=(9+ci)-11$ دروست بێت؟

أ) -2 ب) -4 ج) 2 د) 4

80 کام لەم هاوکێشانەی خوارەوە ئەم دوو رەگەی $-6i$ و $6i$ هەیە؟

أ) $-\frac{1}{6}x^2=6$ ب) $\frac{1}{4}x^2=9$ ج) $x^2-30=6$ د) $20-x^2=-16$

81 **کورتە وەڵام** جۆری شیکارەکانی ئەو هاوکێشانەی لەسەر شێوەی $x^2=a$ دەنوسرێت کاتێك $a>0$ و کاتێك $a<0$ روونبکەوە؟

بەرەنگاری و پەرەپێدان

82 ژمارە ئاوێتەی $a+bi$ بدۆزەوە کاتێك $5a+3b=1$ و $-5b=7+4a$.

83 ئایا دەگونجێت هاوکێشەیەکی دووجا یەك رەگی راستی هەبێت؟ یەك رەگی خەیاڵی هەبێت؟ یەك رەگی ئاوێتەی هەبێت؟

84 ئەنجامی هەر مەرجێك لەسەر شیکارکردنی هاوکێشەی $x^2+bx+c=0$ دیاریبکە.

أ) $b=0$ ب) $c\le 0$ ج) $c>0$

د) کام مەرجە وا لەبەشی خەیاڵی شیکارەکە دەکات یەکسان نەبێت بە سفر؟

پێداچوونەوەی لوولپێچی

ئەم ریزکراوانەی خوارەوە بەکاربێنە بۆ شیکاری پرسیارەکانی 85 تا 88 هەژماریان بکە ئەگەر توانرا (وانەی 3—2)

$$S=\begin{bmatrix}1 & -5\\ -2 & 0\end{bmatrix},\quad T=\begin{bmatrix}-4 & 1 & -2\\ 0 & -3 & 1\\ 2 & -2 & 2\end{bmatrix},\quad V=\begin{bmatrix}10 & 1\\ 0 & -1\\ -5 & 5\end{bmatrix}$$

85 T^2 **86** TV **87** ST **88** S^2

بۆهەر نەخشەیەك: أ) دیاریبکە ئایا وێنە رونکردنەوەییەکەی لەسەرەوە بۆ خوارەوە دەکرێتەوە. ب) تەوەرەی هاوجێبوونی وێنە رونکردنەوەییەکەی بدۆزەوە. ج) سەری وێنە رووونکردنەوەییەکەی بدۆزەوە. د) یەکتربڕەکەی لەگەڵ تەوەرەی دووەم بدۆزەوە و وێنە رونکردنەوەییەکەی بکێشە. (پۆلەکانی پێشوو)

89 $f(x)=\frac{1}{5}x^2+x-10$ **90** $f(x)=-x^2+3$

91 $f(x)=2x^2+4x-3$ **92** $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+3x+1$

هاوکێشەکە بەشیتەڵکردن شیکاربکە (پۆلەکانی پێشوو)

93 $x^2+5x=14$ **94** $6x^2=-x+2$ **95** $4x^2+9=15x$

96 $4x^2=1$ **97** $x^2+11x=-24$ **98** $x^2=-7x$

7-3 کردارەکان لەسەر ژمارە ئاوێتەکان

Operations With Complex Numbers

ئامانجەکان

• چوار کردارەکە لەسەر ژمارە ئاوێتەکان ئەنجام دەدات.

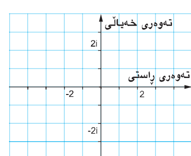
زاراوەکان
Vocabulary

ڕووتەختی ئاوێتە
Complexe plane

بەهای ڕووتی ژمارەی ئاوێتە
Absolute value of a complex number

بۆچی ئەمە فێردەبین؟

ژمارە ئاوێتەکان بەکاردەهێنرێن لەو ڕێسایانەی شێوە لەیەکبووەکان پێکدەهێنێت. (پرسیاری 84)



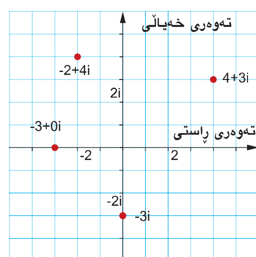
لەوانەکانی پێشوو ژمارە ڕاستییەکانت بە خاڵ لەسەر تەوەرەی ژمارەکان نواند. لەم وانەیەدا فێردەبیت چۆن ژمارە ئاوێتەکان لە ڕووتەختی پۆوتانەکاندا بە خاڵ بنوێنیت. **ڕووتەختی ئاوێتە Complex plane** ڕووتەختێکی پۆوتانە تەوەری یەکەمی کۆمەڵەی ژمارە ڕاستییەکان و تەوەری دووەمی ژمارە خەیاڵییەکان دەنوێنێت.

نموونــــــە 1 نواندنی ژمارەی ئاوێتە:

هەریەك لەم ژمارە ئاوێتانە بە ڕوونکردنەوەیی بنوێنە.

أ $-3+0i$ ج $4+3i$

ب $-3i$ د $-2+4i$



ڕۆشنایی

تەوەری ڕاستی تەوەری یەکەمە و تەوەری خەیاڵی تەوەری دووەمە. بیربکەوە لە نموونەی $a+bi$. کە بریتییە لە $x+iy$



1. هەریەك لەم ژمارە ئاوێتانە بە ڕوونکردنەوەیی بنوێنە.

أ $3+0i$ ب $2i$ ج $-2-i$ د $3+2i$

لەبیرت بێت کە بەهای ڕووتی ژمارەیەکی ڕاستی دەکاتە ئەو دووریەی دەکەوێتە نێوان ئەو خاڵەی کە ژمارە دەنوێنێت لەسەر تەوەرەی ژمارەکان و خاڵی بنەڕەت لەسەر هەمان تەوەرە. هەمان ڕێگا بەکاردەهێنین بۆ پێناسەی **بەهای ڕووتی ژمارەی ئاوێتە Absolute value** کە بریتییە لەو دوورییەی نێوان ئەو خاڵەی ژمارەکە دەینوێنێت لە ڕووتەختی ئاوێتەکە و خاڵی بنەڕەت لەو ڕووتەختەدا.



بەهای ڕووتی ژمارەی ئاوێتە

بەنووسین	بەجەبر	نموونە
بەهای ڕووتی ژمارەی ئاوێتەی $a+bi$ **Absolute value** دەکاتە دووری نێوان خاڵی (a, b) و خاڵی بنەڕەت لە ڕووتەختی پۆوتاندا. بەهای ڕووتی ژمارەی ئاوێتەی $a+bi$ بە شێوەی $\|a+bi\|$ دەنووسرێت.	$\|a+bi\|=\sqrt{a^2+b^2}$	$\|3+4i\|=\sqrt{3^2+4^2}$ $=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$

نموونــــه 2 هەژمارکردنی بەهای ڕووتی ژمارەی ئاوێتە

بەهای ڕووتی ئەم ژمارە ئاوێتانە هەژماربکە.

أ $|-9+i|$

$|-9+i|$

$\sqrt{(-9)^2+1^2}$

$\sqrt{81+1}=\sqrt{82}$

ب $|6|$

$|6+0i|$

$\sqrt{6^2+0^2}$

$\sqrt{36}=6$

ج $|-4i|$

$|0-4i|$

$\sqrt{0^2+4^2}$

$\sqrt{16}=4$



2. بەهای ڕووتی ئەم ژمارە ئاوێتانە هەژماربکە.

أ $1-2i$ ب $-\frac{1}{2}$ ج $23i$

کۆکردنەوە و لێدەرکردنی ژمارە ئاوێتەکان هاوشێوەی کۆکردنەوە و لێدەرکردنی ئەو برە جەبریانەیە کە چەند ڕادەیەکی هاوشێوەی تێدایە. بۆ کۆکردنەوەی ژمارە ئاوێتەکان بەشە ڕاستییەکان بەیەکەوە و بەشە خەیاڵییەکانیش بەیەکەوە کۆدەکرێنەوە.

کردارەکانی کۆکردنەوە و لێدەرکردن و لێکدان لە کۆمەڵەی ژمارە ئاوێتەکان هەمان سیفەتەکانی ئەو کردارانەیان هەیە لە کۆمەڵەی ژمارە ڕاستییەکان. بۆیە دەتوانیت سیفەتەکانی ئاڵوگۆڕ و یەکتربەستن و بەشینەوە بەکاربهێنیت بۆ نووسینی برە ئاوێتەکان بە سادەترین شێوە.

نموونــــه 3 کۆکردنەوە و لێدەرکردنی ژمارە ئاوێتەکان

کۆبکەوە یان دەربکە. ئەنجامەکە لەسەر شێوەی $a+bi$ بنووسە.

أ $(3-11i)+(-2+4i)$

$(3-2)+(-11i+4i)$ دووبەشە ڕاستیەکە بە جیاو دووبەشە خەیالیەکە بە جیا کۆبکەوە

$1-7i$

ب $(4-i)-(5+8i)$ بەشینەوە بکە

$(4-i)-5-8i$ هەردوو بەشە ڕاستیەکە کۆبکەوە

$(4-5)+(-i-8i)$ هەروەها دووبەشە خەیالیەکە

$-1-9i$

ج $(6-2i)+(-6+2i)$ دووبەشە ڕاستیەکە کۆبکەوە هەروەها

$(6-6)+(-2i+2i)$ دووبەشە خەیالیەکە.

$0+0i$

0

د $(10+3i)-(10-4i)$ بە شینەوەبکە

$(10+3i)-10-(-4i)$ دووبەشە ڕاستیەکە کۆبکەوە،

$(10-10)+(3i+4i)$ هەروەها دووبەشە خەیالیەکە

$0+7i=7i$

ڕۆشنایی

ژمارەی ئاوێتەی $a+bi$ دژە کۆیەکەی دەکاتە $-a-bi$



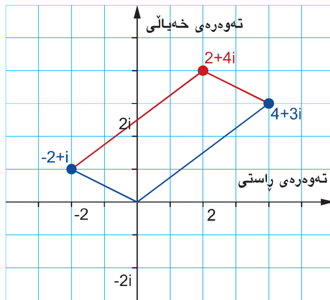
3. کۆبکەوە یان دەربکە. ئەنجامەکە بە شێوەی $a+bi$ بنووسە.

أ $(-3+5i)+(-6i)$ ب $2i-(3+5i)$ ج $(4+3i)+(4-3i)$

دەتوانیت ژمارە ئاوێتەکان کۆبکەیتەوە بە بەکارهێنانی ڕووتەختی پۆوتان.

نموونـــــه 4 کۆکردنەوەی ژمارە ئاوێتەکان لەسەر ڕووتەختی ئاوێتە

سەرجەمی $(4+3i)+(-2+i)$ بەڕوونکردنەوەیی بدۆزەوە.



هەنگاوی 1 هەردوو ژمارەی ئاوێتەی $4+3i$ و $-2+i$ لە ڕووتەختی ئاوێتەکەدا بەڕوونکردنەوەیی دیاریدەکەین. بە پارچە ڕاستەهێڵێك هەر خاڵێکیان دەگەیەنین بە خاڵی بنەڕەت.

هەنگاوی 2 لاتەریبەکە تەواوبکە. سەری چوارەمی لاتەریبەکە بریتییە لە کۆی دوو ژمارە ئاوێتەکە دەکاتە $2+4i$

کەواتە $(4+3i)+(-2+i)=2+4i$

ساغکردنەوە دوو ژمارە ئاوێتەکە کۆدەکەینەوە. بەشی ڕاستی بەیەکەوە و بەشە خەیاڵییەکانیش بەیەکەوە. $(4+3i)+(-2+i)=(4-2)+(3i+i)=2+4i$



4. بەڕوونکردنەوەیی هەژماربکە.

أ $(3+4i)+(1-3i)$ ب $(-4-i)+(2-2i)$

دەتوانیت ژمارە ئاوێتەکان لێکبدەیت بە بەکارهێنانی بەشینەوە. بە ڕەفتارکردن لەگەڵ بەشە خەیاڵییەکان وەك ڕادە لەیەکچووەکان. بە گۆڕینی i^2 بە ژمارە -1 لەهەر شوێنێکدا هەبوو.

نموونـــــه 5 لێکدانی ژمارە ئاوێتەکان

لێکبدە. ئەنجامەکە بە شێوەی $a+bi$ بنووسە.

أ $2i(3-5i)$

$6i-10i^2$

$6i-10(-1)$

$10+6i$

ب $(7+2i)(7-2i)$

$49-14i+14i-4i^2$

$49-4(-1)$

53

ج $(5-6i)(4-3i)$

$20-15i-24i+18i^2$

$20-39i+18(-1)$

$2-39i$

د $(6i)(6i)$

$36i^2$

$36(-1)$

-36



5. لێکبدە. ئەنجامەکە لەسەر شێوەی $a+bi$ بنووسە.

أ $2i(3-5i)$ ب $(4-4i)(6-i)$ ج $(3+2i)(3-2i)$

دەتوانیت هێزەکانی یەکەی خەیاڵی i بدۆزیتەوە. وەك چۆن لەم خشتەیەی خوارەوەدا ڕوونکراوەتەوە.

هێزەکانی ژمارە i		
$i^1=i$	$i^5=i^4\times i=1\times i=i$	$i^9=i$
$i^2=-1$	$i^6=i^4\times i^2=1\times(-1)=-1$	$i^{10}=-1$
$i^3=i^2\times i=(-1)\times i=-i$	$i^7=i^4\times i^3=1(-i)=-i$	$i^{11}=-i$
$i^4=i^2\times i^2=(-1)(-1)=1$	$i^8=i^4\times i^4=1\times 1=1$	$i^{12}=1$

ڕۆشنایی

سەرنج بدە ئەو شێوازەی دووبارەبوونەوە لەهەر ڕیزێك یارمەتیت دەدات بۆ هەژماری هەر هێزێك لە هێزەکانی ژمارە i کە بریتییە لە ژمارەکانی i ، -1 ، $-i$ ، 1

نموونــــــە 6 هەژماری هێزەکانی ژمارە i

أ $-3i^{12}$ بە سادەترین شێوە بنووسە.

$$-3i^{12} = -3\left(i^2\right)^6$$
$$= -3(-1)^6 = -3 \times 1 = -3$$

ب i^{25} بە سادەترین شێوە بنووسە.

$$i^{25} = i \times i^{24}$$
$$= i\left(i^2\right)^{12}$$
$$= i(-1)^{12} = i \times 1 = i$$

خاڵی چاودێری

6. ئەمانە بە سادەترین شێوە بنووسە.

أ $\frac{1}{2}i^7$ **ب** i^{42}

بیربکەوە ئەو بڕەی بە سادەترین شێوە دەینووسێت نابێت ژێرەکەی ڕەگی تێدابێت. لەبەرئەوەی i ڕەگێکی دووجایە بۆیە نووسینی بڕێکی ئاوێتە بە سادەترین شێوە پێویست دەکات ژێرەکەی ڕزگار بکەین لە i بە ڕێژەیی کردنی ژێرە. بە لێکدانی سەرە و ژێرە لە ئاوەڵی ئەو ژمارە ئاوێتەیەی کە لە ژێرە دایە.

نموونــــــە 7 دابەشکردنی ژمارە ئاوێتەکان

أ $\frac{3+7i}{8i}$ بە سادەترین شێوە بنووسە

$$\frac{3+7i}{8i} = \frac{3+7i}{8i} \times \left(\frac{-8i}{-8i}\right)$$
$$= \frac{-24i-56i^2}{-64i^2}$$
$$= \frac{-24i+56}{64}$$
$$= \frac{-3i+7}{8} = \frac{7}{8} - \frac{3}{8}i$$

ب $\frac{5+i}{2-4i}$ بە سادەترین شێوە بنووسە

$$\frac{5+i}{2-4i} = \frac{5+i}{2-4i} \times \left(\frac{2+4i}{2+4i}\right)$$
$$= \frac{10+20i+2i+4i^2}{4+8i-8i-16i^2}$$
$$= \frac{10+22i-4}{4+16}$$
$$= \frac{6+22i}{20} = \frac{3}{10} + \frac{11}{10}i$$

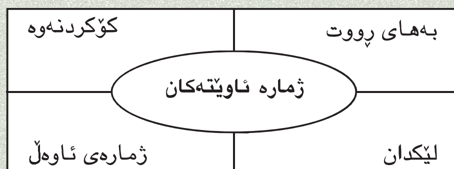
خاڵی چاودێری

7. ئەمانە بە سادەترین شێوە بنووسە.

أ $\frac{3+8i}{-i}$ **ب** $\frac{3-i}{2-i}$

بیربکەوە و تاوتوێبکە

1. ڕوونیبکەوە کەی ژمارەی ئاوێتەی $a+bi$ و ئاوەڵەکەی یەکسان دەبن؟
2. ئەنجامی لێکدانی $(a+bi)(c+di)$ بدۆزەوە بەشی ڕاستی و خەیاڵی ئەنجامەکەی دیاریبکە.
3. ڕێکخەرە ئەم هێڵکارییە دروست بکە و پاشان تەواوی بکە. لەهەر چوارچێوەیەکدا نموونەیەکی گونجاو دابنێ.





7–3 ڕاهێنانەکان

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

1 زاراوەکان لە ڕووتەختی ئاوێتە دا تەوەری یەکەم ژمارەی ______ دەنوێنێت، بەڵام تەوەری دووەم ژمارەی ______ دەنوێنێت. (ڕاستی، ڕێژەیی، خەیاڵی).

بڕوانە نموونە 1

ئەم ژمارە ئاوێتەیە بە ڕوونکردنەوەیی بنوێنە.

2 4 **3** $-i$ **4** $3+2i$ **5** $-2-3i$

بڕوانە نموونە 2

بەهای ڕووت بدۆزەوە.

6 $|4-5i|$ **7** $|-33.3|$ **8** $|-9i|$ **9** $|5+12i|$ **10** $|-1+i|$ **11** $|15i|$

بڕوانە نموونە 3

کۆبکەوە یان لێدەربکە. ئەنجامەکە بە شێوەی $a+bi$ بنووسە.

12 $(2+5i)+(-2+5i)$ **13** $(-1-8i)+(4+3i)$

14 $(1-3i)-(7+i)$ **15** $(4-8i)+(-13+23i)$

16 $(6+17i)-(18-9i)$ **17** $(-30+i)-(-2+20i)$

بڕوانە نموونە 4

بە ڕوونکردنەوەیی سەرجەم بدۆزەوە.

18 $(3+4i)+(-2-4i)$ **19** $(-2-5i)+(-1+4i)$ **20** $(-4-4i)+(4+2i)$

بڕوانە نموونە 5

لێکبدە. ئەنجامەکە بە شێوەی $a+ib$ بنووسە.

21 $(1-2i)(1+2i)$ **22** $3i(5+2i)$ **23** $(9+i)(4-i)$

24 $(6+8i)(5-4i)$ **25** $(3+i)^2$ **26** $(-4-5i)(2+10i)$

بڕوانە نموونە 6

ئەمانە بە سادەترین شێوە بنووسە.

27 $-i^9$ **28** $2i^{15}$ **29** i^{30}

بڕوانە نموونە 7

دابەشبکە. ئەنجامەکە بە شێوەی $a+ib$ بنووسە.

30 $\frac{5-4i}{i}$ **31** $\frac{11-5i}{2-4i}$ **32** $\frac{8+2i}{5+i}$

33 $\frac{17}{4+i}$ **34** $\frac{45-3i}{7-8i}$ **35** $\frac{-3-12i}{6i}$

ڕاهێنان و شکیارکردنی پرسیارەکان

ئەم ژمارە ئاوێتانە بە ڕوونکردنەوەیی بنوێنە.

36 -3 **37** $-2.5i$ **38** $i+1$ **39** $4-3i$

بەهای ڕووت بدۆزەوە.

40 $|2+3i|$ **41** $|-18|$ **42** $\left|\frac{4}{5}i\right|$ **43** $|6-8i|$ **44** $|-0.5i|$ **45** $|10-4i|$

ڕاهێنانی ئازاد

بۆشیکارکردنی پرسیارەکان	تەماشای نموونە
39–36	1
45–40	2
51–46	3
54–52	4
60–55	5
63–61	6
69–64	7

کۆبکەوە یان دەربکە. ئەنجامەکە بە شێوەی $a+bi$ بنووسە.

46 $(8-9i)-(-2-i)$ **47** $4i-(11-3i)$ **48** $(4-2i)+(-9-5i)$

49 $(13+6i)+(15+35i)$ **50** $(3-i)-(-3+i)$ **51** $-16+(12+9i)$

سەرجەم بە ڕوونکردنەوەیی بدۆزەوە.

52 $(4+i)+(-3i)$ **53** $(5+4i)+(-1+2i)$ **54** $(-3-3i)+(4-3i)$

لێکبدە. ئەنجامەکە بەشێوەی $a+ib$ بنوسە.

55 $-12i(-1+4i)$ **56** $(3-5i)(2+9i)$ **57** $(7+2i)(7-2i)$

58 $(5+6i)^2$ **59** $(7-5i)(-3+9i)$ **60** $-4(8+12i)$

بە سادەترین شێوە بنووسە.

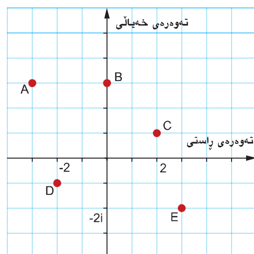
61 i^{27} **62** $-i^{11}$ **63** $5i^{10}$

دابەشبکە. ئەنجامەکە بە شێوەی $a+ib$ بنووسە.

64 $\frac{2-3i}{i}$ **65** $\frac{5-2i}{3+i}$ **66** $\frac{3}{-1-5i}$

67 $\frac{19+9i}{5+i}$ **68** $\frac{8+4i}{7+i}$ **69** $\frac{6+3i}{2-2i}$

ئەو ژمارە ئاوێتەیە بنووسە کە خاڵەکە دەینوێنێت.



70 A **71** B **72** C **73** D **74** E

بەهای ڕووتی ژمارە ئاوێتەکە بدۆزەوە.

75 $\frac{3}{2}-\frac{1}{2}i$ **76** $7i$ **77** $2\sqrt{2}-i\sqrt{3}$ **78** $-1-8i$

دەروازەیەک

شێوە لەیەکبووەکان



شێوەی لەیەکبووەکان Fractal شێوەیەکە یەک لەیەکتری پەیدادەبن لەسەر هەمان شێواز واتە بەشەکانی شێوەکە هاوشێوەی شێوە گشتییەکەیە. لە سروشتدا وێنە لەیەکبووەکان زۆرن وەک دەماری گەڵاکانی درەختێك کلوە بەفرەکانی بەدوای یەکدا دەبارن. زاناکان شێوە لەیەکبووەکان بەکاردەهێنن بۆ دروستکردنی نموونە لەم چەشنانە.

79 **شێوە لەیەکبووەکان Fractals** شێوە لەیەکبووەکان شێوازێکن لە بەکارهێنانی ژمارە ئاوێتەکان و دووبارەکردنەوەی یاسا بیرکارییەکان پەیدادەبن. ژمارەی یەکەم لە یاساکەدا لە جیاتیبکە پاشان ئەنجامەکە بدۆزەوە. ئەنجامەکە جارێکی تر لە یاساکەدا لە جیاتی بکەوە . . . و هەروەها دەتوانرێت هەر ژمارەیەکی ئاوێتە کە لەم کردارە دووبارەبووەیە دەستمان دەکەوێت بەکاربهێنرێت بۆ دیاریکردنی ڕەنگی بیکسل (یان خاڵ) لەسەر شاشەی بژمێرەکە، وێنەی بەرامبەر نموونەیەك ڕووندەکاتەوە لەوەی دەستمان دەکەوێت. زۆر لە شێوازەکانی شێوە لە یەکبووەکان پشت دەبەستن بە یاسای کۆمەڵەی جولیا Julia کە بریتیە لە $Z_{n+1}=(Z_n)^2+c$ کاتێك c ژمارەیەکی نەگۆڕبێت، یاسای کۆمەڵەی جولیا بەکاربێنە کاتێك $c=0.25$



أ Z_2 هەژماربکە ئەگەر بزانیت $Z_1=0.5+0.6i$

ب Z_3 هەژماربکە بە بەکارهێنانی ژمارەی Z_2 کە لە لقی أ دۆزیتەوە.

ج Z_4 هەژماربکە بە بەکارهێنانی ژمارەی Z_3 کە لە لقی ب دۆزیتەوە.

دوای سادەکردن بڕە ئاوێتەکە بە شێوەی $a+ib$ بنووسە.

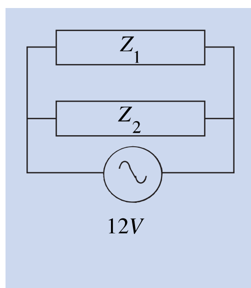
80 $6i-(4+5i)$ **81** $(-2.3+i)-(7.5-0.3i)$ **82** $(6-5i)^2$

83 $(-2-3i)^2$ **84** $(5+7i)(5-7i)$ **85** $(2-i)(2+i)(2-i)$

86 $3-i^{11}$ **87** $i^{52}-i^{48}$ **88** $i^{35}-i^{24}+i^{18}$

89 $\frac{12+i}{i}$ **90** $\frac{18-3i}{i}$ **91** $\frac{4+2i}{6+i}$

92 $\frac{1+i}{-2+4i}$ **93** $\frac{4}{2-3i}$ **94** $\frac{6}{\sqrt{2}-i}$



هەنگاوی جۆراوجۆر تەوژمی کارەبا کاتێك بە تەنێکی دیاریکراودا دەڕوات ڕووبەڕووی بەرگرییەك دەبێتەوە کە بەئۆم دەپێورێت. ئەندازیارە کارەباییەکان بینیان کە ئەم بەرگرییە بە Z دەردەبڕێت، بە بەکارهێنانی ژمارە ئاوێتەکان زانایانی فیزیا وای دادەنێن کە ئەم بەرگرییە گشتییە بۆ سوڕێکی کارەبایی پێکدێت لە دوو سووڕی هاوڕێك بەرگرییەکانیان Z_1 و Z_2 ن هاوتای بەرگری سووڕێکی کارەباییە. کە بەرگریەکەی $Z_{eq}=\frac{Z_1Z_2}{Z_1+Z_2}$

95 بەرگری گشتی سووڕە کارەباییەکە بدۆزەوە کە لەدوو سووڕی هاوڕێك پێکهاتوون بەرگرییەکەیان $Z_1=3+2i$ و بەرگری دووەمیان $Z_2=1-2i$

96 بەرگری گشتی سووڕە کارەباییەکە بدۆزەوە کە لەدوو سووڕی هاوڕێك پێکهاتوون بەرگری یەکەمیان $Z_1=2+2i$ و بەرگری دووەمیان $Z_2=4-i$

ڕوونیبکەوە دەستەواژەکە هەمیشە دروستە یان هەندێك جار دروستە یان هەمیشە نادروستە. ئەگەر دەستەواژەکە هەندێك جار نادروست بوو نمونەیەك بهێنەوە لەسەر بارێك کەتێیدا دروست بێت، نموونەیەکی تر لەسەر ئەو بارەی کە تێیدا نادروستە. ئەگەر دەستەواژەکە هەمیشە نادروست بوو نموونەیەك بهێنەوە هەمیشە نادروست بێت بۆ پاڵپشتی وەڵامەکەت.

97 سەرجەمی هەر ژمارەیەکی ئاوێتە $a+bi$ و ئاوەڵەکەی ژمارەیەکی ڕاستییە.

98 جیاوازی نێوان ژمارەیەکی ئاوێتە $a+bi$ $(b\neq 0)$ و ئاوەڵەکەی ژمارەیەکی ڕاستییە.

99 ئەنجامی لێکدانی ژمارەیەکی ئاوێتە $a+bi$ $(b\neq 0)$ لە ئاوەڵەکەی ژمارەیەکی ڕاستی موجەبە.

100 ئەنجامی لێکدانی ژمارەیەکی خەیاڵی bi $(b\neq 0)$ لە یەکێکی تر di $(d\neq 0)$ ژمارەیەکی ڕاستی موجەبە.

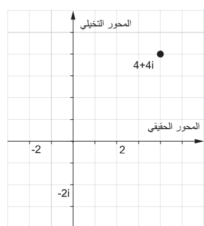
101 **هەڵە لە شیکردنەوە** ئەمەی خوارەوە دوو هەوڵدانە بۆ نووسینی ژمارە ئاوێتەی $\frac{3}{2+i}$ بە سادەترین شێوە. کام هەوڵیان هەڵەیە؟ هەڵەکە ڕوونبکەوە.

أ
$$\frac{3}{2+i}=\frac{3}{2+i}\times\frac{(2+i)}{(2+i)}=\frac{6+3i}{4+i^2}=\frac{6+3i}{3}=2+i$$

ب
$$\frac{3}{2+i}=\frac{3}{2+i}\times\frac{(2-i)}{(2-i)}=\frac{6-3i}{4-i^2}=\frac{6-3i}{5}$$

102 **بیری ڕەخنەگر** بۆچی بەهای ڕووتی ژمارەی ئاوێتە یەکسانە بە بەهای ڕووتی ئاوەڵەکەی؟ نواندنی ڕوونکردنەوەیی بەکاربێنە بۆ ڕوونکردنەوەی وەڵامەکەت.

103 **بنوسە** لە پەیوەندی نێوان جیاوازی نێوان دوو دووجا و $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ و ئەنجامی لێکدانی ژمارەیەکی ئاوێتە و ئاوەڵەکە بکۆڵەوە.

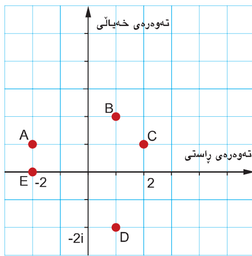


104 فێربوویت چۆن دوو ژمارەی ئاوێتە بە ڕوونکردنەوەیی کۆبکەیتەوە.

أ سێ جووت ژمارەی ئاوێتە بدۆزەوە کەسەرجەمی هەرجوتێك بکاتە $4+4i$

ب کرداری کۆکردنەوەی هەریەکەیان لەهەمان ڕووتەختی ئاوێتە بەڕوونکردنەوەیی بنوێنە.

ج ئەوەی دەستتکەوتووە باسیبکە.



وێنەی ڕوونکردنەوەیی بەرامبەر بەکاربێنە بۆ شیکارکردنی پرسیارەکانی 105 و 106.

105 کام خاڵ لە وێنەکە ژمارەی ئاوێتەی $1-2i$ دەنوێنێت.

أ) خاڵی A ب) خاڵی B ج) خاڵی C د) خاڵی D

106 ئەو ژمارە ئاوێتەیەی کە خاڵی E دەینوێنێت کامەیە.

أ) -2 ب) 2 ج) $-2i$ د) $2i$

107 کام لەم ژمارە ئاوێتانەی خوارەوە سادەترین شێوەی بڕی $(2-5i)-(2+5i)$ ـە؟

أ) $10i$ ب) $4+10i$ ج) $-10i$ د) $4-10i$

108 کام لەم ژمارە ئاوێتانەی خوارەوە سادەترین شێوەی بڕی $(-5+3i)^2$ ـە؟

أ) $16-15i$ ب) $16-30i$ ج) $34-15i$ د) $34-30i$

بەرەنگاری و فراوانکردن

109 ئەوەی فێری بوویت لە هێزەکانی یەکەی خەیاڵی i بەکاربێنە بۆ شیکاری ئەم پرسیارە.

أ) ئەم خشتەیەی خوارەوە تەواوبکە و شێوازێك پوختەبکە.

$i^{-5}=$ ▢	$i^{-4}=$ ▢	$i^{-3}=$ ▢	$i^{-2}=$ ▢	$i^{-1}=$ ▢	$i^{0}=$ ▢	$i^{1}=$ ▢

ب) ئەو شێوازەی دەستتکەوتووە پەیوەندی بە هێزەکانی توانی سالبی یەکەی خەیاڵی i ەوە هەیە ڕوونبکەوە. ئەو بەهایانەی کە لەتوانادایە ئەم هێزانە وەریبگرن چین؟

ج) i^{-12} و i^{-37} و i^{-90} بەسادەترین شێوە بنووسە.

شێوەی گشتی ئەنجامی هەریەکە لەم دووکردارەی خوارەوەی سەر ژمارە ئاوێتەکە بنووسە:

110 $(a+bi)(c+di)$ **111** $\frac{a+bi}{c+di}$

پێداچوونەوەی لوولپێچی

112 پارە ئەم خشتەیەی خوارەوە خەرجی هەفتانەی خواردنی بەیانیانی دڵسۆز دەنوێنێت لەماوەی هەفتەدا. پێدراوەکان بە ڕوونکردنەوەیی بنوێنە ڕاستەهێڵی نزیکترین نواندن بۆئەم خاڵانە بکێشە و هاوکێشەکەی بنووسە. (وانەکە)

ژمارەی ژەمەکان	5	7	3	5	6	2	4	5
تێچوون بەهەزاران دینار	10	13	8	9	8	5	10	11

لاسەنگەکە بە جەبری شیکاربکە.

113 $3x^2-6x\le 0$ **114** $10<x^2-4x-11$

115 $-6\ge 2x^2+7x-21$ **116** $3-x^2<7-5x$

دیاریبکە ئەم نەخشانە نەخشەیەکی دووجا دەنوێنن یان نا ڕوونیبکەوە.

117

x	−2	−1	0	1
y	5	−1	−3	−1

118

x	0	2	4	6
y	18	10	2	-6

بەشی 3

ڕێبەری خوێندن: پێداچوونەوە

$Q=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 4 & 5\end{bmatrix}$ ، $P=\begin{bmatrix}3 & -5 & 2\\ -4 & 1 & 3\end{bmatrix}$

$R=\begin{bmatrix}6 & -8 & 4\\ -10 & 2 & 4\end{bmatrix}$

بڕەکە بدۆزەوە ئەگەر توانرا.

1 $P-2Q$ **2** $0.2Q$

3 $\frac{1}{2}R-\frac{1}{3}P$ **4** $\frac{1}{2}(2P+R)$

پێدراوەکانی خوارەوە بەکاربهێنە بۆ شیکارکردنی پرسیاری 5 تا 7

لە هەڵمەتی پاککردنەوەی سەیرانگایەك خوێندکارانی پۆلی یازدەهەم 125 قووتوی ساردی و 45 کارتۆنیان کۆکردەوە. خوێندکارانی پۆلی دە 95 قووتوی ساردی و 65 کارتۆنیان کۆکردەوە.

5 ڕیزکراوەی A بەکاربێنە بۆ پیشاندانی پێدراوەکانی سەرەوە

6 ڕیزکراوەی D بنووسە جیاوازی کۆکردنەوەی هەردوو پۆلەکە دەربخا

7 لە ڕۆژی داهاتودا هەرپۆلێك دووئەوەندەی لەهەر جۆرێکی ڕۆژی یەکەم کۆکردەوە. ڕیزکراوەیەك بنووسە ئەمە ڕونبکاتەوە.

$C=\begin{bmatrix}4 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 1\\ -1 & 1 & 3\end{bmatrix}$ ، $B=\begin{bmatrix}0 & 1 & 3\\ -2 & -1 & 4\end{bmatrix}$ ، $A=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 0 & -2\\ -3 & 1\end{bmatrix}$

بڕەکە بدۆزەوە ئەگەر پێناسەکراوبوو.

8 AB **9** CA **10** AC **11** BC

12 A^2 **13** C^2 **14** $(BA)^2$

15 ئەم دوو خشتەیەی خوارەوە نرخی بلیتەکان بە دینار فرۆشراوەکانی سێ ڕۆژ ڕووندەکاتەوە.

نرخی بلیتەکان		
	گەورە	منداڵ
سێشەممە	5 000	2 500
چوارشەممە	7 500	4 250
پێنجشەممە	9 000	5 750

بلیتە فرۆشراوەکان			
	سێشەممە	چوارشەممە	پێنجشەممە
گەورە	67	196	245
منداڵ	104	75	154

أ پێدراوەکانی هەر خشتەیەك لەڕیزکراوەیەك ڕێکبخە.

ب لێکدانی ڕیزکراوەکان بەکاربێنە بۆدۆزینەوەی داهاتی ڕۆژانە.

ج داهاتی ڕۆژانەی فرۆشتنی بلیتی گەورە و فرۆشتنی بلیتی منداڵان بدۆزەوە.

ڕیزکراوەکان بەکاربێنە بۆدۆزینەوەی وێنەی چوارلای $A(-2, -1)$ ، $B(-1, 3)$ ، $C(2, 4)$ ، $D(0, 0)$ بەپێی ئەم جێگۆڕکێیانە:

16 ڕاکێشانی 2 یەکە بۆلای ڕاست و یەك یەکە بۆسەرەوە

17 گەورەکردنی چوارلایەکە بە هاوکۆلکەی 1.5

18 بە بەکارهێنانی ڕیزکراوەی $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$ باسی جێگۆڕکێکە بکە

19 بە بەکارهێنانی ڕیزکراوەی $\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$ باسی جێگۆڕکێکە بکە

20 ڕیزکراوەی $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$ بەکاربێنە بۆ جێگۆڕکێی سێگۆشەی $A(-1, -2)$ ، $B(0, 1)$ ، $C(3, -2)$ وێنەی سێگۆشەکە و وێنەی شێوەکەی بکێشە. جۆری جێگۆڕکێکە دیاربکە.

سنوردەری ڕیزکراوەکە بدۆزەوە.

21 $\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ **22** $\begin{bmatrix}3 & 2\\ 6 & 4\end{bmatrix}$

23 $\begin{bmatrix}-0.5 & 3\\ -1 & 6\end{bmatrix}$ **24** $\begin{bmatrix}4 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 1\\ -1 & 1 & 3\end{bmatrix}$

25 $\begin{bmatrix}2 & 3 & -1\\ -1 & 5 & 3\\ 3 & -1 & -6\end{bmatrix}$ **26** $\begin{bmatrix}3 & 2 & -1\\ 5 & -3 & 2\\ 9 & -13 & 8\end{bmatrix}$

ڕێسای کرامەر بەکاربێنە بۆ شیکارکردنی هەر سیستمێکی هێڵی.

27 $\begin{cases}x+y=9\\ x-y=1\end{cases}$ **28** $\begin{cases}2x+5y+21=0\\ 7y+47=6x\end{cases}$

29 $\begin{cases}4.5x+3y=10.5\\ 3x+2y=7\end{cases}$ **30** $\begin{cases}5x-8y=7+7z\\ 6x-4y+10z=-34\\ 2x+4y=29+3z\end{cases}$

31 $\begin{cases}x-y+z=5\\ y-x-z=2\\ x-y+z=7\end{cases}$ **32** $\begin{cases}y-2.4x=0.8\\ 3x+0.5z=2.25\\ 3.5y+z=8.5\end{cases}$

33 خاڵی یەکتربڕینی دووڕاستەهێڵی $2x+3y=8$ و $y=x+1$ بدۆزەوە

أ ڕیزکراوەی هاوکۆلکەکان بنووسە سنوردەرەکەی هەژماربکە

ب سیستمەکە شیکاربکە بە بەکارهێنانی ڕیسای گرامر

هەڵگەڕاوەی ڕیزکراوەکە بدۆزەوە.

34 $\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

35 $\begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{2}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$

36 $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2.5 \end{bmatrix}$

37 $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

38 $\begin{bmatrix} -1.5 & 1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0.5 \end{bmatrix}$

39 $\begin{bmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & -1 \end{bmatrix}$

سیستمە هێڵییەکە بە بەکارهێنانی ڕیزکراوەکان بنووسە.
پاشان شیکاریان بکە.

40 $\begin{cases} \frac{3}{2}x = 20+y \\ x+6y=80 \end{cases}$

41 $\begin{cases} x=1+y \\ x+y=9 \end{cases}$

42 $\begin{cases} 2x+9=2z \\ 5x+y+32=7z \\ 2(3x+y)=8z-39 \end{cases}$

43 $\begin{cases} 2x+9=2z \\ 5x+y+32=7z \\ 2(3x+y)=8z-39 \end{cases}$

44 دوکانێکی فرۆشتنی دیارییەکان دیاری بۆ کڕیارەکانی پێشکەش دەکات. دیارییەکی بچووک کە نرخەکەی 5000 دینارە دەدات بەو کڕیارەی کە بەهای کڕینەکانی لە نێوان 25 000 دینار و 74 999 دینار دایە. دیارییەکی مام ناوەندی 8 000 دیناری دەدات بەو کڕیارەی کە بەهای کڕینەکانی لەنێوان 75 000 و 149 999 دینارە دیاریەکی گەورە کە بەهای 12 500 دینارە پێشکەش بەو کڕیارە دەکات کە بەهای کڕینەکەی لە 150 000 دینار کەمتر نەبێت. دوکانەکە دیاری پێشکەش کرد کە بەهایان گەیشتە 102 دینار. ژمارەی دیارییە بچووکەکان 6 ئەوەندی ژمارەی دیارییە گەورەکان بوو.

أ سیستمی هاوکێشەکان بنووسە ئەم پرسیارە دەرببڕێت.

ب ڕێسای گرامەر بەکاربێنە بۆ شیکاری سیستمەکە و دیاریکردنی ژمارەی دیارییەکان لەهەر جۆرێک.

هاوکێشەکە شیکاربکە.

45 $x^2=-81$

46 $6x^2+150=0$

47 $x^2+6x+10=0$

48 $x^2+12x+45=0$

49 $x^2-14x+75=0$

50 $x^2-22x+133=0$

ئاوەڵی ژمارە ئاوێتەکە بدۆزەوە.

51 $5i-4$

52 $3+i\sqrt{5}$

بەهای ڕووت هەژماربکە.

53 $|-3i|$

54 $|4-2i|$

55 $|12-16i|$

56 $|7i|$

بڕەکە لەسەر شێوەی $a+bi$ بنووسە.

57 $(1+5i)+(6-i)$

58 $(9+4i)-(3+2i)$

59 $(5-i)-(11-i)$

60 $-5i(3-4i)$

61 $(5-2i)(6+8i)$

62 $(3+2i)(3-2i)$

63 $(4+i)(1-5i)$

64 $(-7+4i)(3+9i)$

65 i^{32}

66 $-5i^{21}$

67 $\frac{2+9i}{-2i}$

68 $\frac{5+2i}{3-4i}$

69 $\frac{-12+26i}{2+4i}$

70 $\frac{8-4i}{1+i}$

بەشی 3

تاقیکردنەوەی بەش

پێدراوەکانی خشتەکە بەکاربێنە بۆشیکارکردنی پرسیاری 1 تا 4

	خەڵاتەکان			
	پلەی یەکەم	پلەی دووەم	پلەی سێیەم	کۆی خاڵەکان
ڤیان	5	1	2	41
شاناز	3	5	1	42
شیرین	3	1	4	29

1 ڕیزکراوەیەك بەکاربێنە پێدراوەکانی خشتەکە دەربخات

2 جۆری ڕیزکراوەکە چییە؟

3 بەهای دانەی a_{31} چەندە؟

4 ناونیشانی ئەو دانەیەی بەهایەکەی 2 چەندە؟

ڕیزکراوەکان لە پرسیاری 5 تا 10 بەکاربێنە ئەنجامەکان هەژماربکە ئەگەر توانرا.

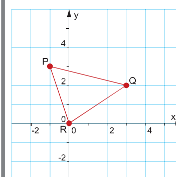
$$E=\begin{bmatrix}2&3\\-1&0\\4&1\end{bmatrix},\ F=\begin{bmatrix}4&-2&0\\-1&1&-2\end{bmatrix},\ G=\begin{bmatrix}2&-1\\3&1\end{bmatrix}$$

$$H=\begin{bmatrix}-2&1\\3&0\\5&-1\end{bmatrix},\ J=\begin{bmatrix}1&-5&6\end{bmatrix},\ K=\begin{bmatrix}7\\0\\-2\end{bmatrix}$$

5 $E+F$ **6** EF **7** FE

8 H^2 **9** G^3 **10** FK

ڕیزکراوە بەکاربێنە بۆ جێگۆڕکێی سێگۆشەی PQR بە جێگۆڕکێی دیاریکراو (جێگۆڕکێی سنوردار).



11 ڕاکێشانی دوو یەکە بۆ سەرەوە یەك یەکە بۆلای ڕاست.

12 گەورەکردنێك بە هاوکۆلکەی $\frac{3}{2}$

13 جێگۆڕکێکردن بە $\begin{bmatrix}0&2\\2&0\end{bmatrix}$ ڕیزکراوەی و وێنەکەی باسبکە.

سنووردەری ڕیزکراوەکە بدۆزەوە.

14 $\begin{bmatrix}4&0\\0&-3\end{bmatrix}$ **15** $\begin{bmatrix}0.25&1\\2&8\end{bmatrix}$

16 $\begin{bmatrix}3&-1\\-2&-1\end{bmatrix}$ **17** $\begin{bmatrix}1&-2&3\\3&-1&-3\\2&1&5\end{bmatrix}$

سیستمەکە بە ڕێسای کرامەر شیکاربکە.

18 $\begin{cases}x+2y=1\\3x-y=10\end{cases}$ **19** $\begin{cases}x+3z=3+2y\\3x+22=y+3z\\2x+y+5z=8\end{cases}$

ئەگەر توانرا هەڵگەڕاوەی ڕیزکراوەکە بدۆزەوە.

20 $\begin{bmatrix}2&0.7\\4&1.4\end{bmatrix}$ **21** $\begin{bmatrix}3&-1\\1&3\end{bmatrix}$

22 $\begin{bmatrix}3&1\\2&-1\end{bmatrix}$ **23** $\begin{bmatrix}3&2&-1\\2&3&-5\\1&4&2\end{bmatrix}$

24 نرخی $2.5\,kg$ هەنجیر و $1.5\,kg$ خورما 14 420 دینارە نرخی $3.5\,kg$ هەنجیر و $1\ kg$ خورما 16 910 دینارە ڕیزکراوەکان بەکاربێنە بۆ دۆزینەوەی نرخی $1\ kg$ لەهەر جۆرێکیان.

سیستمە هێڵییەکان بەشێوەی ڕیزکراوە بنووسە، پاشان شیکاریان بکە.

25 $\begin{cases}6x+y=2\\3x-2y+1=0\end{cases}$ **26** $\begin{cases}5x-2y=3\\2.5x-y=1.5\end{cases}$

27 $\begin{cases}x+2y=3.5\\3x=2.7+y\end{cases}$ **28** $\begin{cases}2x-z=3+y\\x+2=y+5\\4z+x+y=1\end{cases}$

بڕەکەی بەشێوەی $a+bi$ بنووسە.

29 $(1-2i)-(5+2i)$ **30** $(6-2i)(2-2i)$

31 $-2i^{18}$ **32** $\frac{1-8i}{4i}$

هاوکێشەکە شیکاربکە.

33 $x^2+25=0$ **34** $x^2+12x=-40$

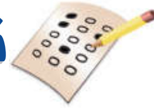
35 $(x-1)^2+7=0$ **36** $2x^2-x+5=0$

ئاوەڵی ژمارە ئاوێتەکە بدۆزەوە.

37 $5+3i$ **38** $6-7i$ **39** $-2+i\sqrt{2}$

بەشی 3

تاقیکردنەوەی کەڵەکەبوو



1 تەمەنی هیوا دووساڵ کەمترە لە چوارئەوەندی تەمەنی هێرش، تەمەنی سەردار 6 ساڵ زیاترە لەنیوەی تەمەنی هیوا. هێمای x بۆتەمەنی هێرش و هێمای y بۆتەمەنی هیوا دابنێ. کام لەم بڕانە تەمەنی سەردار دەنوێنێت؟

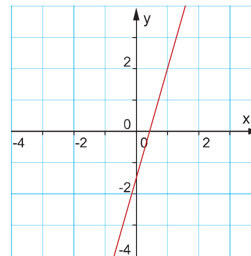
(أ) $\frac{1}{2}x+6$

(ب) $2x+5$

(ج) $4x+\frac{1}{2}y+4$

(د) $\frac{1}{2}(4x+2)-6$

2 وێنە رووونکردنەوەییەکە راستەهێڵێك دەردەخات کە هێڵی سنووری ناوچە شیکاری لاسەنگەیەکی هێڵییە، ئەم دوو جووتە رێکخراوە$(21, 83)$ و$(16, 62)$ سەربە کۆمەڵە شیکارەکەی نین. کام لەمانە دروستە؟



(أ) هێڵی سنوور پێویستە خاڵخاڵ بێت، ناوچەی سەرەوەی هێڵەکە رەنگکراوبێت.

(ب) پێویستە هێڵی سنوور نەپساو بێت، ناوچەی سەرەوەی هێڵەکە رەنگکراوبێت.

(ج) پێویستە هێڵی سنوور خاڵخاڵ بێت، ناوچەی ژێرەوەی هێڵەکە رەنگکراوبێت.

(د) پێویستە هێڵی سنوور نەپساو بێت، ناوچەی ژێرەوەی هێڵەکە رەنگکراوبێت.

3 کام بڕەی ڕیزکراوی یەکسانە بە $\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 11 & 14 \end{bmatrix}$ ؟

(أ) $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & -8 \\ 22 & 28 \end{bmatrix}$ (ب) $2\begin{bmatrix} 0 & -6 \\ 9 & 12 \end{bmatrix}$

(ج) $\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 11 & 14 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (د) $\begin{bmatrix} -6 & 17 \\ 8 & 10 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 8 & -13 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$

4 خێرایی فرۆکەی$X-43A$ کە ئاژانسی بۆشایی ئاسمانی ئەمریکی (ناسا) پەرەیپێدا گەیشتە 7 ماك واتە حەوت ئەوەندی خێرایی دەنگ. ئەمەش مانای ئەم فرۆکەیە 16 میل لە 12 چرکەدا دەبڕێت. کام یەکێك لەم نەخشانەی خوارەوە ئەو دوورییە دەنوێنێت کە فرۆکەکە بەپێی کات بڕیویەتی کاتێك بەخێرایی 7 ماك دەفڕێت.

(أ) $f(s)=16x+12s$ (ب) $f(s)=\frac{3}{4}s$

(ج) $f(s)=16s$ (د) $f(s)=1\frac{1}{3}s$

5 دلشاد هاوبەشی کۆنگرەیەکی کرد. لە کۆنگرەکەدا بەشداری چەند وەرشەیەکی کاری کرد. دلشاد هەستا بە هەڵسەنگاندنی ئەو وەرشەکارانەی کە بەشداری تێداکردبوو بە پێدانی هەریەکێکیان هەڵسەنگاندنێك لە 1 – 10 پێکهاتووە ئەم خشتەیەی خوارەوە ماوەی هەر وەرزشکارێك وهەڵسەنگاندنی دلشاد بۆی ڕووندەکاتەوە.

ژمارەی خولەکەکان	53	93	48	120	32
هەڵسەنگاندن	7	4	5	9	8

هاوکۆلکەی پەیوەستی پەیوەندی نێوان ماوەی وەرزشکارەکە و هەڵسەنگاندنی دلشاد بۆی چەندە؟ نزیکیبکەوە بۆ نزیکترین بەش لەسەد؟

(أ) 0.01 (ب) 0.12

(ج) 0.88 (د) 0.13

6 $M=\begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$ و $N=\begin{bmatrix} -1 & 8 & 2 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}$. کام لەمانەی خوارەوە ڕیزکراوەی $2MN$ دەنوێنێت؟

(أ) $\begin{bmatrix} -24 & 184 & 0 \\ -12 & 124 & 192 \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} -12 & 92 & 0 \\ -6 & 62 & 96 \end{bmatrix}$

(ج) $\begin{bmatrix} -24 & -12 \\ 184 & 124 \\ 0 & 192 \end{bmatrix}$ (د) $\begin{bmatrix} -12 & -6 \\ 92 & 62 \\ 0 & 96 \end{bmatrix}$

7 ئەم یەکتربڕینانەی خوارەوە لەگەڵ تەوەرەکان سەر بەکام ڕووتەختن. پۆوتانەکان$(20, 0, 0)$، $(0, 40, 0)$ ، $(0, 0, 5)$

(أ) $20x+40y+5z=0$ (ب) $20x+40y+5z=1$

(ج) $4x+8y+z=5$ (د) $2x+y+8z=40$

8 کام لەمانەی خوارەوە یەکسانە بە بڕی $\frac{5(6-8i)}{2-i}$ ؟

أ) $-20+10i$　　ب) $15-8i$

ج) $15-40i$　　د) $20-10i$

9 کام لەمانە هەڵگەڕاوەی ئەم ڕیزکراوەیە $\begin{bmatrix}-2 & -4\\ 4 & 2\end{bmatrix}$ ؟

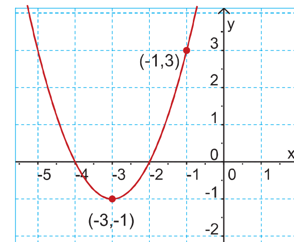
أ) $\begin{bmatrix}-\frac{1}{6} & -\frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6}\end{bmatrix}$　　ب) $\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{1}{4}\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$

ج) $\begin{bmatrix}\frac{1}{6} & \frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6}\end{bmatrix}$　　د) $\begin{bmatrix}2 & 4\\ -4 & -2\end{bmatrix}$

10 کام لەمانەی خوارەوە هاوکێشەی نەخشە ڕوونکراوەکەیە.

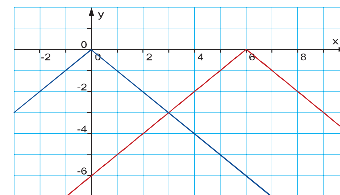
أ) $y=(x-3)^2-1$　　ب) $y=(x+3)^2-1$

ج) $y=(x-1)^2-3$　　د) $y=(x+1)^2-3$



کورتە وەڵام

11 ڕوونکردنەوەی ئەم دوونەخشەیە $f(x)=-|x|$ و $g(x)=f(x-h)$ بپشکنە. بەهای h چەندە؟



12 ڕیزکراوە بەکاربێنە بۆ جێگۆڕکێکردنی سێگۆشەی ABC کاتێك $A(-1, 0)$ ، $B(4, 3)$ ، $C(2, -1)$ بێت.

أ) $A'B'C'$ وێنەی ڕاکێشراوی ABC بێت. یەك یەکە بۆلای ڕاست و 4 یەکە بۆ سەرەوە. پۆوتانی سەرەکانی سێگۆشەی $A'B'C'$ بدۆزەوە.

ب) $A''B''C''$ وێنەی وێنەدانەی $A'B'C'$ بێت. بە دەوری تەوەری دووەم. پۆوتانی سەرەکانی سێگۆشەی $A''B''C''$ بدۆزەوە.

13 سنووردەری ڕیزکراوەی $\begin{bmatrix}\frac{2}{5} & -1\\ 0.4 & 10\end{bmatrix}$ بدۆزەوە.

14 ئەم خشتەیەی خوارەوە کرێی وەستانی ئۆتۆمبیلەکانە لە گەراجی فڕۆکەخانەیەك. بە پێی ماوەی وەستانەکەیان. لاری ئەو نەخشە هێڵییەی کرێی وەستانی بە دینار دەنوێنیت چەندە؟ بە پێی ماوەی وەستان بە کاتژمێر؟

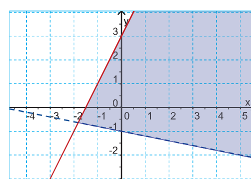
ماوە	1	3	5	7
کرێ	3350	5050	6750	8450

15 کام بەهای گۆڕاوی c وا لەم سستەمە هێڵییە دەکات $\begin{cases}2y-x+10=0\\ 3x-6y-c=16\end{cases}$ بێ سنووربێت.

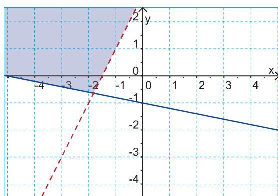
وەڵامی ڕاستەوخۆ

16 سیستمی ئەو لاسەنگانە بنووسە کە ئەم شێوانەی خوارەوە ڕوونکردنەوەییەکەیان دەنوێنێت.

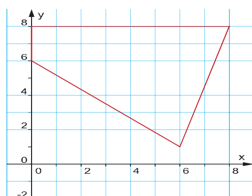
أ)



ب)



17 لێکنەچوونی نێوان دوو سیستەمەکە لە پرسیاری پێشوودا ڕوونبکەوە. وێنەی ڕوونکردنەوەیی خوارەوە ناوچەی گونجاو پرۆگرامێکی هێڵی ڕووندەکاتەوە.



أ) مەرجەکانی ئەم پرسیارە بنووسە.

ب) گەورەترین بەها بۆ نەخشەی بەسوودی $P=3x-4y$ لەم پرسیارەدا بدۆزەوە.

درێژە وەڵام

18 هاوکێشەی هێڵی $2x-3y=-15$ بەکاربهێنە.

أ) ڕوونبکەوە چۆن ئەم هاوکێشەیە دەنووسیت بە شێوەی لاری – یەکتربڕین.

ب) ئەو هۆیە چییە کەوا دەکات شێوەی لاری–یەکتربڕین باشترین شێوەبێت بۆ نووسینی ئەم جۆرە هاوکێشانە پێش کێشانی ئەو ڕاستەهێڵەی دەینوێنێت.

ج) هەنگاوەکانی کێشانی ئەو ڕاستەهێڵەی ئەو هاوکێشە دەنوێنێت. هەنگاو بە هەنگاو بنووسە.

بەشی

4

نەخشە توانییەکان و لۆگاریتمییەکان

Exponential and Logarithmic Functions

له کەوانەکە e بدۆزەوە

کەوانەی دەروازە لە شاری سانت لویس لە ئەمریکا بەناوبانگترین ئادگارەکانی ئەمریکایە، ئەو کەوانەیە شێوەیەکی چەماوەی هەیە هاوشێوەی برگەی هاوتایە ئەو جۆرە چەماوانە لەم بەشەدا دەخوێنیت.

ئایا تۆ ئامادەیت؟

زاراوەکان

هەر زاراوەیەك بەو پێناسەی لەلای چەپدا هاتووە ببەستەوە.

1 نەگۆڕ
2 نەخشە
3 پەیوەندی
4 گۆڕاو

أ هێمایەکە بۆ نواندنی ژمارەیەك بۆی هەیە بەها جیاوازەکان وەربگرێت
ب کۆمەڵە ژمارەیەکی بەکارهاتووە لە ژماردن و پێچەوانەکەیان.
ج پەیوەندییەکە هەر بەهایەك لە بەهایەکانی گۆڕاوی ئازاد تەنها بە یەك بەهای گۆڕاوی پەیوەست دەبەستێتەوە.
د ڕادەیەکە گۆڕاوەکانی تێدا نییە.
هـ کۆمەڵێك جووتە ڕێکخراوە.

سیفەتەکانی هێز

ئەم برانەی خوارەوە بەسادەترین شێوە بنووسە.

5 $x^2\left(x^3\right)(x)$
6 $3y^{-1}\left(5x^2y^2\right)$
7 $\frac{a^8}{a^2}$
8 $y^{15}\div y^{10}$
9 $\frac{x^2y^5}{xy^6}$
10 $\left(\frac{x}{3}\right)^{-3}$
11 $(3x)^2\left(4x^3\right)$
12 $\frac{a^{-2}b^3}{a^4b^{-1}}$

سوودی سادە

یاسای سوودی سادەی $I=Prt$ بەکاربێنە. کاتێك I بۆ سوود هێما دەکرێت، و P هێمای گۆژمە بنەڕەتییە، بەڵام r هێمای « ڕێژەی سوودی ساڵانەیە» t هێمایە بۆ ماوە بەساڵ.

13 سوودی گۆژمەی 30 ملیون دینار بدۆزەوە، بۆ دوو ساڵ خرابێتە کار بەسوودی ساڵانەی 3%.

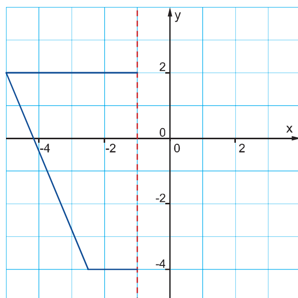
14 سوودی گۆژمەی 2 ملیون دینار بدۆزەوە، بۆ دوو ساڵ خرابێتە کار سوودی 000 90 دیناری بەدەستهێناوە.

15 کاروان بڕە پارەیەکی بۆ ماوەی سێ ساڵ بە سوودی سادەی 6% قەرزکرد بەهای ئەو قەرزە چەندە؟ ئەگەر بزانیت کاروان ئەو بڕە پارەیەی لەسەری بوو داویەتەوە کە 5310 ملیۆن دینار بوو.

شیکارکردنی هاوکێشە بەپێی گۆڕاوێك

بەهای گۆڕاوی x بە پێی گۆڕاوەکانی تر هەژماربکە.

16 $3x-y=4$
17 $y=-7x+3$
18 $\frac{x}{2}=3y-4$
19 $y=\frac{3}{4}x-\frac{1}{2}$



هاوجێبوون

20 وێنەی بەرامبەر دروستبکە، بەبەکارهێنانی تەوەرە سوورەکەی هاوجێبوون تەواوبکە.

شێوەی زانستی

بە شێوەی زانستی بنووسە.

21 7 000 000 000
22 0.0000000093
23 16.75

بەشی 4

ڕێبەری خوێندن: تێڕوانین لەسەر بەشەکە

لە ڕابردوودا

خوێندووتە

- بەکارهێنانی سیفەتەکانی هێز بۆ نووسینی بڕێك بە سادەترین شێوە.
- جیبەجێکردنی کردارە پێچەوانەکان.
- شیکارکردنی ئەو پرسیارانەی نەخشە هێڵییەکان و دووجاکان و ڕادەدارەکان لە خۆ دەگرێت.

لەم بەشەدا

ئەمانە فێردەبیت

- نەخشە توانییەکان.
- لۆگاریتمەکان و نەخشە پێچەوانەکان.
- شیکارکردنی ئەو پرسیارانەی نەخشە توانییەکان و لۆگاریتمییەکان لە خۆدەگرێت.

لە داهاتوودا

دەتوانیت کارامەییەکانی ئەم بەشە بەکاربێنیت

- بۆ شیکارکردنی ئەو پرسیارانەی سوودی ئاوێتە لە خۆدەگرن.
- لە بواری زانستی وەك زیندەزانی و کۆمەڵناسی، کاتێك پێدراوەکان کۆ دەکرێتەوە و ڕێکدەخرێن و شیدەکرێنەوە.
- لە قۆناغی بەرزتردا، کە ئامار و بیرکاری کار وەردەگریت.

زاراوەکان	***Vocabulary***
دەرکەنار	Asymptote
بنچینە	Base
لۆگاریتمی ئاسایی	Common logarithm
هاوکێشەی توانی	Exponential equation
پێچەوانەی نەخشە	Inverse function
هاوکێشەی لۆگاریتمی	Logarithmic equation
نەخشەی لۆگاریتمی	Logarithmic function
لۆگارتمی سروشتی	Natural logarithm

ڕۆشناییەك لەسەر زاراوەکان

بۆ ئەوەی لەگەڵ هەندێك لەم زاراوانەدا ڕابێی کە لەم بەشەدا هاتووە ئەم هەنگاوانە پەیرەوبکە:

1. دەتوانیت بیر لە **بنچینە** بکەیتەوە. وەك ئاوەڵی توان، کام ژمارە بنچینەیە لە $10^3 = 1000$

2. **لۆگاریتمی دەیی** (ئاسایی) بریتییە لە توان لە هێزی ژمارە 10. چۆن بەهای لۆگاریتمی ئاسایی ژمارە 1000 دەبینیت.

3. لە کوێدا. پێشبینی دۆزینەوەی نەزانراوی x لە **هاوکێشەیەکی توانیدا** دەکەیت.

4. دابەشکردن بریتییە لە کرداری پێچەوانەی لێکدان. چۆن پێشبینی کاریگەری نەخشەی پێچەوانە بۆ نەخشەی پێدراو دەکەیت.

5. بنچینەی **لۆگاریتمی سروشتی** بریتییە لە ژمارە e، کام بەهای نەگۆڕی تر بە پیت هێما دەکرێت.

6. Asymptote وشەیەکی یۆنانییە واتە بەیەك نەگەیشتن. چۆن پەیوەندی نێوان چەماوەیەك و **هێڵی دەرکەنارەکەی** دەبینیت؟

بەشی 4

بیرکاری
بە خوێندنەوە و نووسین



ستراتیژیەتی نوسینەوە: شێوازی خۆت بەکاربهێنە

کاتێك بیرۆکەیەکی دژوار لە بیرۆکەکانی بیرکاری دەخوێنێت، دووبارە بیرۆکەکە بە شێوازی خۆت بنووسەوە. ئەمەش یارمەتیت دەدات بۆ تێگەیشتنی ئەوەی دەیخوێنێت بە شێوەیەکی باشتر. لەوانەیە بەسوود تربێت بۆ ڕوونکردنەوەی بیرۆکەکە باشتر وایە نموونەیەکی تایبەت بە خۆت پیشکەش بکەیت بۆ ڕوونکردنەوەی بیرۆکەکە.

پلەی ڕادەدار بەبەکارهێنانی ڕادەی بەرزترین پلە دیاری دەکرێت. ڕادەداری یەك گۆڕاو بەشێوەی گشتییەکەی نوسراوە. کاتێك ڕادەکانی بەرێزکردنی سەربەرەوژێری پلەکانی نوسرابێت. بەو شێوەیەش کاتێك ڕادەدارێك بە شێوە گشتییەکەی نووسراوە ئەوا پلەی ڕادەی یەکەم دەبێتە پلەی ڕادەدارەکە. هاوکۆڵکەکەی ڕادەی یەکەم دەبێت بە هاوکۆڵکەی سەرەکی ڕادارەکە.

ڕادەدارەکان

1. پلەی ڕادەدار پلەی بەرزترین ڕادەیە
2. شێوەی گشتی: ڕادەکان بەرێزێکی سەربەرەو ژێر بە پێی پلەکانی نوسراوە.
3. لە شێوەی گشتیدا. پلەی ڕادەی یەکەم بریتییە لە پلەی ڕادەدارەکە.
4. هاوکۆڵکەی ڕادەی یەکەم بریتییە لە هاوکۆڵکەی سەرەکی.

هاوکۆڵکەی ڕادەی یەکەم بریتییە لە هاوکۆڵکەی سەرەکی

نموونە: شێوەی گشتی $2x^4 - 5x^3 + 3x - 9x + 10$

پلەی ڕادەدارەکە : **4**

هاوکۆڵکەی سەرەکی: **2**

بنووسە برگەی پێشوو بنووسە بە بەکارهێنانی ڕستەی کورت بۆ ڕوونکردنەوەی بیرۆکەی گرنگ کە ڕادەدارەکانی تێدابێت.

دڵنیابوون باسی نموونەیەك بکە، دەق و بیرکاری بەیەکەوە ببەستێتەوە.

هەوڵبدە

ئەم برگەیەی دێت بخوێنەوە و دووبارە بە شێوازی خۆت بینووسەوە.

لە سەلمێنراوی ڕەگی نارێژەییدا هاتووە. کە ڕەگە نارێژەییەکانی هاوکێشەیەك هاوکۆڵکەکانی ژمارەی ڕێژیی بن ئاوەڵی یەکتری دەبن. بۆ نموونە ئەگەر بزانیت $1+\sqrt{2}$ ڕەگێکە لە ڕەگەکانی هاوکێشەی $x^3 - x^2 - 3x - 1 = 0$ دەوتریت $1-\sqrt{2}$ ش ڕەگێکە لە ڕەگەکانی. بیرت بێت ژمارە ڕاستییەکان دوو جۆرن، ژمارە ڕێژەییەکان و ژمارە نارێژەییەکان دەتوانیت سەلمێنراوی ڕەگی ڕێژەیی و سەلمێنراوی ڕەگی نارێژەیی بەیەکەوە بەکاربهێنێت بۆ دۆزدینەوەی هەموو ڕەگەکانی هاوکێشەی $P(x) = 0$.



1–4 نەخشە توانییەکان، و گەشە و پووکانەوە (گەڕانەوە)

Exponential Functions, Growth and Decay

کێ ئەمە بەکاردەهێنێت؟

ئەوانەی شتە دەگمەنەکان کۆدەکەنەوە، دەتوانن نەخشەی توانی بەکاربێنن بۆ دارشتنی نموونەیەك، کە بەهای ئەو شتانەی کۆیدەکەنەوە بینوێنێت. وەك ئامێرە دەگمەنەکانی مۆسیقا (نموونە 2).

ئامانجەکان

- برە توانییەکان بۆ نواندنی بارەکانی گەشەو پووکانەوە دەنووسێت. و بەهای ئەم برانە هەژمار دەکات.

زاراوەکان
Vocabulary

نەخشەی توانی
Exponetial function

بنچینە
Base

دەرکەنار
Asymptote

گەشەی توانی
Exponential growth

پووکانەوەی توانی
Exponential decay

لەدەقی یاسای مۆر Moore کە لە پیشەسازی بژمێردا بەکاردێت هاتووە. ژمارەی ترانزیستەرەکان کە پێکهاتەکانی بژمێرێك لە خۆ دەگرێت هەموو ساڵێك ئەوەندەی خۆی زیاد دەکات. ئەم خشتەیەی خوارەوە ژمارەی ترانزستەرەکان بە نزیکەیی ڕووندەکاتەوە کە پێکهاتەکانی بژمێرن لە سەرەتای دروستبوونی ئەم پیشەسازییەوە.

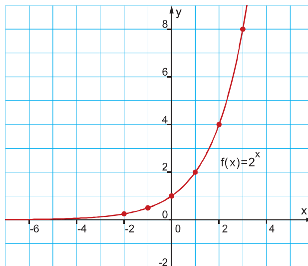
ژمارەی ترانزستەرەکان لە پێکهاتەکەدا							
ساڵ	1965	1966	1967	1968	1969	1970	1971
ژمارە	60	120	240	480	960	1920	3840

$\times 2$ $\times 2$ $\times 2$ $\times 2$ $\times 2$ $\times 2$

دەتوانرێت ئەو گەشەبوونە کە هەموو ساڵێك دوو ئەوەندە دەبێت، بەبەکارهێنانی نەخشەیەك توانەکەی گۆڕاوێك لە خۆ بگرێت بنوێنرێت. ئەم نەخشانە پێیان دەوترێت **نەخشەی توانی**، نەخشەی بنەڕەتی بۆ **نەخشە توانییەکان Exponential functions** بریتییە لە نەخشەی $f(x)=b^x$. کاتێك **Base** b ژمارەیەکی نەگۆڕ و x گۆڕاوێکی سەربەخۆ بێت.

بنچینە   توان

$f(x)=b^x$ و $b>0, b\neq 1$



وێنەی بەرامبەر ڕوونکردنەوەی نەخشەی توانی بنەڕەتی دیاردەکات $f(x)=2^x$ مەودای ئەم نەخشەیە بریتییە لە کۆمەڵەی ژمارە ڕاستیە مووجەبەکان $\{y/y>0\}$

x	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)=2^x$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

لەبیرت بێت

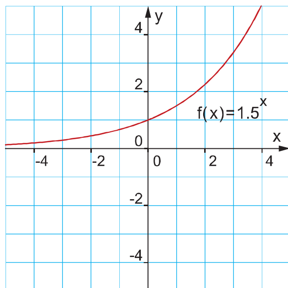
لە پەیوەندی $y=b^x$ ، y گۆڕاوی بەستراوە بە گۆڕاوی x چونکە بەهای y بە بەهای x دیاریدەکرێت.

سەرەنجبدە ڕوونکردنەوەی نەخشەکە بەرەبەرە نزیك دەبێتەوە لە تەوەری یەکەم هەرچەندە بەهای x کەمبکات، دیسان سەرەنجبدە ڕوونکردنەوەکەی بەر تەوەری یەکەم ناکەوێت و لە سەرەوەوە دەمێنێتەوە بەهای بڕی 2^x بە موجەب دەمێنێتەوە بەهای x هەرچەند بێت. تەوەرەی یەکەم بریتییە لە **دەرکەناری ئاسۆیی** بۆ ڕوونکردنەوەیی نەخشەی $f(x)=2^x$ **دەرکەنار Asymptote** ڕاستەهێڵێکە. هێڵی ڕوونکردنەوەیی نەخشەکە بەرەبەرە لێی نزیکەدەبێتەوە هەرچەندە بەهای x زۆر گەورەبێت یان زۆر بچووکبێت.

هەرنەخشەیەکی وەك $f(x)=ab^x$ ، کاتێك $a>0$ و $b>1$ بریتییە لە نەخشەیەکی **گەشەی توانی Exponential growth** بەهاکەی زیاددەکات بەزیادبوونی بەهای x بەڵام کاتێك $0<b<1$ ئەوا نەخشەکە $f(x)=ab^x$ بریتییە لە نەخشەی **پووکانەوە Exponential decay** بەهایەکەی بە زیادبوونی بەهای x کەمدەکات.

نموونـــه 1 وێنەی ڕوونکردنەوەی نەخشە توانییەکان

دیاریبکە، ئایا ئەم نەخشەیە، نەخشەیەکی گەشەی توانییە یان نەخشەیەکی توانی پووکانەوەی توانییە پاشان وێنە ڕوونکردنەوەییەکەی بکێشە؟



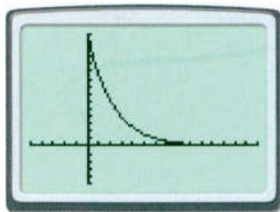
أ $f(x)=1.5^x$

هەنگاوی 1 بەهای بنچینە بدۆزەوە

$f(x)=1.5^x$ بنچینە1.5گەورەترە لە 1 نەخشەکە بریتییە لە نەخشەیەکی گەشەی توانییە

هەنگاوی 2 بەبەکارهێنانی خشتەکە، وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشەکە بکێشە.

x	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	0.4	0.8	1	1.5	2.3	3.4	5.1



ب $f(x)=30(0.8)^x$

هەنگاوی 1 بەهای بنچینەیی بدۆزەوە.

$f(x)=30(0.8)^x$ بنچینە0.8بچوکترە لە 1 نەخشەکە بریتییە لە نەخشەیەکی کەمبوونی توانی.

هەنگاوی 2 بەبەکارهێنانی بژمێرەی ڕوونکردنەوەیی، وێنەی نەخشەکە بکێشە.

خاڵی چاودێری

1. دیاریبکە ئایا نەخشەی $f(x)=5(1.2)^x$ نەخشەیەکی توانی گەشەی توانییە یان نەخشەیەکی پووکانەوەی توانییە؟ وێنەی ڕوونکردنەوەییەکەی بکێشە.

دەتوانیت گەشە یان پووکانەوە بەبەکارهێنانی ڕێژەی سەدی نەگۆڕ بۆ گەشە و پووکانەوە بەبەکارهێنانی ئەم ڕێسایە بنوێنیت؟



$$A(t)=a(1\pm r)^t$$

بنچینەی نەخشەکەی سەرەوە $1+r$ پێی دەوترێت هاوکۆلکەی زیادبون بە هەمان شێوە بە بنچینەی $1-r$ دەوترێت هاوکۆلکەی کەمبوون.

لە خوێندکارەوە بۆ خوێندکار

گەشەو پووکانەوە

کاتێك بەهای نەخشەکە بە تێکرایەکی نەگۆڕ زیاد دەکات. وەك 7% مانای ئەوەیە لێکدانی$7\%+100\%$ واتە لە107% بدە. لە شێوەی دەیی ئەمەش دەگۆڕێن بە لێکدان لە 1+0.07 واتە 1.07.

کاتێك بەهای نەخشەکە بە تێکرایەکی نەگۆڕ کەمدەکات. وەك 12% مانای ئەوەیە لێکدانی $100\%-12\%$ واتە لە 88% بدە لە شێوەی دەیی لێکدانی $1-0.12$ واتە 0.88 .

نموونــــه 2 جێبەجێکردنی ئابووری

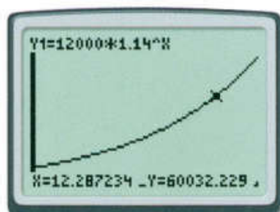
گۆڤەند لە ساڵی 2000 دا گیتارێکی دەگمەنی کڕی میژووەکەی دەگەڕایەوە بۆ ساڵی 1959، 12 ملیۆن دیناری پێدا. شارەزایان وایان خەملاندن کە نرخەکەی ساڵانە بەرێژەی 14 % زیاد دەکات. بەبەکارهێنانی خشتەی خوارەوە ئەو ساڵە بدۆزەوە کە تییدا نرخی گیتارەکە دەبێتە 60 ملیۆن دینار.

هەنگاوی 1 نەخشەیەك بنووسە گۆڕانی نرخی گیتارەکە بنوێنێت.

$f(t)=a(1+r)^t$ نەخشەی گەشەی توانییە.

$=12(1+0.14)^t$ 12 لەجیاتی a و 0.14 لە جیاتی r دابنێ.

$=12(1.14)^t$



هەنگاوی 2 وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشەکە بکێشە.

کاتێك وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشەیەکی توانی بەبەکارهێنانی ڕوونکردنەوەیی دەکێشێت، پێویستە پەنجەرەکە بگونجێنێت تا ئەو خاڵەی بەکاریدەهێنێت دەربکەوێت (شاشەکە و الێبکرێت وێنەکە بەباشی دەربکەوێت.).

هەنگاوی 3 ڕوونکردنەوەکە بەکاربێنە بۆ خەملاندنی ئەو ساڵەی نرخی گیتارەکە دەبێت 60 ملیۆن دینار.

فرمانی  TRACE بەکاربێنە بۆ دۆزینەوەی بەهای t کاتێك $f(t)=60$.

نرخی نەخشەکە دەگاتە 60 کاتێك $t=12.29$ نرخی گیتارەکە دەگاتە 60 ملیۆن دینار پاش 12.29 ساڵ لە کڕینی واتە لە ساڵی 2012 .

> **یارمەتی**
>
> لە بژمێرەی ڕوونکردنەوەییدا لە جیاتی x هێمای t بەکاربێنە.
>
> $y_1 = 12\ 000 * 1.14 \wedge x$

خاڵی چاودێری

2. ژمارەی نەهەنگە کووڕەکانی ئوسترالیا 350 نەهەنگ بوو لە ساڵی 1981 دا. ساڵانە بە ڕێژەی 5% ژمارەیان زیاد دەکات. نەخشەیەکی توانی بنووسە ئەم زیادبوونە بنوێنێت. پاشان خشتەکە بەکاربهێنە بۆ دیاریکردنی ئەو ساڵەی ژمارەی نەهەنگەکان دەگاتە 550 نەهەنگ.

نموونــــه 3 جێبەجێکردنی لەسەر پووکانەوە

نرخی بارهەڵگرێکی نوێ 28 ملیۆن دینارە. ساڵانە نرخەکەی بە ڕێژەی 6% دادەبەزێت نەخشەیەکی توانی بنووسە بۆ ئەم دابەزینە. پاشان خشتەکە بەکاربهێنە بۆ دیاریکردنی ئەو ساڵەی نرخی بارهەڵگرەکە دەگاتە 20 ملیون دینار.

هەنگاوی 1 نەخشەیەك بنووسە گۆڕانی نرخی بارهەڵگرەکە بنوێنێت.

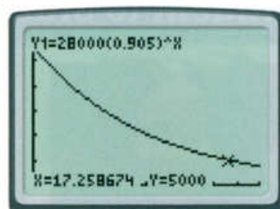
$f(t)=a(1-r)^t$ نەخشەی کەمبوونی توانی

$= 28\ (1-0.06)^t$ 28 لەجیاتی a و 0.06 لە جیاتی r دابنێ.

$= 28(0.94)^t$

هەنگاوی 2 وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشەکە بکێشە.

کاتێك وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشە توانییەکە بەبەکارهێنانی بژمێرەی ڕوونکردنەوەیی دەکێشێت. پێویستە خەسلەتەکانی پەنجەرەکە دەستکاری بکەیت بۆ ئەوەی ئەو خاڵەی بە کاریدەهێنێت دەربکەوێت. فەرمانی TRACE بەکاربێنە بۆ دەۆزینەوەی بەهای t کاتێك $f(t)=5$



هەنگاوی 3 ڕوونکردنەوەییەکە بەکاربێنە بۆ خەملاندنی بەهای ئەو ساڵەی نرخی بارهەڵگرەکە دەگاتە 5 ملیۆن دینار
بەهای نەخشەکە بەنزیکەیی دەبێتە 5 کاتێک $t = 17.3$. نرخی بارهەڵگرەکە دەگاتە 5 ملیۆن دینار پاش 17.3 ساڵ لە کڕینی.



3. ماتۆر سکیلێك نرخەکەی یەك ملیۆن دینارە. ساڵانە بە ڕێژەی 15% نرخەکەی دادەبەزێت نەخشەیەکی توانی بۆ نواندنی ئەم دابەزینە بنووسە پاشان خشتەکە بەکاربهێنە بۆ دیاریکردنی ئەو ساڵەی نرخەکەی دەگاتە نیوەی نرخە بنەڕەتییەکەی.

بیربکەوە و تاوتوێبکە

1. بژمێر بەکاربێنە بۆ بەراورد کردن لە نێوان دوو بەهای 1.01^{500} و 0.99^{500} ئەوەی پێی گەیشتی باسبکە.
2. لە بارە جیاوازەکانی نێوان ڕوونکردنەوەیی دوو نەخشەی $f(x) = 1.1^x$ و $g(x) = 0.9^x$ وتووێژبکە کاتێك $x = 0$ لە هەریەکەیان چی ڕوودەدات.
3. باسی نەخشەی $f(t) = a(1-r)^t$ بکە، کاتێك $r > 0$ باسی نەخشەکە بکە کاتێك $r > 0$
4. ڕێکخەر بە ئەم خشتەیەی خوارەوە دروست بکە و تەواویبکە. بەراوردی نێوان گەشەی توانی و پووکانەوەی توانی بکە.



$f(x) = ab^x$ کاتێك $a > 0$	گەشە	پووکانەوە
بەهای b		
شێوەی گشتی ڕوونکردنەوەکە		
نەخشەکە لە زیادبوونی بەهای x چی بەسەردێت		
نەخشەکە بە کەمبوونی بەهای x چی بەسەردێت		

1-4 ڕاهێنانەکان

ڕاهێنانی ئاراستەکراو

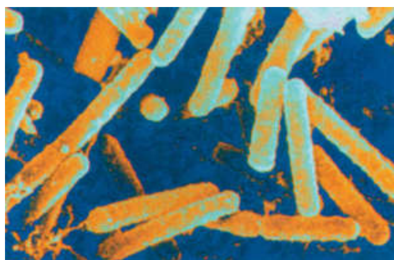
1 **زاراوەکان** ئەگەر بنچینەی نەخشەیەکی توانی ژمارەیەك بێت لەنێوان 0 و 1 دا ئەوا نەخشەکە نەخشەیەکی ___?___ (گەشەی توانی یان پووکانەوەی توانییە)

بڕوانە نموونە 1

دیاریبکە، ئایا نەخشەکە نەخشەیەکی گەشەی توانییە یان پووکانەوەی توانییە.

2 $f(x) = 32(0.5^x)$ 3 $f(x) = 0.5(1.2^x)$ 4 $f(x) = 0.4\left(\frac{3}{4}\right)^x$

بڕوانە نموونە 2



5 **زیندەزانی** دەفرێکی چاندنی بەکتریا 150 بەکتریای تێدایە. لەو جۆرانەی کە دوو ئەوەندەی لێدێت پاش هەر کاتژمێرێك.

أ نەخشەی $f(t)$ بنووسە زۆربوونی ژمارەی بەکتریاکان دەنوێنێ.
ب وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشەکە بکێشە.
ج خشتەکە بەکاربهێنە بۆ خەملاندنی ژمارەی بەکتریاکان پاش 10 کاتژمێر.

پڕوانە نموونە 3

6 **فیزیا** لەبەرزی 25 m تۆپێکی نۆی نەرم بۆ سەر زەویەکی ڕەق بەردرایەوە چەند جارێك بەرەو سەرەوە هەڵبەزیەوە. هەرجارێك دەگەیشتە $\frac{2}{5}$ ی بەرزی جاری پێشوو.

أ نەخشەی $f(n)$ بنووسە ئەو بەرزییە بنوێنێت کە تۆپەکە لە هەر جارێکدا دەیگاتێ.

ب وێنەی ڕوونکردنەوەیی ئەو نەخشەیە بکێشە.

ج پاش چەند جار بەرزییەکەی لە 1 m کەمتر دەبێت؟

ڕاهێنان و شیکارکردنی پرسیارەکان

دیاریبکە ئایا نەخشەکە نەخشەیەکی گەشەی توانییە یان پووکانەوەی توانییە پاشان وێنە ڕوونکردنەوەییەکەی بکێشە.

ڕاهێنانی ئازاد	
بۆشیکارکردنی ڕاهێنانەکان	سەیری نموونە بکە
9–7	1
10	2
11	3

7 $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ **8** $f(x)=\frac{1}{3}(1.3)^x$ **9** $f(x)=10(2.7)^x$

10 **شەمەندەفەرەکان** شتوومەکە گواستراوەکان بە هۆی شەمەندەفەرەوە لە ئەمریکا گەیشتە 580 ملیار تەن/میل لە ساڵی 1960 دا، ئەم هێندە ساڵانە بە ڕێژەی %2.32 زیاد دەکات لە و ساڵەوە.

أ نەخشەیەك بنووسە زیادبوونی ساڵانەی شتومەکە گواستراوەکان بە هۆی شەمەندەفەرەکانەوە بنوێنێت. (1960 = ساڵی سفر).

ب وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشەکە بکێشە.

ج لە چ ساڵێکدا شتومەکە گواستراوەکان لە هەزار ملیار تەن/میل زیاتر دەبێت؟

11 **پزیشکی** هێندی ئەنسۆلینی بەکارهاتوو بۆ ڕێکخستنی ڕێژەی شەکر لە خوێندا بە تکێڕای %5 بە نزیکەیی لە هەر خولێکدا کەم دەکات ئەو هێندەی مرۆڤ پێویستی پێیەتی بە نزیکەیی دەگاتە 10 یەکە.

أ نەخشەی $f(t)$ بنووسە هێندی ئەو ئەنسۆلینە بە پێی کات بنوێنێت. کە لە خوێندا ماوەتەوە پاش ئەوەی نەخۆشەکە 10 یەکەی وەرگرت.

ب وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشەکە بکێشە.

ج هێندی ئەنسۆلینی ماوە لە خوێندا پاش 10 خولەك بخەمڵێنە.

د پاش چەند خولەك هێندی ئەنسۆلین لە لەشدا بۆ نیوە دادەبەزێت.

دیاریبکە ئەم نەخشانە توانین یان نا.

12 $f(x)=2(x)^{10}$ **13** $f(x)=0^x$ **14** $f(x)=1(0.5)^x$

15 لە ساڵی 1626 کۆمەڵێك لە کۆچبەرانی ئەڵمانی دوورگەی مانهاتنیان کڕی ، کە ئەمڕۆ بەشێکە لە شاری نیویۆرك. لە بری کەلوپەلێك نرخەکەی 24 دۆلاری ئەو کاتەبوو. وادابنێ ئەم پارەیە بە سودێکی ئاویتەی ساڵانە ڕێژەکەی %3.5 بێت دانرا بری ئەو پارەیە لە ساڵی 2008 دا دەبێتە چەند؟

16 **تەکنەلۆژیا** هێندی زانیارییە هەڵگیراوە ئەلیکترۆنیەکان لە ساڵی 2002 دا گەیشتە نزیکەی 5 ئەکزا بایت یان 5×10^{18} بایت. توێژینەوەرەکان ئەو هێندەیان بە دوو ئەوەندەی هەڵگیراوەکانی ساڵی 1999 خەملاند، وایدابنێ گەشەی هێندی زانیارییەکان بەو شێوازە بەردەوام بوو. نەخشەیەك بنووسە گەشەی هێندی زانیارییە هەڵگیراوە ئەلیکترۆنیەکان بنوێنێت لە سەرەتای ساڵی 1999.

17 **بژمێر** نرخی بژمێرەکان ساڵانە بە ڕێژەی %30 کەم دەکات. کاوە بژمێرێکی بە یەك ملیۆن دینار کڕی. نەخشەیەك بنووسە نرخی بژمێرە کە بەپێی کات بە ساڵانە بنوێنێت، وە لە دواییدا خشتەیەك دروستبکە بۆ دیارکردنی لە چ ساڵێك نرخی ئەم بژمێرە دەبێتە نیوەی نرخی بنەڕەتییەکەی.

ئەم خشتەیە بۆ هەر نەخشەیەك تەواو بکە. بەهایەکان نزیکبکەوە لە نزیکترین بەش لە سەد.

	x	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5
18	$f(x)=2.2^x$	■	■	■	■	■	■	■	■	■
19	$g(x)=0.4^x$	■	■	■	■	■	■	■	■	■

20 ئەگەر $A=P(1.015)^n$ ڕیسایەك بێت بۆ بڕی ئەو قەرزەی کە خاوەن کارتێکی متمانەوە وەریبگرێت. کاتێك A بڕی ئەو پارەیەکە خاوەن کارتی متمانە پێی قەرزدارە پاش n مانگ. p هێمای بڕی پارەی دراو بێت؟

أ وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشەکە بکێشە کاتێك بڕی پارەی بنەڕەتی یەك ملیۆن دیناربێت.

ب پاش ساڵێك بڕی پارەکە دەبێتە چەند؟

ج کەی بڕە پارەکە دەگاتە 1 300 000 دینار؟

21 **فرۆشراوەکان** فرۆشراوەکانی مانگانەی یەکێك لە کێڵگە پەلەوەرییەکان لە مانگی کانوونی دووەمدا گەیشتە ئەو پەڕی 12 000 مریشك. بەڵام فرۆشراوەکانی لە مانگەکانی دواتردا مانگانە بە ڕێژەی 20% دابەزی.

أ خاوەن کێڵگەکە دوای شەش مانگ لە دوای مانگی کانوونی دووەمەوە چەند مریشکی فرۆشتوە.

ب پاش چەند مانگ فرۆشراوەکانی ئەم کێڵگەیە لە 1000 مریشك کەمتر بوو؟

22 **بانکەکان** بانکەکان یاسایەك بۆ هەژمارکردنی نرخی گوژمەی سپێردراو بەکاردەهێنن یاساکە بریتییە لە $A=P\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}$ کاتێك A گوژمەی ئێستا و p گوژمەی بنەڕەتی سپێردراو و r هێمای تێکڕای سوودی ساڵانە و t هێمای ماوەیە بە ساڵ و n هێمای ژمارەی ماوەکانی ئەو ساڵەیە کە تێیدا پارەکەی پاشەکەوت کردووە. واتە هەژماری سوود و زیادکردنی بۆ گوژمەی سپێردراو بێت. خەسرەو 5 ملیۆن دیناری بە سوودی ساڵانەی 5%سپارد بۆ ئەوەی لە هەروەرزێکدا (4 جار لە ساڵێکدا) پاشەکەوتەکەی هەژماربکرێت.

أ بڕە پارەکە پاش 5 ساڵ دەبێتە چەندە؟

ب کەی گوژمەی سپێردراو لە 10 ملیۆن دینار تێپەڕ دەکات؟

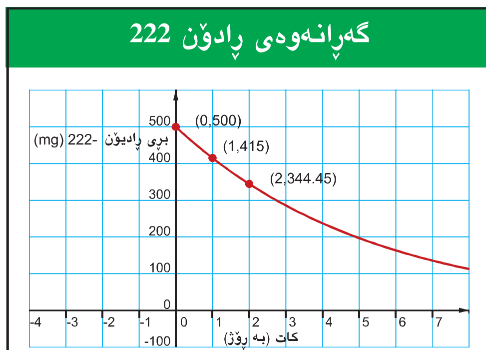
ج **چی دەبێت ئەگەر ....؟** خەسرەو پاش 5 ساڵ چەند قازانج دەکات، ئەگەر پاشەکەوتەکە مانگانە بکرێت لە جیاتی ئەوەی وەرزی بکرێت.

23 **بیری ڕەخنەگر** پۆوتانی خاڵی هاوبەشی ڕوونکردنەوەیی ئەم دوونەخشەیە چییە $f(x)=\left(\frac{3}{2}\right)^x$ و $f(x)=\left(\frac{2}{3}\right)^x$ ؟

ئەو مەودایەی کە بەرامبەر بواری [0, 10] لە هەریەك لەم نەخشانەی دێن بدۆزەوە.

24 $f(x)=3^x-2^x$ **25** $f(x)=100(0.9)^x$ **26** $f(x)=\frac{3}{4}(2)^x$

27 **زەویناسی** ڕادۆن − 222 $(Radon-222)$ گازێکە لە خۆڵ و بەردەوە دەردەچێت. لە وانەیە ئەم گازە لە تەلارەکاندا کۆببێتەوە و مەترسی دروست بکات لەسەر ئەو کەسانەی هەڵیدەمژن. ڕادۆن − 222 دەگەڕێتەوە دەبێتە پۆلۆنیۆم $(Polonium)$ یان قورقوشم.



أ ڕێژەی سەدی ڕۆژانەی گەڕانەوەی ڕادۆن −222 بدۆزەوە.

ب نەخشەیەك بنووسە هێندی ڕادۆن − 222 ماوە بنوێنێت پاش t ڕۆژ لە هێندێکی بنەڕەتی بڕەکەی $500mg$ بێت.

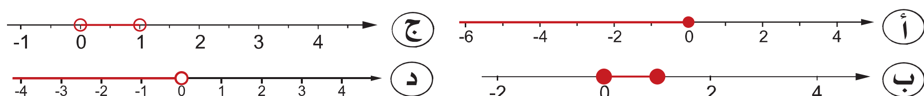
ج پاش 14 ڕۆژ هێندەکە چەندی لێدەمێنێتەوە ؟

28 **خەملاندنەكان** ژمارەی دانیشتوانی زەوی لە ساڵی 2000 دابە 6.1 ملیار كەس خەملێندرا. هەروەها ڕێژەی زیادبوونی ساڵانە بە1.4%خەملێندرا، نەخشەیەك بنووسە گەشەی ژمارەی دانیشتووانی زەوی بەپێی ساڵەكان پاش 2000 (2000 = ساڵی 0) بنوێنێت، وەبەكاربهێنە بۆ خەملاندنی ژمارەی دانیشتوانی زەوی ساڵی 2005 چەندبوو.

29 **بیركردنەوەی ڕەخنەگرانە** كام لەم دووبڕانە x^3 یان 3^x خێراتر زیاد دەكات بەزیادبوونی بەهای x ؟ ئەمە ڕوونبكەوە.



30 **بنووسە** باسی بارێك بكە كە دەتوانرێت بنوێنرێت بەبەكارهێنانی نەخشەیەكی توانی. نەخشەیەك بنووسە ئەوەی دەینوێنێت بۆ هەر بەهایەك تییدا ڕوونكرابێتەوە.



31 كام لەم نەخشانەی دێن نەخشەی پووكانەوە توانییە؟

ⓐ $f(x)=0.9(1.001)^x$ ⓙ $f(x)=0.5(2)^x$

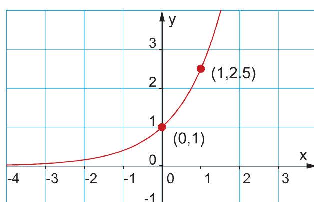
ⓑ $f(x)=1.5\left(\frac{10}{11}\right)^x$ ⓓ $f(x)=\left(\frac{1}{0.5}\right)^x$

32 كام لەمانەی خوارەوە بەهای b دەنوینیت. كاتێك نەخشەی $f(x)=ab^x$ نەخشەیەكی پووكانەوەی توانی بێت؟

ⓐ (هێڵی ژمارە -6 تا 4، سوور تا 0 خاڵی پڕ) ⓙ (هێڵی ژمارە -1 تا 4، بازنەی بەتاڵ لە 0 و 1)

ⓑ (هێڵی ژمارە -2 تا 4، خاڵی پڕ لە 0 و 1) ⓓ (هێڵی ژمارە -4 تا 4، سوور تا 0 بازنەی بەتاڵ)

33 **كورتە وەڵام** بەهایەكانی aو b چەندن لە نەخشەی $f(x)=ab^x$ كە وێنەی ڕوونكردنەوەیی بەرامبەر نوێنراوە.



34

0.6%

ⓐ $f(x)=89\ \ 443(1.6)^x$ ⓙ $f(x)=89\ \ 443(1.06)^x$

ⓑ $f(x)=89\ \ 443(1.006)^x$ ⓓ $f(x)=89\ \ 443(1.0006)^x$

بەرەنگاری و فراوانكردن

35 **بیری ڕەخنەگر** لە بیرت بێت كە نەخشە زۆر ڕادەدارەكانت بە پێی پلەكانییان پۆلێن كردووە بۆچی باس لە پلەی نەخشەی توانی ناكەیت؟

خشتەیەك بۆ شیكاری هەر لاسەنگەیەك بەكاربهێنە، وەلامەكەت نزیكبكەوە:

36 $1.15^x \geq 3$ **37** $0.97^x < 0.5$ **38** $5 < 1.5^x < 6$

39 بەراورد لە نێوان ڕوونكردنەوەیی هەردوو نەخشەی $y=x^2$ و $y=2^x$ بكە. كاتێك $-10 < x < 10$ ژمارەی خاڵەكانی یەكتربرین چەندە؟ پۆوتانی ئەو خاڵانە بدۆزەوە.



40 **زیندەزانی** لێكۆڵەروان ژمارەیەك مێشوولەیان لە یەك ئەكردا، لە ناوچەیەكی سارد دۆزیەوە. دوای توانەوەی سەهۆڵەكە ژمارەیان $10^{\frac{1}{2}d+2}$ بوو. كاتێك d ژمارەی ڕۆژەكان بێت پاش تواندنەوەی سەهۆڵەكە. ژمارەی مێشوولەكان لە ئەكرێكدا دوای تواندنەوەی سەهۆڵەكە چەندە؟ كاتی خایەنراو چەندە پاش توانەوەی سەهۆڵەكە هەتا ژمارەی میشوولەكان لە هەر ئەكرێكدا دوو ئەوەندەی لێبێت؟ (ئەكریەكەیەكی ڕووبەرە و یەكسانەبە $4\ 047m^2$).

41 لەنەخشەی $f(x)=b^x$ دا بۆچی بواری بەها گونجاوەكانی بنچینە تەنها ماوەی $\{b / b>0;\ b\neq 1\}$ دەبێت.

پێداچوونەوەی لولپێچی

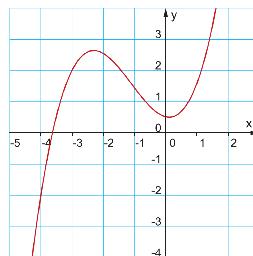
بەبەکارهێنانی بژمێریی ڕوونکردنەوەیی. وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشەکە بکێشە. بوار و مەودا و ئەو جیگۆڕکێیەی ڕێگە بە کێشانی وێنە ڕوونکردنەوەییەکە دەدات بەهۆی ڕوونکردنەوەیی نەخشە بنەڕەتییەکانەوە. (پۆڵەکانی پیشوو)

42 $f(x)=\sqrt{x-3}$ **43** $f(x)=-x^2+1$ **44** $f(x)=2x^3$ **45** $f(x)=x-4$

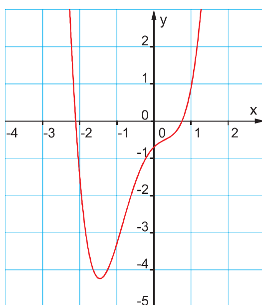
46 **بۆ خۆشی** هەڤاڵ و شیرینی خوشکی سیدی یارییان کڕی هەڤاڵ 3 یاری نوێ و دوو یاری کۆنی بە 235 000 دینار کڕی. بەڵام شیرین یارییەکی نوێ و 4 یاری کۆنی بە 195 000 دینار کڕی، نرخی هەریەکە لە یارییە نوێیەکان و یارییە کۆنەکان بدۆزەوە (پۆڵەکانی پیشوو).

لە پرسیارەکانی 47 – 49 هەریەك لە مانەی خوارەوە وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشەیەکی ڕادەدارە، دیاریبکە ئایا پلەی ئەم نەخشانە تاکن یان جووتن. هاوکۆڵکەی سەرەکیان موجەبە یان سالب (پۆڵەکانی پیشوو).

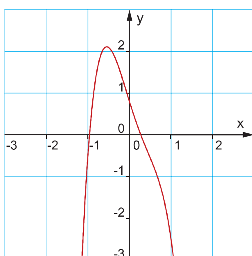
47



48



49





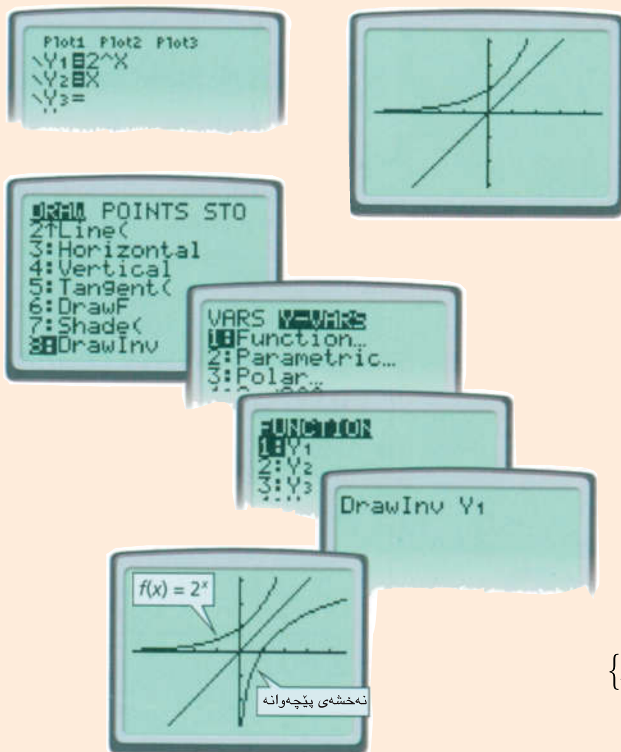
دۆزینەوەی پێچەوانەی نەخشەكان

Explore Inverses of Functions

دەتوانیت بژمێری ڕوونكردنەوەیی بۆ دۆزینەوە پێچەوانەی نەخشەكان و پەیوەندییەكەی بە نەخشەی هێڵی $f(x)=x$ بەكاربهێنێت.

چالاكی

لەمەودوا وێنەی ڕوونكردنەوەیی نەخشەی $f(x)=2^x$ و ڕوونكردنەوەی پێچەوانەی نەخشەكەی دەكێشین.



1. وێنەی ڕوونكردنەوەیی نەخشەی $f(x)=2^x$ و ڕاستەهێڵی $y=x$ بكێشە، بەبەكارهێنانی بژمێری ڕوونكردنەوەیی و دیاریكردنی پەنجەرەی دەیی بۆ بەجێهێنانی ئەم دوو نەخشە تۆماربكە و پاشان دوگمەی ZOOM دابگرە **4: ZDecimal** هەڵبژێرە.

2. فرمانی **DrawInv** بەكاربهێنە بۆ بەدەستهێنانی وێنەی ڕوونكردنەوەیی پێچەوانەی پەیوەندییەكە. ئەم كارە جێبەجێدەكرێت بە داگرتنی دوگمەی 2^{nd} و PRGM پاشان **8:DrawInv** هەڵبژێرە. بۆ هەڵبژاردنی **Y1** دوگمەی VARS دابگرە و بەشێوەی ئاسۆیی بجووڵێنە هەتا **Y-VARS** **1: Function** هەڵبژێرە پاشان **1:Y1** لە كۆتایدا دوگمەی ENTER دابگرە.

لەشاشەكە وێنەی ڕوونكردنەوەیی نەخشەكە $f(x)=2^x$ و پێچەوانەكەی و ڕاستەهێڵی $y=x$ دەردەكەوێت. سەرنجبدە پێچەوانەی پەیوەندییەكە، نەخشەیە كە بوارەكەی $\{x/x>0\}$ و مەوداكەی R دەبێت.

هەوڵبدە

وێنەی ڕوونكردنەوەیی خشتەی $f(x)=x^2$ و ڕوونكردنەوەی $f(x)=x$ بكێشە.

1. بەراوردبكە لە نێوان بواری نەخشەی $f(x)=x^2$ و مەوداكەی لە لایەك، بواری پێچەوانەی پەیوەندییەكە و مەوداكەی لە لایەكی تر، ئایا پێچەوانەی پەیوەندی بۆ نەخشەی $f(x)=x^2$ نەخشەیە؟

وێنەی ڕوونكردنەوەی نەخشەی $f(x)=x^3$ و نەخشەی $f(x)=x$ بكێشە.

2. بەراورد بكە لەنێوان بواری نەخشەی $f(x)=x^3$ و مەوداكەی لە لایەك و بواری پێچەوانەی پەیوەندییەكەی و مەوداكەی لە لایەكی تر ئایا پێچەوانەی پەیوەندی بۆ نەخشەی $f(x)=x^3$ نەخشەیە؟ بەڵگە بۆ وەڵامەكەت بهێنەوە.

3. **دەستەواژەیەك بنووسە** دەستەواژەیەك دەربارەی پەیوەندی نێوان بواری نەخشەو مەوداكەی لە لایەك و بواری پێچەوانەی پەیوەندی و مەوداكەی لە لایەكی تر بنووسە.

4. **دەستەواژەیەك بنووسە** دەستەواژەیەك دەربارەی پەیوەندی نێوان ڕوونكردنەوەی نەخشە و ڕوونكردنەوەی پێچەوانەی نەخشەكە بنووسە.

2-4

پێچەوانەی نەخشە
Inverse function



ئامانجەکان

- پەیوەندییەکی پێچەوانەی پەیوەندییەك بە ڕوونکردنەوەیی دەنوێنێت و جیای دەکاتەوە.
- دۆزینەوەی نەخشەیەك بۆ پێچەوانەی نەخشە.

زاراوەکان
Vocabulary

پێچەوانەی پەیوەندی
Inverse relation

پێچەوانەی نەخشە
Inverse function

کێ ئەمە بەکاردەهێنێت؟

دەتوانرێت پێچەوانەی نەخشە بۆ دۆزینەوەی نرخی شتومەك پێش بەکلاکردنەوەی بەکاربهێنرێت (نموونەی 5)

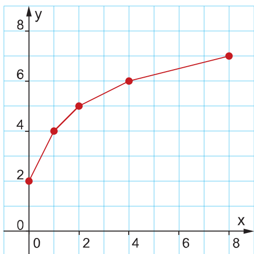
لە پۆلە بنەڕەتییەکان فێربویت، لێدەرکردن کردارێکی پێچەوانەی کۆکردنەوەیە واتە جێبەجێکردنی لێدەرکردن ئەنجامەکانی جێبەجێکردنی کۆکردنەوە لادەبات. بۆ نموونە: دژە کۆکردنەوەی ژمارە 3 بریتییە لە 3 − و دژە لێکدانی 5 بریتییە لە $\frac{1}{5}$.

دەتوانیت کرداری پێچەوانە لەسەر پەیوەندییەکان و نەخشەکان جێبەجێبکەیت. بۆ دەستکەوتنی وێنەی ڕوونکردنەوەیی بۆ **پێچەوانەی پەیوەندی Inverse relation** هەر پەیوەندییەك، وێنەی ڕوونکردنەوەیی پەیوەندییەکە بکێشە بە وێنەدانەوەی بەدەوری تەوەرەی $y = x$، ئەمەش هاوتای گۆڕینی شوێنەکان لە نێوان پۆتانی x ، y لە جووتە ڕێکخراوی هەر خاڵێك لە ڕوونکردنەوەی پەیوەندییەکەدا.

نموونـــە 1 وێنەی ڕوونکردنەوەیی پەیوەندییە پێچەوانەکە

پەیوەندیی ئەم نەخشەیە بنوێنە و خاڵەکانی بەیەکتر بگەیەنە. پاشان پێچەوانەی پەیوەندییەکەی بنوێنە و بوار و مەودای هەریەکە لە دوو پەیوەندییەکە دیاریبکە.

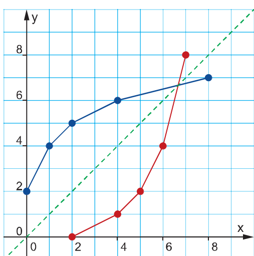
x	0	1	2	4	8
y	2	4	5	6	7



خشتەکە بەخاڵ بنوێنە، بەهێڵێکی گونجاو بەیەکیان بگەیەنە ئاڵوگۆڕ لە نێوان دوو تەوەرەی x و y لە جووتە ڕێکخراوی هەرخاڵێکدا، لە ڕوونکردنەوەی پەیوەندییەکە دابکە.

x	2	4	5	6	7
y	0	1	2	4	8

وێنەی هەر خاڵێك بکێشە بە وێنەدانەوەی بە دەوری ڕاستەهێڵی $y = x$ بە هێڵێکی گونجاو خاڵە دەستکەوتووەکان بەیەك بگەیەنە.



بواری نەخشەکە: $\{x / 0 \le x \le 8\}$

مەودای نەخشەکە: $\{y / 2 \le y \le 7\}$

بواری پێچەوانەی نەخشەکە $\{x / 2 \le x \le 7\}$

مەودای پێچەوانەی نەخشەکە $\{y / 0 \le y \le 8\}$

لە بیرت بێت

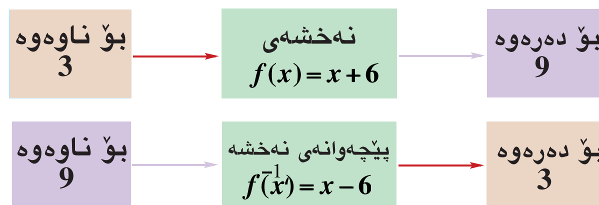
پەیوەندی: بریتییە لەکۆمەڵە جووتە ڕێکخراوێك.
نەخشە: بریتییە لەو پەیوەندییەی کە هەر بەهایەکی x بەتەنها یەك بەهای y دەبەستێتەوە



نەخشەکە بنوێنە و خاڵەکان بگەیەنە، پاشان پێچەوانەی پەیوەندییەکە بنوێنە بوارو مەودای هەریەك لە دوو پەیوەندییەکە دیاریبکە.

x	1	3	4	5	6
y	0	1	2	3	5

کاتێك پەیوەندییەکە دەبێت بە نەخشە، پێچەوانەکەی پەیوەندییکە بە $f^{-1}(x)$ هێما دەکرێت ئەمەش ناکاتە هەڵگەڕاوەی $f(x)$. ئەو دوو نەخشەیەی یەکتری هەڵدەوەشێنن پێیان دەوترێت **پێچەوانەی نەخشە Inverse functions** و هەریەکەیان پێچەوانەی نەخشەکەی تریان دەبێت.



بۆ دۆزینەوەی پێچەوانەی نەخشەکە، کردارە پێچەوانەکان بەکاربهێنە. هەرچەندە نەخشەی $f(x)$ ژمارە 6 دەخاتە سەر x ئەوا پێچەوانەی نەخشەکە $f^{-1}(x)$ ، ژمارە 6 لە x دەردەکات

نموونە 2 نووسینەوەی پێچەوانەی نەخشە بەبەکارهێنانی کردارە پێچەوانەکان

کردارە پێچەوانەکان بۆ دۆزینەوەی پێچەوانەی نەخشەکان بەکاربهێنە بۆ نەخشەی $f(x)=2x$

$f(x)=2x$ *لە نەخشەی $f(x)$ ژمارەی x لێکدانی 2 دەکرێت.*

$f^{-1}(x)=\frac{x}{2}$ *لە پێچەوانەی نەخشەی $f^{-1}(x)$ ژمارە x دابەشی 2 دەکرێت*

پاسادانی بکە. ژمارە 7 وەك ژمارەی تێکردن بەکاربهێنە.

$f(x)=2x$

$f(7)=2(7)$ *7 لە جیاتی x لە پێچەوانەی نەخشەکەدا دابنێ.*

$=14$

ژمارەی دەرچوو لە جیاتی x لە پێچەوانەی نەخشەکەدا دابنێ.

$f^{-1}(x)=\frac{x}{2}$

$f^{-1}(14)=\frac{14}{2}$ *14 لە جیاتی x دابنێ*

$=7$

پێچەوانەی نەخشە $f^{-1}(x)$ کاریگەری نەخشەی $f(x)$ لادەبات.



2. کردارە پێچەوانەکان بۆ دۆزینەوەی پێچەوانەی نەخشەی هەر نەخشەیەك بەکاربهێنە.

أ $f(x)=\frac{x}{3}$

ب $f(x)=x+\frac{2}{3}$

نموونە 3 نووسینەوەی پێچەوانەی نەخشە بۆ نەخشەیەکی فرە هەنگاو

کردارە پێچەوانەکان بۆ دۆزینەوەی پێچەوانەی نەخشەی $f(x)=\frac{x}{4}-5$ بەکاربهێنە

$f(x)=\frac{x}{4}-5$ *نەخشەی $f(x)$ ژمارەی x دابەشی 4 دەکات، لە پاشاندا 5 لە ئەنجامەکە دەردەکات.*

$f^{-1}(x)=4(x+5)$ *بۆ لابردنی 5 − پێویستە 5+ بخرێتە سەر x پاشاندا لە 4 ی بدە بۆ لابردنی کاریگەری دابەشی 4 .*

پاسادان بکە

$f(40)=\frac{40}{4}-5=10-5=5$? $f^{-1}(5)=4(5+5)=4(10)=40$ ✓



3. بۆ دۆزینەوەی پێچەوانەی نەخشەی $f(x)=5x-7$ کردارە پێچەوانەکان بەکاربهێنە.

دەتوانیت پێچەوانەی نەخشە بە ڕێگای ئاڵوگۆڕکردنی x و y لە ڕێسای نەخشەکەدا پاشان y بەپێی x هەژماربکە.

نموونـــــە 4 نووسینەوەی پێچەوانەی نەخشە و کێشانی ڕوونکردنەوەییەکەی.

وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشەی $f(x)=3x+6$ بکێشە، پاشان پێچەوانەی نەخشەکە بنووسە وێنە ڕوونکردنەوەییەکەی بکێشە.

$y=3x+6$ — $y=f(x)$ بنووسە و وێنەی ڕوونکردنەوەی نەخشەی $f(x)$ بکێشە.

$x=3y+6$ — ئاڵوگۆڕ لە نێوان x و y بکە

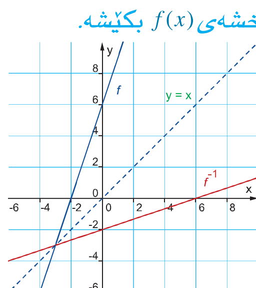
$x-6=3y$ — x بەپێی y بدۆزەوە

$\frac{x-6}{3}=y$

$y=\frac{x-6}{3}$ — پێچەوانەی نەخشەکە بە شێوەی ... = y بنووسە

$f^{-1}(x)=\frac{x-6}{3}$ — $y=f^{-1}(x)$ بنووسە

$=\frac{1}{3}x-2$ — سادەیبکە پاشان وێنەی ڕوونکردنەوەی پێچەوانەی نەخشەکە بکێشە.





وێنەی ڕوونکردنەوەی نەخشەی $f(x)=\frac{2}{3}x+2$ بکێشە. پاشان پێچەوانەی نەخشەکە وێنە ڕوونکردنەوەییەکەی بکێشە.

هەر جارێك ویستت کردارێك لابەیت، بە هەنگاوەکانتا بگەڕێوە دواوە. بە دەستپێکردن لە ئەنجامەکەوە هەتا گەیشتن بەچوونەناوی سەرەکی. لەم بارەدا دەتوانیت پێچەوانەی نەخشە بەکاربهێنیت.

نموونـــــە 5 جێبەجێکردن لە بازرگانیدا

بازرگانێك ئامێریکی وێنەگرتنی بە 103 140 دینار فرۆشت. ئەم برە پارە نرخی ئامێرەکە و زیادکردنی 3000 دینار نرخی کاغەزی بەرگ تێگرتنەکەی کەبازرگانەکە دایناوبوو 8% نرخی باجەکەی بوو. کڕیارەکە ئامێرەکەی بەدڵ نەبوو فرۆشیارەکە چۆن ئەو برە پارەیەی دەیگەڕێنێتەوە بۆ کڕیار هەژماردەکات.

هەنگاوی 1 نەخشەکە بنووسە کە بڕی تێچوونی بە پێی نرخی ئامێرەکە p دەنوێنێت.

$c(p)=1.08(p+3000)$ ، تێچوون وەك نەخشەیەك بە پێی نرخی ئامێرەکە

هەنگاوی 2 پێچەوانەی ئەو نەخشەیە بنووسە کە نرخی ئامێرەکە بە پێی تێچوونەکەی دەینوێنێت.

$c(p)=1.08(p+3000)$

$c(p)=1.08p+3240$ — بەشینەوەی بکە

$c(p)-3240=1.08p$ — 3240 لە هەردوو لا دەربکە

$\frac{c(p)-3240}{1.08}=p$ — دابەشیکە بۆ جیاکردنەوەی p

هەنگاوی 3 بەهای پێچەوانەی نەخشەکە هەژماربکە کاتێك $c=103\,140$

$p=\frac{103\,140-3240}{1.08}=92\,500$

بازرگانەکە پێویستە 92 500 دینار بداتەوە بە کڕیار

پاسەدانبکە

$c(p)=1.08(925\,00+3000)$ — بە لەجیاتی دانان

$=1.08(95\,500)$

$=103\,140$

بیرت بێت

لەکاتی شیکارکردنی پرسیارێکی ژیانی ڕۆژانەدا ئاڵوگۆڕ لەنێوان گۆڕاوی ئازاد و گۆڕاوی پەیوەست ناکرێت، چونکە هەریەکەیان تایبەتمەندی خۆی هەیە.



بۆ ئامادەکردنی چا $\frac{1}{6}$ کەوچکێك لە چا بۆ هەر کوپێك ئاو، و یەك کەوچك لە چا بۆ قۆرییەك ئاو بەکاربهێنە، پێچەوانەی نەخشە بۆ دیاریکردنی ژمارەی کوپەکان کاتێك 7 کەوچك چا بەکارهاتبێت.

بیربکەوە و تاوتوێبکە

1. ئەنجامی ئاڵوگۆڕکردنی نێوان x و y باسبکە، بۆ دۆزینەوەی پێچەوانەی نەخشەی $f(x) = x$ لە بەکارهێنانی ڕوونکردنەوەیی نەخشەی $f(x)$ دا، چۆن پێشبینی ئەو ئەنجامەت دەکرد؟

2. نموونەیەك بهێنەوە، بۆ نەخشەیەك پێچەوانەی پەیوەندییەکەی نەخشەبێت و نموونەیەکی تر پێچەوانەی پەیوەندییەکەی نەخشە نەبێت.

3. چیت دەستدەکەوێت کاتێك پێچەوانەی نەخشە دەدۆزیەوە بۆ پێچەوانەی نەخشەی$f(x)$؟

4. ئەم خشتەیەی بەرامبەر بکێشە و تەواوی بکە. نموونەیەك بێنەوە لەسەر نەخشەی$f(x)$ بۆناو و بۆ دەر و پێچەوانەی نەخشەکە بۆ $f(x)$

بۆ دەرەوە	→	نەخشەکە	→	بۆ ناوەوە
بۆ دەرەوە	→	پێچەوانەی نەخشەکە	→	بۆ ناوەوە



2-4 ڕاهێنانەکان

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

1 **زاراوەکان** لە کاتی ئاڵوگۆڕکردنی نێوان x و y هەردەم ئەنجامەکەی ___?___ پێچەوانەیە. (پەیوەندی یان نەخشەی)

بڕوانە نموونە 1

وێنەی ڕوونکردنەوەی ئەم نەخشانە بکێشە. کە بەم خشتانە نوێنراون. پاشان وێنەی ڕوونکردنەوەیی پێچەوانەی نەخشەکە بکێشە بوارو مەودای هەریەکە لە دوو پەیوەندییەکە دیارییبکە

2

x	1	2	3	4
y	1	2	4	8

3

x	3	4	1	−1
y	−1	−2	−4	−4

بڕوانە نموونە 2

کردارە پێچەوانەکان بۆ نووسینی پێچەوانەی نەخشە بەکاربهێنە.

4 $f(x) = x + 3$ **5** $f(x) = 4x$ **6** $f(x) = \frac{x}{2}$ **7** $f(x) = x - 2\frac{1}{2}$

بڕوانە نموونە 3

8 $f(x) = 5x - 1$ **9** $f(x) = \frac{x}{2} + 3$ **10** $f(x) = 3 - \frac{1}{2}x$

11 $f(x) = \frac{1}{2}(3 - 3x)$ **12** $f(x) = 4(x + 1)$ **13** $f(x) = \frac{3x-5}{2}$

بڕوانە نموونە 4

وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشەکە بکێشە، پاشان پێچەوانەی نەخشەکە بدۆزەوە و وێنە ڕوونکردنەوەکەی بکێشە.

14 $f(x) = 5 - 2x$ **15** $f(x) = \frac{x}{4} + 2$ **16** $f(x) = 10 + 0.6x$

بڕوانە نموونە 5

17 **باری کەش وهەوا** نەخشەی $C = \frac{5}{9}(F - 32)$ بەکاردێت بۆ گۆڕینی پلەکانی لە پێوەری فەهرەنهایت بۆ پێوەری سەدی پێچەوانەی نەخشەکە بدۆزەوە کە پلەکانی گەرما لە پێوەری سەدی بۆ پێوەری فەهرەنهایت دەگۆڕێت. $16°$ پلەی سەدی بۆ پلەکانی فەهرەنهایت بگۆڕە

ڕاهێنان و شیکارکردنی پرسیارەکان

وێنەی ڕوونکردنەوەی ئەم نەخشە بکێشە کەبەم خشتانە نوێنراون پاشان وێنەی ڕوونکردنەوەیی پێچەوانەی پەیوەندییەکە بکێشە، بوار و مەودای هەریەکە لە دوو پەیوەندییەکە دیارییبکە.

18

x	−1	2	3	5
y	1	3	5	5

19

x	−4	−2	0	2	4
y	−2	−1	0	1	2

بۆ شیکاری ڕاهێنانەکان	سەیری نموونە بکە
ڕاهێنانی ئازاد	
19–18	1
22–20	2
25–23	3
28–26	4
29	5

کرداره پێچەوانەکان بۆ نووسینی پێچەوانەی نەخشە بەکاربهێنە.

20 $f(x)=0.825x$ **21** $f(x)=x-1\frac{3}{4}$ **22** $f(x)=\frac{x}{0.25}$

23 $f(x)=21-32x$ **24** $f(x)=145+12.5x$ **25** $f(x)=\frac{1}{5}x+12$

وێنەی ڕوونکردنەوەیی هەر نەخشەیەك لەمانەی خوارەوە بکێشە و پاشان پێچەوانەی نەخشەکە بدۆزەوە و وێنەی ڕوونکردنەوەکە بکێشە.

26 $f(x)=\frac{4}{5}(x-15)$ **27** $f(x)=2-\frac{x}{3}$ **28** $f(x)=1.21x$

29 **فیزبوون** نموونەی هێڵی ژمارەی هەڵگرانی بەکالۆریۆس لە یەکێك لە وڵاتە گەورەکاندا ساڵانە 19 500 کەس زیاددەکات دەخەملێنێت، لە ساڵی 2001 دا ژمارەی هەڵگرانی بەکالۆریۆس 1.28 ملیۆن کەس بوو، پێچەوانەی نەخشەکە بەکاربهێنە، بۆ خەملاندنی ئەوەی دوای ساڵی 2001 چەند ساڵی تر دەخایەنێت تا ژمارەیان دەگاتە 1.7 ملیۆن کەس.

30 **بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە** وێنەی ئەو ڕاستەهێڵە بکێشە کە بە دوو خاڵی(2,9) (3,4) تێپەر دەبێت.

أ لاری ڕاستەهێڵەکە چەندە؟

ب لاری ڕاستەهێڵی ڕوونکردنەوەیی پێچەوانەی نەخشەکە چەندە؟

دەروازەیەك

فیزیا

شاخەوانەکان لە بەرزایی سەرەکەش لە ڕووی دەریاوە دەتوانن چایی کوڵاو بخۆنەوە چونکە پلەی گەرمی نزمە.

31 **فیزیا** پلەی کوڵانی ئاو لەسەر ڕووی دەریا 100 پلەی سەدییە.
$f(x)=100-3.37x$ نەخشەی پلەی کوڵانی ئاوە لە بەرزی x km لە ئاستی ڕووی دەریاوە دەنوێنێت.

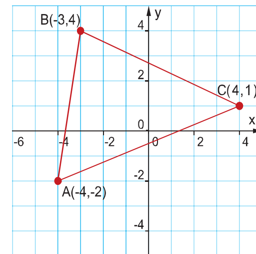
أ پێچەوانەی نەخشەکە بنووسە.

ب ئەو بەرزاییە چەندە کە پلەی کوڵانی ئاوتێیدا لە 90 پلەی سەدی کەمتر دەبێت وەڵامەکەت بۆ نزیکترین 10 m مەتر نزیکبکەوە.

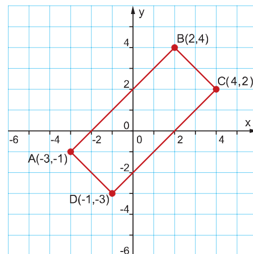
ج پلەی کوڵانی ئاو لە سەر لوتکەی شاخی لۆتس لە نیپاڵ 71.3 پلەی سەدییە، بەرزی ئەم لوتکە لە ئاستی ڕووی دەریا و بەمەتر بدۆزەوە؟

ئەندازە سەری ئەم شێوازە ئەندازەییانە بدۆزەوە کە پێچەوانەی پەیوەندییەکە دەنوێنێت.

32



33



34 **بیری ڕەخنەگر** پەیوەندی پێچەوانەی نەخشەی $f(x)=3$ چییە؟ ئایا ئەم پەیوەندییە پێچەوانەی نەخشەیە؟ ئەمە ڕوونبکەوە.

35 **بنووسە** لە پێشبڕکێی تێپەڕاندنی بڕبەکان، هەڵۆ لە ماوەی 12.59 چرکە 10 m ی بڕی وا دابنێ هەڵۆ ماوەکەی بە خێراییەکی نەگۆڕ بڕیوە. ئەو نەخشە بنووسەکە کە ماوەی بڕاو بەپێی کات دەنوێنێت. پێچەوانەی نەخشەکە بنووسە و بۆ هەژمارکردنی کاتی خەیانراو لە بڕینی ماوەی 25 m بە خێرایی نەگۆڕ بەکاربهێنە.

36 نرخی بلیتی چوونە ژوورەوە بۆ سێرکی جیهانی 22 000 دینارە. ئەگەر بە هۆی کارتی متمانە پارەکە بدرێتە سێرکەکە گوژمەکە بەبڕی 3 500 دینارە زیاد وەردەگرێت، ژمارەی پلیتە کڕاوکان هەر چەند بن.

أ نەخشەیەك بنووسە، ئەو بڕە پارەی بە هۆی کارتی متمانەوە دەدرێت بنوێنێت، بە پێی ژمارەی بلیتە کڕاوەکان n .

ب پێچەوانەی نەخشەکە بنووسە و بەکاریبهێنە بۆ دۆزینەوەی ژمارەی بلیتە کڕاوەکان بەهۆی کارتی متمانەوە، ئەگەر بزانیت بڕی تیچوونەکەی 157 500 دینار بووە.

ج ئایا لە تواناداییە تێچوونی کڕینی چەند بلیتێك بە هۆی کارتی متمانەوە 332 500 دینار بێت؟

37 **هەڵە لە شیكردنەوە** دوو خوێندكار هەستان بەدۆزینەوەی پێچەوانەی نەخشە بۆ نەخشەی $f(x)=\frac{1}{2}x+1$ كامیان هەڵەیە؟ هەڵەكە دیاریبكە.

أ
$f(x)=\frac{1}{2}x+1$
$f^{-1}(x)=2(x-1)$

ب
$f(x)=\frac{1}{2}x+1$
$f(x)=2x-1$

38 **بنووسە** ئەوەی لە نەخشەكە و ڕوونكردنەوەكەیدا ڕوودەدات دەربخە. كاتێك ئاڵوگۆڕ لە نێوان پۆوتانی هەر خاڵێك دەكرێت.



39 **بیری ڕەخنەگر** ئایا دەگونجێت پێچەوانەی پەیوەندییەكە بۆ پەیوەندییەك نەخشە نەبێت و ببێت بە نەخشە؟ بە نموونە وەڵامەكەت ڕوونبكەوە.

40 **كڵاوەكان** پێوانەی كڵاو بە پێی چێوەی سەر نەخشەیەكی هێڵییە پێوانەی كڵاوی سەرێك چێوەكەی 55 cm بێت بریتییە لە 17.5 و پێوانەی كڵاوی سەرێك چێوەكەی 57 cm بریتییە لە 18 .

أ نەخشەیەكی هێڵی بۆ پێوانەی كڵاوێك s بە پێی چێوەی سەرێك c بنووسە؟

ب پێچەوانەی پەیوەندییەكەی بدۆزەوە. ئایا نەخشەیە؟ چی دەنوێنێت؟

ج كڵاوێكت دۆزییەوە پێوانەكەی 18.5 چێوەی سەری خاوەنەكەی چەندە؟

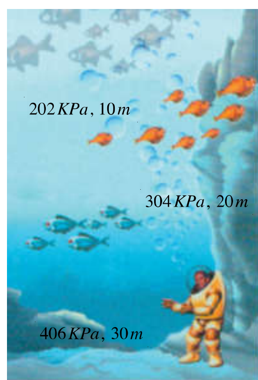
دیاریبكە، ئەگەر ئەم وتانە، هەمیشە ڕاستە، یان هەندێك جار ڕاستە یان هەمیشە هەڵەیە.

41 پێچەوانەی جووتە ڕێكخراوێك خاڵێك لە سەر وێنە ڕوونكردنەوەییەكە دەنوێنێت، كە بریتییە لەو جووتە ڕێكخراوەی وێنەكەی و وێنەدانەوەی خاڵەكیە بەدەوری ڕاستەهێڵی $y=x$

42 پێچەوانەی نەخشە بۆ نەخشەیەكی هێڵی، نەخشەیەكی هێڵییە.

43 پێچەوانەی نەخشە بۆنەخشەیەكی هێڵی لارییەكەی موجەب بێت، دەكاتە نەخشەیەكی هێڵی لارییەكەی سالبە

44 پێچەوانەی نەخشە بۆ نەخشەیەكی هێڵی لارییەكەی گەورەتر بێت لە 1 ، بریتییە لە نەخشەیەكی هێڵی لارییەكەی بچوكترە لە 1



45 پێچەوانەی پێچەوانەی خاڵێك بریتییە لە هەمان خاڵ.

46 پێچەوانەی پەیوەندی بۆ نەخشەی $y=k$ كاتێك k ژمارەیەكی نەگۆڕبێت، نەخشە نییە.

47 **چوونە ژێر ئاو** (غوص) ئەو كەسەی ئەم یارییە ئەنجام دەدات، دەزانێت پەستانی ئاو (بەكیلۆ باسكاڵ kpa دەپێورێت)، بەزیادبوونی قووڵایی ئاو (بەمەتر دەپێورێت) زیاددەكات، كە ژێر دەریاوانەكە پێی دەگات وێنەی بەرامبەر تایبەتە بە ئاوی سازگار.

أ پەستان وەك نەخشەیەك بە پێی قوڵی بنووسە.

ب بە شێوەیەكی گونجاو بوار و مەودای ئەم نەخشەیە دیاریبكە.

ج پێچەوانەی نەخشە بۆ نەخشەی لقی أ بدۆزەوە.

د ئایا قووڵاییەك هەیە لە نەخشەكە، بە هەمان ژمارە بۆ قوڵی و پەستان دەردەبڕێت؟ وەڵامەكەت ڕوونبكەوە.



ئامادەكردن بۆ تاقیكردنەوە

48 كام لەمانەی خوارەوە پێچەوانەی نەخشەیە بۆ نەخشەی $f(x)=4x-\frac{3}{4}$

أ $f^{-1}(x)=\frac{1}{4}x+\frac{3}{16}$ ب $f^{-1}(x)=-\frac{1}{4}x+3$

ج $f^{-1}(x)=\frac{1}{4}x+3$ د $f^{-1}(x)=-\frac{1}{4}x+\frac{3}{16}$

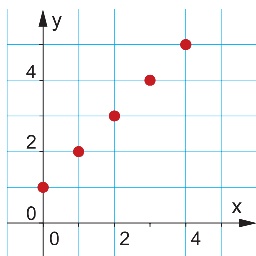
49 هێمن بۆ چاکردنی ئۆتۆمبێلەکەی 175 000 دینار بۆ نرخی پارچەی یەدەکی، 35 000 دینار بۆ هەر کاتژمێرێکی کە لە چاککردنەوەدا پیدەچێت، پارەدەدات. ئەم نەخشەیە $f(x)=175\,000+35\,000x$ ڕێسای هەژمارکردنی تێچوونی چاککردنەوەی ئۆتۆمبێلەکە بە پێی ژمارەی کاتژمێرەکان کە بۆ چاکردنەوەی دەیخایەنێت کام لەمانەی خوارەوە پێچەوانەی نەخشەکە دەنوێنێت؟

(أ) ژمارەی کاتژمێرەکان بە پێی تێچوون.
(ب) تێچوون بە پێی ژمارەی کاتژمێرەکان.
(ج) کرێی کاتژمێری چاککردنەوە بە پێی تێچوون
(د) تێچوون بە پێی کرێی کاتژمێری چاککردنەوە.

50 کام خاڵ پێچەوانەی خاڵی $(5,-2)$ دەبێت؟

(أ) $(-5,2)$ (ب) $(5,2)$ (ج) $(-2,5)$ (د) $(2,-5)$

51 **کورتە وەڵام** خشتەیەك درووستبکە، پێچەوانەی پەیوەندی بۆ ئەو پەیوەندییەی لە وێنەی ڕوونکردنەوەیی بەرامبەر دایە بنوێنێت.



بەرەنگاری و فراوانکردن

پێچەوانەی نەخشە بۆ هەر نەخشەیەك لەمانە بدۆزەوە کاتێك $y=f(x)$

52 $y=mx+b$ **53** $ax+by=c$ **54** $y-y_1=m(x-x_1)$

55 ئەو پەیوەندییەی لە خشتەی بەرامبەر پێناسەکراوە بەڕوونکردنەوەیی بنوێنە پاشان وێنەی هەر خاڵێك بە وێنەدانەوەی بەدەوری ڕاستەهێڵی $y=x$ بکێشە بۆ دەستکەوتنی وێنەی ڕوونکردنەوەیی پێچەوانەی پەیوەندییەکە. ئەگەر هاوکێشەی بنەڕەتی $y=x^2$ بێت. بە شێوەی جەبری بسەلمێنە کە هاوکێشەی پێچەوانەی پەیوەندییەکە بریتییە لە $x=y^2$

x	y
−3	9
−2	4
−1	1
0	0
1	1
2	4
3	9

56 **بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە** چی دەڵێت دەربارەی نەخشەیەکی هێڵی لارییەکەی و لاری پێچەوانەی نەخشەکە یەکسانن.

وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشەکە و پێچەوانەی نەخشەکە بکێشە.

57 $y=3$ **58** $y=x^3$ **59** $y=2^x$

پێداچوونەوەی لولپێچی

60 **بازرگانی** چەند پشکێك، بە بڕی 45 180 دینار کڕا، بۆ هەر پشکێك ئەم خشتەی بەرامبەر گۆڕانی نرخی پشکەکە پاش کڕینی دەنوێنێت. *(پۆڵەکانی پێشوو)*

نرخی پشك	
ڕۆژ	گۆڕان لە نرخدا
1	−230
2	+2580
3	−640
4	+1270
5	−2120

أ بەهای ئەم پشکانە لە کەمەوە بۆ زۆر ریز بکە، لەو نرخەوە کە لە ڕۆژی 0 ـە وەکە ڕۆژی کڕینە.

ب مەودای نرخەکان بە بەکارهێنانی زمانی کۆمەڵەکان بنووسە.

نەخشەیەکی ڕادەدار لە کەمترین پلەی لە توانادا بوو دا بنووسە، کە هاوکۆڵکەی سەرەکی 2 و سفرکانی ئەم ژمارە پێدراوانە بێت.

61 1، 2، −3 **62** $-\sqrt{5}$ ، $\sqrt{5}$ **63** 2، 1، −1 **64** 9، 8، −3

دیارییکە، نەخشەکە گەشەیە یان پووکانەوەیە، پاشان وێنەی ڕوونکردنەوەیی بکێشە *(وانەی 1-4)*

65 $f(x)=15\left(\frac{89}{100}\right)^x$ **66** $f(x)=\frac{1}{25}(0.5^x)$

67 $f(x)=2(1.1^x)$ **68** $f(x)=0.01(1.9^x)$

3-4 نەخشە لۆگاریتمییەکان

Logarithmic functions



ئامانجەکان

- شێوەی هاوتای نەخشەی توانی و نەخشەی لۆگاریتمی دەنووسێت و بەهایەکەی هەژمار دەکات.

زاراوەکان Vocabulary

لۆگاریتم Logarithm

لۆگاریتمی ئاسایی Common Logarithm

نەخشەی لۆگاریتم Logarithmic Function

کێ ئەمە بەکاردەهێنێت؟

لۆگاریتم بۆ پێوانی ترشی ئاو(PH) بەکاردێت

چەند جار دینارێك چەند جارە بکەیت دەبێتە 8 دینار؟ دەتوانیت ئەمە بە هاوکێشەیەك بنوێنیت $8 = (2^x)1$ لەوانەیە بتوانیت ئەم هاوکێشەیە بە هزری شیکار بکەیت، ئەگەر لە بیرت بێت کە $2^3 = 8$ کەواتە پێویستە یەك دینار 3 جار چەندجارە بکەیت بۆ ئەوەی 8 دینارت دەستکەوێت.

چەند جار دینارێك چەند جارە بکەیت بۆ ئەوەی ببێتە 512 دینار؟ دەتوانیت ئەم پرسیارە شیکاربکەیت، ئەگەر بتوانیت هاوکێشەی $2^x = 512$ شیکار بکەیت، بەبەکارهێنانی کرداری پێچەوانەی کرداری بەرزکردنەوەی ژمارەیەکی دیاریکراو بۆ هێزێك (توانێکی) دیاریکراو. ئەو کردارە پێچەوانەیە بریتییە لە هەژمارکردنی لۆگاریتمی. **لۆگاریتم** بریتییە لە توانی ئەو هێزەی کە بەرز دەکرێتەوە بۆ ژمارەیەکی (بنچینەیەکی) دیاریکراو بۆ ئەوەی بەهای دیاریکراوت دەستکەوێت، دەتوانیت هاوکێشەی توانی بە شێوەی هاوکێشەی لۆگاریتمی بنووسیت و بە پێچەوانەوە.

هاوکێشەی لۆگاریتمی   **هاوکێشەی توانی**

$$\log_b a = x \quad \longleftrightarrow \quad b^x = a$$

$$b > 0, b \neq 1$$

خوێندنەوە

$\log_b a = x$ بەم شێوەیە بخوێنەوە: x یەکسانە بە لۆگاریتمی a بە بنچینە b

سەرەنجبدە لۆگاریتم بریتییە لە توان.

نموونــــە 1 گۆڕین لە شێوەی توانی بۆ شێوەی لۆگاریتمی

هەر هاوکێشەیەکی توانی بەشێوەی لۆگاریتمی بنووسە.

	هاوکێشەی توانی	هاوکێشەی لۆگاریتمی
أ	$2^6 = 64$	$\log_2 64 = 6$
ب	$4^1 = 4$	$\log_4 4 = 1$
ج	$5^0 = 1$	$\log_5 1 = 0$
د	$5^{-2} = 0.04$	$\log_5 0.04 = -2$
هـ	$3^x = 81$	$\log_3 81 = x$

بنچینەی توان دەبێتە بنچینەی لۆگاریتم، توانی هێز بریتییە لە لۆگاریتم، هێزی هەر ژمارەیەك جگە لە سفر دەکاتە 1 لەوانەیە توان (یان لۆگاریتم) سالب بێت. لەوانەیە لۆگاریتم (یان توان) گۆڕاو بێت.



1. ئەم هاوکێشە توانییانە بە شێوەی لۆگاریتمی بنووسە.

أ $9^2 = 81$ ب $3^3 = 27$ ج $x^0 = 1 (x \neq 0)$

نموونـــه 2 گۆڕین لە شێوەی لۆگاریتمی بۆ شێوەی توانی.

هاوکێشەی لۆگاریتمی بەشێوەی توانی بنووسە

	هاوکێشەی لۆگاریتمی	هاوکێشەی توانی
أ	$\log_{10} 100=2$	$10^2=100$
ب	$\log_7 49=2$	$7^2=49$
ج	$\log_8 0.125=-1$	$8^{-1}=0.125$
د	$\log_5 5=1$	$5^1=5$
هـ	$\log_{12} 1=0$	$12^0=1$

بنچینەی لۆگاریتم دەبێتە بنچینەی هێز

لۆگاریتم بریتییە لە توانی هێز، لەوانەیە لۆگاریتم سالب بێت



2. هاوکێشەی لۆگاریتمی بە شێوەی توانی بنووسە.

أ $\log_{10} 10=1$ ب $\log_{12} 144=2$ ج $\log_{\frac{1}{2}} 8=-3$

لۆگاریتم توانە. ئەمەش ڕێگات پێدەدات، یاسایەکانی هێز لەسەر لۆگاریتمەکان جیبەجێبکەیت. لەوانەیە ئەو سیفەتانەی خوارەوەت سەرەنجدابێت، لە دوا نموونەدا.



هەندێک سیفەتی لۆگاریتمەکان

b هەر بنچەینەیەک بێت کاتێک $b>0$ و $b\neq 1$.

شێوەی لۆگاریتمی	شێوەی توانی	نموونە
لۆگاریتمی b بنچینەی b		
$\log_b b=1$	$b^1=b$	$\log_{10} 10=1$ $10^1=10$
لۆگاریتمی 1		
$\log_b 1=0$	$b^0=1$	$\log_{10} 1=0$ $10^0=1$

تێبینی:

ئەگەر $1>b>0$

ئەوا $\log_n =$

ژمارەیەکی سالب

کاتێک $n>0$

لۆگاریتمی ئاسایی لۆگاریتمی بنچینە 10. ئەگەر بنچینەی لۆگاریتم دیاری نەکرابێت، ئەوا 10 یە نموونە $\log 5=\log_{10} 5$

نموونـــه 3 هەژمارکردنی بەهای لۆگاریتم بە هزری.

بەهای ئەمانەی خوارەوە بە هزری هەژماربکە.

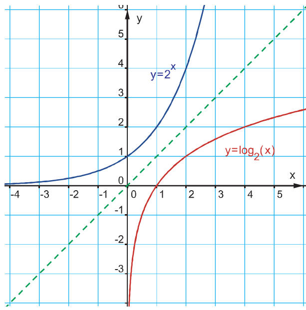
أ
$\log 1000$
$10^? = 1000$
$10^3 = 1000$
$\log 1000 = 3$

ب
$\log_4 \frac{1}{4}$
$4^? = \frac{1}{4}$
$4^{-1} = \frac{1}{4}$
$\log_4 \frac{1}{4} = -1$



3. بەهزری بەهای ئەم برانە بدۆزەوە.

أ $\log 0.00001$ ب $\log_{25} 0.04$

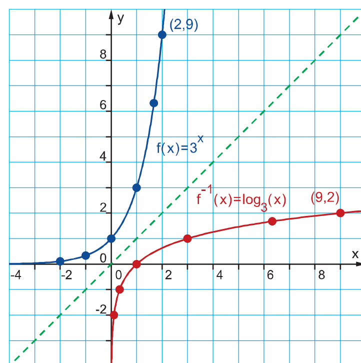


لەبەر ئەوەی لۆگاریتم پێچەوانەی توانە، ئەوا پێچەوانەی نەخشەیەکی توانی وەك $y=2^x$ بریتییە لە نەخشەی لۆگاریتمی $y=\log_2 x$، پێویستە لە بیرتبێت کە بواری هەریەك لە دوو نەخشەکە بریتییە لە مەودای نەخشەکەی تر، مەودای هەریەکیان بریتییە لە بواری ئەویتریان.
بواری نەخشەی $y=2^x$ بریتییە لە کۆمەڵەی هەموو ژمارە ڕاستییەکان R و مەوداکەی بریتییە لە کۆمەڵەی ژمارەی ڕاستییە موجەبەکان $\{y|y>0\}$
لەوەوە دەردەچێت کە بواری نەخشەی لۆگاریتمی $y=\log_2 x$. بریتییە لە کۆمەڵەی ژمارە ڕاستییە موجەبەکان $\{x|x>0\}$ و مەوداکەی کۆمەڵەی هەموو ژمارە ڕاستییەکانە R .

نموونـــــه 4 وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشە لۆگاریتمییەکان

بەها دراوەکانی گۆڕاوی x بۆ کێشانی وێنەی ڕوونکردنەوەیی پێچەوانەی نەخشەکە بکێشە، بوار و مەودای پێچەوانەی نەخشەکە دیاریبکە.

أ $f(x)=3^x$ ؛ $x=-2,-1,0,1,2$



وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشەی $f(x)=3^x$ بەبەکارهێنانی خشتەی بەهایەکان بکێشە.

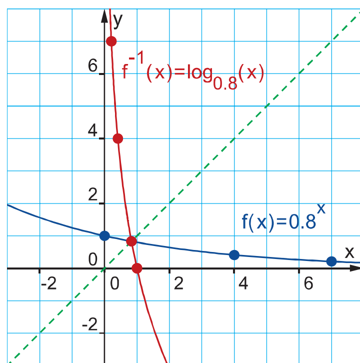
x	-2	-1	0	1	2
$f(x)=3^x$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9

بۆ ئەوەی وێنەی ڕوونکردنەوەیی پێچەوانەی نەخشەکە $f^{-1}(x)=\log_3 x$ بکێشێت x، $f(x)$ لە خشتەی سەرەوەدا ئاڵوگۆڕ بکە

x	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9
$f^{-1}(x)=\log_3(x)$	-2	-1	0	1	2

بواری پێچەوانەی $f^{-1}(x)$ بریتییە لە $\{x|x>0\}$ و مەوداکەی R.

ب $f(x)=0.8^x$ ؛ $x=-3,0,1,4,7$



وێنەی ڕوونکردنەوەی نەخشەی $f(x)=0.8^x$ بەبەکارهێنانی خشتەی بەهایەکان بکێشە.

x	-3	0	1	4	7
$f(x)=0.8^x$	2	1	0.8	0.4	0.2

بۆ ئەوەی وێنەی ڕوونکردنەوەیی پێچەوانەی نەخشەی $f(x)^{-1}=\log_{0.8} x$ بکێشیت x و $f(x)$ ئاڵوگۆڕ بکە لە خشتەی سەرەوە.

x	2	1	0.8	0.4	0.2
$f^{-1}(x)=\log_{0.8} x$	-3	0	1	4	7

بواری پێچەوانەی نەخشەی $f^{-1}(x)$ بریتییە لە $\{x|x>0\}$ و مەوداکەی R ـە



4. بەهایەکانی $x=-2,-1,1,2,3$ بۆ کێشانی وێنەی ڕوونکردنەوەی نەخشەی $f(x)=\left(\frac{3}{4}\right)^x$ بەکاربهێنە پاشان وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشەی پێچەوانەی نەخشەکە، و بوار و مەودای پێچەوانەی نەخشەکە دیارییکە.

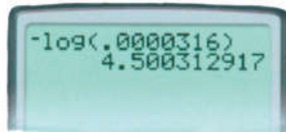
نموونـــه 5 جێبەجێکردن لەسەر ژینگە

کیمیازانان بە شێوەی دووبارە بوونەوە سامپلەکانی باران بۆ دیاریکردنی ترشییەکەی تاقیدەکەنەوە، واتا دیاریکردنی خەستی ئایۆنەکانی هایدرۆجین(H^+)تێیدا. ترشی ئاوی باران بەبەکارهێنانی pH بە پێی ئەم نەخشە دەپێورێت:
$pH = -\log\left[H^+\right]$ کاتێک $\left[H^+\right]$ خەستی ئایۆنەکانی هایدرۆجینە کە بە مۆڵ لەیەك لیتر لە ئاوی باران دەپێورێت. pH ی ئاوی باران لە هەر شوێنێك بدۆزەوە.

أ **شوێنی A** کاتێك خەستی ئایۆنەکانی هایدرۆجین 0.0000316 مۆڵ لە لیتر بێت.

$$pH = -\log\left[H^+\right]$$

$$pH = -\log(0.0000316)$$ لە جیاتیدابنێ

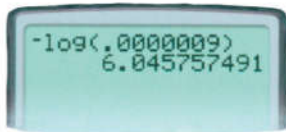


بژمێر بەکاربهێنە، بۆ دۆزینەوەی بەهای لۆگاریتمی بەبنچینە 10 دوگمەی log دابگرە. pH ی ئاوی باران لە شوێنی A بە نزیکەیی بریتییە 4.5

ب **شوێنی B** کاتێك خەستی ئایۆنەکانی هایدرۆجین دەگاتە 0.0000009 مۆڵ لە لیتر.

$$pH = -\log\left[H^+\right]$$

$$pH = -\log(0.0000009)$$



بژمێر بە کاربهێنە بۆ دۆزینەوەی لۆگاریتمی بنچینە 10 دوگمەی log دابگرە. pH ئاوی باران لە شوێنی B بریتییە لە 6 بەنزیکەیی.



.5 pH چای سارد دەگاتە چەند، خەستی ئایۆنەکانی هایدرۆجین تێیدا 0.000158 مۆڵ لە لیترێك بێت.

بیربکەوە و تاوتوێبکە

.1 ئەو هۆیە چییە کەوا دەکات $\log_b b$ بکاتە 1 ژمارەی موجەبی b هەر چەندێك بێت جگە لە 1 .

.2 روونیبکەوە ئایا $\log_a b$ و $\log_b a$ یەکسانن. پاڵپشتی وەڵامەکەت بکە

.3 رێکخەربە هێڵکاری بەرامبەر دروستبکەو تەواوی بکە.



پێناسە	سیفەتەکانی
نەخشەی لۆگاریتمی	
نموونەکان	دژە نموونە

3–4 ڕاهێنانەکان

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

1 **زاراوەکان** لۆگاریتم لە هاوکێشەی توانی $a^x = b$ بریتییە لە ___؟

پروانە نموونە 1

هاوکێشەی توانی بە شێوەی لۆگاریتم بنووسە.

2 $2.4^0 = 1$ **3** $4^{1.5} = 8$ **4** $10^{-2} = 0.01$ **5** $3^x = 243$

پروانە نموونە 2

هاوکێشەی لۆگاریتمی بە شێوەی توانی بنووسە.

6 $\log_4 0.0625 = -2$ **7** $\log_x(-16) = 3$ **8** $\log_{0.9} 0.81 = 2$ **9** $\log_6 x = 3$

پروانە نموونە 3

بە هزری ئەمانەی خوارەوە هەژماربکە

10 $\log_7 343$ **11** $\log_3 \frac{1}{9}$ **12** $\log_{0.5} 0.25$ **13** $\log_{1.2} 1.44$

پروانە نموونە 4

وێنەی ڕوونکردنەوەیی ئەم نەخشانە بکێشە، بەبەکارهێنانی بەها پێدراوەکان. پاشان وێنەی ڕوونکردنەوەیی پێچەوانەی نەخشەکە بکێشە، بوار و مەودای پێچەوانەی نەخشەکە بدۆزەوە.

14 $x = -2,-1,0,1,1.5$ ؛ $f(x) = 5^x$ **15** $x = -2,-1,0,1,2$ ؛ $f(x) = 0.5^x$

پروانە نموونە 5

16 **کیمیا** بۆ لێکۆلینەوەی هێزی ترشی گیراوەیەك، کیمیازانان نەخشەی $pOH = -\log\left[OH^-\right]$ بەکاردێنن کاتێك $\left[OH^-\right]$ هێما دەکرێت بۆ خەستی ئایۆنەکانی هایدرۆکسید کە بە مۆڵ لە لیترێك دەپێورێت. بەهای pOH ی ئاوێك چەندە خەستی ئایۆنەکانی هایدرۆکسید تێیدا 0.000000004 بێت؟

ڕاهێنان وشیکارکردنی پرسیارەکان

ڕاهێنانی ئازاد	
بۆشیکارکردنی ڕاهێنانەکان	سەیری نموونە بکە
20–17	1
24–21	2
28–25	3
30–29	4
31	5

ئەم هاوکێشە توانییانە بە شێوەی لۆگاریتمی بنووسە.

17 $x^{2.5} = 32$ **18** $6^x = 216$ **19** $1.2^0 = 1$ **20** $4^{-1} = 0.25$

ئەم هاوکێشە لۆگاریتمییانە بە شێوەی توانی بنوسە.

21 $\log_5 625 = 4$ **22** $\log_2 x = 6$ **23** $\log_{4.5} 1 = 0$ **24** $\log_\pi \pi = 1$

بەهزری بەهای ئەمانە هەژماربکە.

25 $\log_2 1$ **26** $\log 0.001$ **27** $\log_4 64$ **28** $\log_{0.1} 100$

ئەم بەها پێدراوانە بۆ گۆڕاوی x بەکاربهێنە، بۆ کێشانی وێنەی ڕوونکردنەوەی نەخشەکە، پاشان وێنەی ڕوونکردنەوەی پێچەوانەی نەخشەکە بکێشە، بوار و مەودای پێچەوانەی نەخشەکە دیاریبکە.

29 $x = -2,-1,0,1,2,3$ ؛ $f(x) = \left(\frac{4}{5}\right)^x$ **30** $x = -2,-1,0,1,2,3$ ؛ $f(x) = \left(\frac{4}{3}\right)^x$

تێبینی

ئەگەر بژمێرت نەبێ
$\log(0.000000004) \approx -8.4$

31 **باخچەکان** ڕەنگی گوڵەکانی ئورتانسیا دیاریدەکرێت بە پێی بەهای pH ی خاکەکەی.


6<pH<6.5


5.5<pH<6


5<pH<5.5

ڕێکخەری باخچەیەك خەستی ئایۆنەکانی هایدرۆجینی لە خاکی باخچەکە پێوا، و بینی دەکاتە 0.0000006 مۆڵ لە لیترێك. ئایا ئەو خاکە گوڵی ئۆرتانسیای شینی لێ دەڕوێت؟

32 **کارتی متمانە** لە هەندێك کارتەکانی متمانەدا، نەخشەی $n=\frac{\log A-\log P}{\log(1.0175)}$ هەژمارکردنی ژمارەی n لەو مانگانەی کە بەسەر سپاردنی گوژمەی بنەڕەتی p تێپەڕیوە، تا پارەکەی دەگاتە ئەو بڕەی ئێستای A و وا دابنێ ئەو پارەکەی لەو کاتەوە هیچ بڕێکی نەچۆتەسەر و لەم ماوەیەدا کارتەکە بەکارنەهاتووە.

أ ئاوات گوژمەی 1 000 000 دیناری دانا و حسابی ئێستای کارتەکەی 1 210 260 دینارە. چەند مانگ بەسەر سپاردنی گوژمەی بنەڕەتی تێپەڕیوە؟

ب ئەو پارە چەند مانگی تری پێویستە بۆ ئەوەی لە 1 420 000 دینار تێپەڕێت.

ج تێبینی چی لە وەڵامەکانی دوو پرسیاری پێشوو دەکەیت؟

33 **بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە** بەهای b چەندە، ئەگەر زانیت $\log_a b=0$ ؟ ئەمە ڕوونبکەوە

تونای	دەنگ
$10^{15}I_0$	هەڵفرینی فرۆکە
$10^{12}I_0$	دریل
$10^{7}I_0$	وشککەرەوەی قژ
$10^{3}I_0$	چرپە (دەنگیکی نزم)
$10^{2}I_0$	دەنگی جوولەی پەلکەدار
I_0	دەنگی گویچکە خۆی

34 **دەنگەکان** ئاستی توندی دەنگ L بە پێوەری لۆگاریتمی دەپێوڕێت، بەبەکارهێنانی نەخشەی $L=10\log\left(\frac{I}{I_0}\right)$، کاتێك L هێمای ئاستی توندی دەنگ بێت کە بەدیسیبل Decibel پێوراوە، و هێمای I توندی دەنگەکە بێت، هەروەها I_0 هێما بێت بۆ توندی دەنگی گوێچکەی خۆی

أ ئاستی توندی هەر دەنگێك لە خشتەی بەرامبەر دیاریبکە.

ب ئاستی توندی دەنگ لە یەکێك لە جۆرەکانی مۆسیقای توند 110 دیسیبلە ئەو دەنگە لە کوێ دادەنێیت بۆ ئەوەی خشتەکە بەرێکی بمێنێتەوە.

ج **چی دەبێت ئەگەر ...؟** دیسبل دەیەکی یەکە پێوانەییەکی ترە، کە بریتییە لە Bel

35 **بیری ڕەخنەگر** ئەگەر n ژمارەیەکی ڕاستی بێت و 10^n بە شێوەی ڕەنووس نووسرا بێت ئایا $\log 10^n$ یەکسانە بە ژمارەی سفرەکان لە 10^nدا، پاڵپشتی وەڵامەکەت بەنموونەیەك بکە.

36 **خەمڵاندن** بە سوود وەرگرتن لە $\log 100=2$ و $\log 1000=3$ هەریەك لە $\log 200$ و $\log 500$ بخەڵێنە.

37 **خواردن** خشتەی بەرامبەر بەکاربهێنە بۆ دیاریکردنی جۆری هەر شەربەتێك بەزانینی خەستی ئایۆنەکانی هایدرۆجین لە لیترێکی ئەو شەربەتە.

أ 0.00014 مۆڵ لە لتر

ب 0.0081 مۆڵ لە لتر

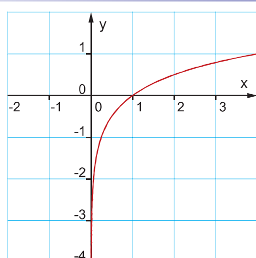
ج 0.00074 مۆڵ لە لتر

مۆڵpH	شەربەت
$2.0-2.6$	لیمۆ
$2.9-3.2$	مێووژ
$3.3-4.1$	پرتەقاڵ
$4.1-4.6$	تەماتە

38 **بنووسە** هۆی چییە کە $\log_0 3$ و $\log_1 3$ پێناسە نەکراون

ئامادەکردن بۆ تاقیکردنەوە

39 ئەم ڕوونکردنەوەی بەرامبەر هی کام لەم نەخشانەیە.



أ $f(x)=\log x$

ب $f(x)=\log_4 x$

ج $f(x)=\log_2 x$

د $f(x)=2^x$

40 کام لەم هاوکێشە لۆگاریتمییانە هاوتای $2^7 = 128$ دەبێت؟

(أ) $\log_7 2 = 128$ (ج) $\log_2 7 = 128$

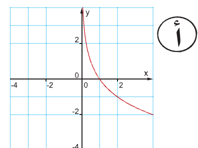
(ب) $\log_2 128 = 7$ (د) $\log_7 128 = 2$

41 کام لەمانەی خوارەوە باشترین خەملێندراوی بەهای $\log 50$ دەبێت؟

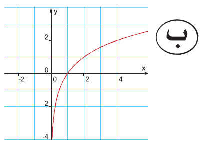
(أ) 1.7 (ب) 2.5 (ج) 5 (د) 10

42 کام لەم ڕوونکردنەوانە باشترین نواندە بۆ نەخشەی $f(x) = \log_{0.5} x$ ؟

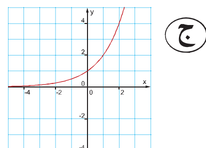
(أ)



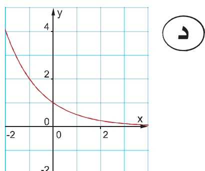
(ب)



(ج)



(د)



43 **کورتە وەڵام** بەهای $\log_2 64$ بدۆزەوە.

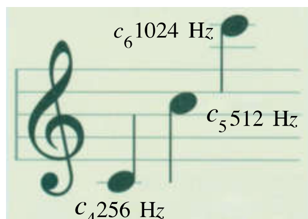
بەرەنگاری و فراوانکردن

44 وێنەی ڕوونکردنەوەیی دوو نەخشەی $\log_7 x$ و $\log_{0.7} x$ بکێشە باسی جیاوازی نێوان دوو نەخشەکە بکە، بە پشتبەستن بە ڕوونکردنەوەکانیان.

45 بەهای $\log_3 9$ و $\log_3 27$ و $\log_3 243$ هەژماربکە دەستەواژەیەك لە بارەی پەیوەندی نێوان ئەم سێ برە لۆگاریتمییانە بنووسە، بەبەکارهێنانی گۆڕاوەکان گشتاندن بکە.

46 بسەلمێنە $\log_7 7^{2x+1} = 2x+1$ لەگەڵ نووسینی هەر هەنگاوێك

47 **مۆزیك** پێوەری مۆسیقا پێوەری لۆگاریتمییە. لەو پێوەرەدا دەتوانین لەرەلەرەی هەر نۆتەیەك بە ژمارەی لەرەلەرەکان لەهەر چرکەیەکدا دەرببڕین، یان ژمارەی هێرتزەکان بە هێزێك لە هێزەکانی ژمارە 2 دەرببڕین.



(أ) لەرەلەرەی نۆتەی C_7 بە شێوەی توانی و بە شێوەی لۆگاریتمی هەژماربکە.

(ب) ئەو نۆتەیە چییە کە لەرەلەرەکەی دەگاتە 32 هێرتز؟

پێداچوونەوەی لولپێچی

ئەم برانە بە سادەترین شێوە بنووسە، وا دابنێ بەهای هەموو گۆڕاوەکان سفر نین (پۆلەکانی پێشوو)

48 $\left[\left(2a^4\right)\left(5b^2\right)\right]^2$

49 $\dfrac{8s^2t^6}{4st^8}$

50 $-2t^2\left(5st^{-1}\right)$

51 $7a^{-2}b^3\left(3ab+4a^{-1}b^2\right)$

52 **بیناکاری** کاتی دروستکردنی بینایەك، بەردێك لەبەرزی $7\ m$ کەوتە خوارەوە، نەخشەی $h(t) = h_0 - 4.9t^2$ بەکاربهێنە بۆ هەژمارکردنی ئەو کاتەی دەیخایەنێت تاوەکو بەردەکە دەگاتە زەوی، با h هێمایی بەرزی بەردەکە بێت بەمەتر پاش t چرکە لە کەوتنی و h_0 هێمای بەرزی بنەڕەتی بێت بە مەتر پیش کەوتنی (قۆناغەکانی پێشوو).

خشتەی بەهایەکانی هەر نەخشەیەك تەواوبکە. بەهایەکان بۆ نزیکترین بەش لەسەد نزیکبکەوە.

	x	-2	-1	0	1	2
53	$f(x) = 1.7^x$					
54	$f(x) = 0.6^x$					
55	$f(x) = 0.3^x$					

بەشی 4

تاقیکردنەوەی نیوەی بەش

1-4 نەخشەکانی توانی و گەشەو پووکانەوە

دیاریبکە، ئایا هەریەك لەم نەخشانە نەخشەی گەشەکردن یان نەخشەی پووکانەوەیە.

1. $f(x)=\left(\frac{1}{4}\right)^x$
2. $f(x)=\frac{1}{5}(0.2)^x$
3. $f(x)=14(1.4)^x$
4. $f(x)=6.4\left(1\frac{3}{8}\right)^x$

5. وا دابنێ ژمارەی بەکتریاکانی چاندنێکی بایەلۆجی لە ڕۆژی دوو شەممە دەگاتە 1000 و ژمارەکەی بە ڕێژەی 50% ڕۆژانە لە و کاتەوە زۆر دەبێت

أ نەخشەیەك بنووسە ژمارەی گەشەکردنی بەکتریاکان بە پێی کات بنوێنێت (هەژمارکردن بەپێ ڕۆژ بێت)

ب وێنەی ڕوونکردنەوەی ئەو نەخشەی نووسیوتە بکێشە، بۆ خەمڵاندنی ژمارەی بەکتریاکان لە دووشەممەی داهاتوودا بەکاربهێنە.

2-4 پێچەوانەی پەیوەندی و پێچەوانەی نەخشە

بەڕوونکردنەوەیی ئەو پەیوەندییە بنوێنە کە بەهایەکانی لە خشتەکەدا هاتووە، پاشان پێچەوانەی پەیوەندییەکان بە ڕوونکردنەوەیی بنوێنە

6.

x	−1	0	1	2	3
y	0	4	8	12	16

7.

x	0	1	2	3	4
y	−1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	$1\frac{2}{3}$

ڕوونکردنەوەی هەر نەخشەیەك بکێشە. پێچەوانەی نەخشەکە بنووسە و ڕوونکردنەوەکەی بکێشە.

8. $f(x)=x+2.1$
9. $f(x)=\frac{3}{4}-x$
10. $f(x)=5x+4$
11. $f(x)=0.4\left(\frac{x}{2}+1.5\right)$

12. تێچوونی چاککردنەوەی بژمێری میران 210 000 دینارە، نرخی پارچەی یەدەگ و 55 000 دینار بۆ کرێی هەر کاتژمێرێکی کار. نەخشەی $f(x)=55\,000x+21\,0000$ تێچوونی چاککردنەوەی بژمێر بەپێی ژمارەی کاتژمێری خایەنراو بۆ چاککردنەوە دەنوێنێت. پێچەوانەی نەخشەکە بدۆزەوە، و بۆ دۆزینەوەی ژمارە کاتژمێرە خایەنراوەکانی چاککردنەوەی بژمێرەکەی میران بەکاربهێنە، ئەگەر زانیت تێچوونەکە گەیشتە 402 500 دینار.

3-4 نەخشە لۆگاریتمییەکان

هەریەك لەم هاوکێشە توانییانە بە شێوەی لۆگاریتمی بنووسە.

13. $3^2=9$
14. $17.6^0=1$
15. $2^{-2}=0.25$
16. $0.5^x=0.0625$

هەریەك لەم هاوکێشە لۆگاریتمیانە بە شێوەی توانی بنووسە

17. $\log_4 64=3$
18. $\log_{\frac{1}{5}} 25=-2$
19. $\log_{0.99} 1=0$
20. $\log_a x=5$

21. وێنەی ڕوونکردنەوەی نەخشەی $f(x)=\left(\frac{5}{6}\right)^x$ بکێشە، بەبەکارهێنانی بەهایەکانی $x=-1,0,2,3$ وێنەی ڕوونکردنەوەی پێچەوانەی نەخشەکە بکێشە.



4-4 سیفەتەکانی لۆگاریتم

Properties of Logarithm

ئامانجەکان

- سیفەتەکانی لۆگاریتم بۆ نووسینی بڕە لوگاریتمییەکان بە سادەترین شێوە بەکاردێنێت.
- لۆگاریتم بە بنچینەیەکی دیاریکراو دەگۆڕێت بۆ لۆگاریتم بە بنچینەییەکی تر.

کێ ئەمە بەکاردەهێنێت؟

زانایانی بوومەلەرزە لۆگاریتم بەکار دەهێنن بۆ هەژماری ئەو ووزەیەیی لە بوومەلەرزەکان دەردەچێت (نموونەی 6).

دەتوانرێت نەخشەی لۆگاریتمی $pH=-\log\left[H^+\right]$ دەربڕین بۆ هەژماری ئەو pHـەی لەوانەی پێشوو ناسیت بە شێوەی توانی $\left[H^+\right]=10^{-pH}$. لەبەر ئەوەی لۆگاریتم بریتییە لە توان، ئەوا سیفەتەکانی هێز سیفەتەکانی لۆگاریتم دروستدەکات.
بیرتبێت، بۆ ئەوەی دوو هێز لە یەکتر بدەیت هەمان بنچینەیان هەبێت دوو توانەکە کۆبکەوە $b^m b^n=b^{m+n}$

فێربە و سەرنج بدە

سیفەتەکانی ئەنجامدانی لێکدان لە لۆگاریتم

m و n دوو ژمارەی موجەب بن، وb هەر ژمارەیەکی ڕاستی بێت $(b>0$ و $b\neq1)$

بەنووسین	ژمارە	لە جەبر
لۆگاریتمی ئەنجامی لێکدان دەکاتە سەرجەمی لۆگاریتمەکانی هاوکۆلکەکان.	$\log_3 1000=\log_3(10\times100)$ $=\log_3 10+\log_3 100$	$\log_b(mn)=\log_b(m)+\log_b(n)$

دەتوانرێت ئەو سیفەتەی سەرەوە بە ئاڕاستەی پێچەوانە بەکاربهێنرێت، بۆ نووسینی سەرجەمی لۆگاریتم کە هەمان بنچینەیان هەیە. وەك یەك لۆگاریتم، دەتوانرێت بە سادەترین شێوە بینووسین.

نموونـــــە 1 کۆکردنەوەی لۆگاریتمەکان

ئەم بڕە وەك یەك لۆگاریتم بنووسە.

$$\log_4 2+\log_4 32$$

$\log_4(2\times32)$ — بۆ کۆکردنەوەی دوو لۆگاریتم دوو

$\log_4 64$ — سادەبکە.

3 — بیر بکەوە $4^?=64$



1. ئەم بڕە وەك یەك لۆگاریتم بنووسە، ئەگەر توانرا سادەی بکە.

أ $\log_5 625+\log_5 25$ ب $\log_{\frac{1}{3}} 27+\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{9}$

بیرت بێت بۆ ئەوەی دو هێز دابەشبکەیت، هەمان بنچینەیان هەبێت توانەکان لەیەکتر دەربکە. $\frac{b^m}{b^n}=b^{m-n}$ لەبەر ئەوەی لۆگاریتم توانە، ئەوا لێدەرکردنی لۆگاریتمییەکان لەیەکتر کە هەمان بنچینەیان هەیە بریتییە لە دۆزینەوەی لۆگاریتمی ئەنجامی دابەشکردنی دوو هێز هەمان بنچینەیان هەبێت.



سیفەتی ئەنجامی دابەشکردنی لۆگاریتم

m و n دوو ژمارەی هەرچۆنێکی موجەب بن، و b هەر ژمارەیەکی راست بێت b $(b>0$ و $b\neq 1)$

بەنووسین	ژمارە	لە جەبر
لۆگاریتمی ئەنجامی دابەشکردن بریتییە لە ئەنجامی لێدەرکردنی لۆگاریتمی بەشدراو لە لۆگاریتمی بەشکراو	$\log_5\left(\frac{16}{2}\right)=\log_5(16)-\log_5(2)$	$\log_b\left(\frac{m}{n}\right)=\log_b(m)-\log_b(n)$

ئاگاداربە!

هەروەک چۆن ناتوانرێت a^5b^3 سادە بکەیتەوە هەروەها ناتوانیت برێکی لۆگاریتمی سادە بکەیتەوە ئەگەر بنچینەکانیان جیاوازبێت.

نموونە 2 لێدەرکردنی لۆگاریتمەکان

$\log_2 32-\log_2 4$ وەک یەک لۆگاریتم بنووسە، و ئەگەر کرا سادەیبکە.

$\log_2 32-\log_2 4$

$\log_2\left(\frac{32}{4}\right)$ بۆ لێدەرکردنی دوو لۆگاریتمەکە، دوو ژمارەکە دابەشبکە سادە بکە.

$\log_2(8)$

3 لە بیرتبێت $2^?=8$



2. بنووسە $\log_7 49-\log_7 7$ وەک یەک لۆگاریتم بنووسە (ئەگەر کرا)

لەبەر ئەوەی دەکرێت ئەنجامی لێکدانی لۆگاریتم هەژمار بکرێت، دەتوانرێت لۆگاریتمی هێزەکان هەژماربکرێت.



سیفەتی لۆگاریتمی هێز

a و b دوو ژمارەی موجەب بن، کاتێک $b\neq 1$ و p ژمارەیەکی ڕاستی بێت.

بەنووسین	بەژمارە	لە جەبر
لۆگاریتمی هێز بریتییە لە ئەنجامی لێکدانی توانی هێز لە لۆگاریتم بەهەمان بنچینە	$\log 10^3$ $\log(10\times10\times10)$ $\log 10+\log 10+\log 10$ $3\log 10$	$\log_b a^p=p\log_b a$

ڕۆشنایی

لەبیرت بێت $logj+loga$ $+logm=logjam$

نموونە 3 سادەکردنی لۆگاریتمی هێزەکان

ئەم برانە بە شێوەی ئەنجامی لێکدان بنووسە، ئەگەر کرا سادەی بکە.

أ $\log_3 81^2$

$2\log_3 81$

$2(4)$ لەبەر ئەوەی $\log_3 81=4$

8 $3^4=81$

ب $\log_5\left(\frac{1}{5}\right)^3$

$3\log_5\frac{1}{5}$

$3(-1)$ لەبەر ئەوەی $5^{-1}=\frac{1}{5}$

-3



3. هەر برێک بە شێوەی ئەنجامی لێکدانی بنووسە. ئەگەر کرا سادەیبکە

أ $\log 10^4$ ب $\log_5 25^2$ ج $\log_2\left(\frac{1}{2}\right)^5$

لەبەرئەوەی کردارەکانی هێز و لۆگاریتم دووکرداری پێچەوانەن، کەواتە هەریەکیان ئەنجامی ئەوی تریان لا دەبات.



سیفەتە پێچەوانەکانی هێز و لۆگاریتم

ئەگەر b هەر بنچینەیەك بێت و $b>0$ و $b\neq1$

نموونە	لەجەبر
$\log_{10}10^7=7$	$\log_b b^x=x$
$10^{\log_{10}2}=2$	$b^{\log_b x}=x$

نموونـــــە 4 ناسینەوەی پێچەوانەکان

برِەکە بە سادەترین شێوە بنووسە

أ $\log_8 8^{3x+1}$

$\log_8 8^{3x+1}$

$3x+1$

ب $\log_5 125$

$\log_5 5^3$

3

ج $2^{\log_2 27}$

$2^{\log_2 27}$

27



.4 **أ** $\log 10^{0.9}$ بە سادەترین شێوە بنووسە **ب** $2^{\log_2(8x)}$ بە سادەترین شێوە بنووسە

زۆربەی بژمێرەکان لۆگاریتمی ئاسایی (بنچینە 10) یان لۆگاریتمی سروشتی بنچینە e هەژماردەکەن سەیری وانەی 4 – 5 بکە، دەتوانیت لۆگاریتم لە بنچینەیەکەوە بۆ لۆگاریتم بە بنچینەیەکی تر بە پێی ئەم یاسایەی خوارەوە بگۆڕێت.



یاسای گۆڕینی بنچینەی لۆگاریتم

ئەگەر a هەر بنچینەیەکی موجەب بێت کاتێك $a\neq1$ و b هەر بنچینەیەکی موجەب بێت کاتێك $b\neq1$

نموونە	لەجەبر
$\log_4 8=\frac{\log_2 8}{\log_2 4}$	$\log_b x=\frac{\log_a x}{\log_a b}$

نموونـــــە 5 گۆڕینی بنچینەی لۆگاریتم

بەهای $\log_4 8$ هەژماربکە

ڕیگای یەکەم گۆڕینی بنچینە بۆ 10

$$\log_4 8=\frac{\log 8}{\log 4}$$

$$\approx\frac{0.0903}{0.602}$$ بژمێر بەکاربێنە

$$=1.5$$

ڕیگای دووەم گۆڕینی بنچینە بۆ 2 چونکە دوو هێزی ژمارە 2 ـە.

$$\log_4 8=\frac{\log_2 8}{\log_2 4}=\frac{3}{2}$$

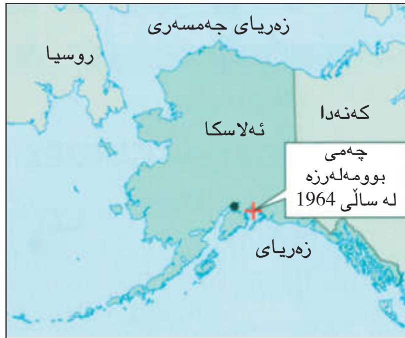
$$=1.5$$



.5 **أ** بەهای $\log_9 27$ هەژماربکە. **ب** بەهای $\log_8 16$ هەژماربکە.

پەیژەی لۆگاریتمی بۆ پێوانی ئەو هێندانەی کە بەهایەکەی دەکەوێتە بوارێکی زۆر فراوانەوە بەکاردێت، وەك توندی دەنگ و ئاستی توندییەکەی یان ئەو ووزەی لە بومەلەرزەیەك دەردەچێت.

نموونـــــه 6 جێبەجێکردن لە زەویناسیدا



پسپۆڕانی زەویناسی پێوەری ڕێختەر بەکاردەهێنن، بۆ دەربڕینی ئەو ووزەی کە لە بوومەلەرزەکان دەردەپەڕێت. ئەو پەیوەندییەی هێزی بومەلەرزەیەك M و ئەو وزەی لێی دەردەپەڕێت E بەیەکەوە دەبەستێتەوە بریتییە لە $M = \frac{2}{3}\log\left(\frac{E}{10^{11.8}}\right)$ لە ساڵی 1964 دا بوومەلەرزەیەك بە هێزی 9.2 پلەی ڕەختەر لە ئالاسکای ئەمریکای باکوری دا هیندی ئەو وزەی لە بوومەلەرزەکە دەردەپەڕێت بدۆزەوە.

$9.2 = \frac{2}{3}\log\left(\frac{E}{10^{11.8}}\right)$	لە جیاتدابنێ
$\left(\frac{3}{2}\right)9.2 = \log\left(\frac{E}{10^{11.8}}\right)$	هەردوولا لە $\frac{3}{2}$ بدە
$13.8 = \log\left(\frac{E}{10^{11.8}}\right)$	سادەبکە
$13.8 = \log E - \log 10^{11.8}$	سیفەتی ئەنجامی دابەشکردنی لۆگاریتم بەکاربهێنە
$13.8 = \log E - 11.8$	پێچەوانەی هێز و لۆگاریتم بەکاربهێنە
$25.6 = \log E$	پێناسەی لۆگاریتم بەکاربهێنە
$10^{25.6} = E$	بژمێرە بەکاربهێنە.
$3.98 \times 10^{25} = E$	

ئەو وزەی لە بوومەلەرزەکە دەرپەڕیوە گەیشتووتە 3.98×10^{25} ئەرگز (ergs)

ڕۆشنایەکی بەسوود

پێوەری ڕێختەر پێوەرێکی لۆگاریتمییە بۆ هەر زیاد بوونێکی 1 لە و پێوەرە بەرامبەر دەرچوونی وزەی چەند جارەی 10 یە.



دوو بوومەلەرزە هێزەکانیان گەیشتە 9.2 پلە و 8 پلە بە پێوەری ڕێختەر، ئەو وزەی بوومەلەرزەی یەکەم دەریدەپەڕێنێت چەند ئەوەندەی وزەی بوومەلەرزەی دووەمە؟

بیربکەوە و تاوتوێبکە

1. چۆن بەبەکارهێنانی بژمێر وێنەی ڕوونکردنەوەیی $y = \log_5 x$ دەکێشیت؟
2. چۆن $10^{25.6}$ ت دۆزینەوە لە نموونە 6 بە بەکارهێنانی سیفەتەکانی هێز؟
3. چی ڕوودەدات، کاتێك یاسای گۆڕینی بنچینە جێبەجێ دەکەیت لە $\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$ کاتێك $x = a$؟
4. ڕێکخەر بە خشتەی بەرامبەر دروستبکە و تەواویبکە. بەشێوازی خۆت سیفەتە بەیەك بەستراوەکانی هێز و لۆگاریتم ڕوونبکەوە.



سیفەتەکانی هێزەکان	سیفەتەکانی لۆگاریتم

4-4 ڕاهێنانەکان

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

پڕوانە نموونە 1

بڕەکە وەک یەک لۆگاریتم بنووسە. ئەگەر کرا سادەیبکە.

1. $\log_5 50+\log_5 62.5$
2. $\log 100+\log 1000$
3. $\log_3 3+\log_3 27$

پڕوانە نموونە 2

بڕەکە وەک یەک لۆگاریتم بنووسە. ئەگەر کرا سادیبکە.

4. $\log_4 320-\log_4 5$
5. $\log 5.4-\log 0.054$
6. $\log_6 496.8-\log_6 2.3$

پڕوانە نموونە 3

ئەگەر کرا سادەیبکە

7. $\log_8 8^2$
8. $\log_3 3^5$
9. $\log_7 49^3$
10. $\log_{\frac{1}{2}}(0.25)^4$

پڕوانە نموونە 4

11. $\log_2 2^{2^{x}+5}$
12. $2.5^{\log_{2.5}19}$
13. $\log_4 1024$
14. $\log_2(0.5)^4$

پڕوانە نموونە 5

بەهای بڕەکە هەژماربکە.

15. $\log_9\left(\frac{1}{27}\right)$
16. $\log_8 32$
17. $\log_5 10$
18. $\log_2 27$

پڕوانە نموونە 6

19. **زەویناسی** پەیوەندییەک هێزی بومەلەرزەیەک M بەوزەی E کەلێوەی دەردەپەڕێت بەیەکەوە دەبەستێتەوە، کە بریتییە لە $M=\frac{2}{3}\log\left(\frac{E}{10^{11.8}}\right)$ ئەو وزەی بومەلەرزەی تایگون دەریدەپەڕێنێن چەند ئەوەندەی وزەی بومەلەرزەی نیو مەدریدە لە 1881 .

بەناوبانگترین بومەلەرزەکانی ئەمریکای باشوور		
شوین	ساڵ	M
نیومەدرید	1881	8.1
نیومەدرید	1812	8.0
فورت تایگون	1957	7.9
سان فرانسیسکۆ	1906	7.8
دۆڵی ئەباترە	1892	7.8

ڕاهێنان و شیکارکردنی پرسیارەکان

ڕاهێنانی ئازاد	
بۆشیکارکردنی ڕاهێنانەکان	سەیری نموونە بکە
22-20	1
25-23	2
28-26	3
31-29	4
34-32	5
35	6

بڕەکە وەک لۆگاریتمی تاقانە بنووسە. ئەگەر کرا سادەیبکە.

20. $\log_8 4+\log_8 16$
21. $\log 2+\log 5$
22. $\log_{2.5} 3.125+\log_{2.5} 5$
23. $\log 1000-\log 100$
24. $\log_2 16-\log_2 2$
25. $\log_{1.5} 6.75-\log_{1.5} 2$

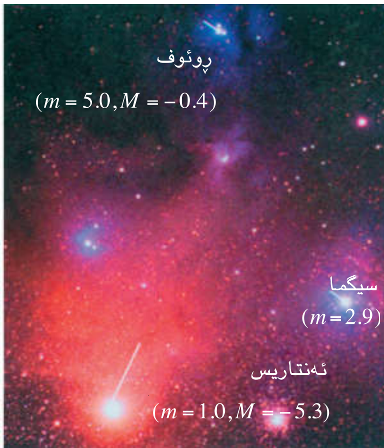
ئەگەر کرا سادەبکە.

26. $\log_2 16^3$
27. $\log(100)^{0.1}$
28. $\log_5 125^{\frac{1}{3}}$
29. $\log_3 3^{7+x}$
30. $3^{\log_3 4.52}$
31. $\log_9 6561$

بەهای بڕەکە هەژماربکە

32. $\log_{\frac{1}{2}} 16$
33. $\log_{25} 125$
34. $\log_4 9$

35. **دەنگ** پاش چەند سکاڵایەک دەرکەوت کە دەنگی مۆسیقای ئەو ئاهەنگەی لە دەرەوە دەکرێت، ئاستی توندییەکەی 5 دیسیبل بەرزترە لە ماوەی ڕێپێدراو کە 100 دیسیبلە. ئاستی توندی دەنگ بە پەیوەندی $L=10\log\left(\frac{I}{I_0}\right)$ هەژماردەکرێت، کاتێک I هێمای توندی دەنگەکە و I_0 هێمای توندی بەرگوێکەوتن بێت. توندی دەنگی ماوەپێدراو دەکاتە چەند ئەوەندەی توندی دەنگی مۆسیقای ئاهەنگەکان کە لە دەرەوە دەکرێت؟



36 **گەردوون** جیاوازی نێوان ڕووی دیاری ئەستێرەیەك m و ڕووە ڕاستەقینەکەی M بە بەکارهێنانی پەیوەندی $m - M = 5\log\frac{d}{10}$ دەپێورێت، کاتێك d هێمای دووری نێوان ئەستێرەکە و زەوی بێت کە بە (فەرسەخی ئەستێرەیی) Parsec دەپێورێت.

أ دووری ئەستێرەی ئەنتاریس Antares لەزەوی بدۆزەوە.

ب ئەستێرەی سیگاسکۆ Sigma Sco 225 فەرسەخی ئەستێرەیی لە زەوییەوە دوورە. دووری ڕاستەقینەی ئەم ئەستێرەیە بدۆزەوە؟

ج دووری ئەستێرەی ئەنتاریس لە زەوی چەند ئەوەی دووری ئەستێرەی ڕوئوف Rho Oph دەبێت ؟

ڕۆشنایی

فەرسەخی ئەستێرەیی بریتییە لە یەکەی پێوانەییەك کە دەکاتە 3.3 ساڵی ڕووناکی.

هاوکێشە توانییەکە بە شێوەی لۆگاریتمی بنووسە.

37 $b^{m+n} = b^m b^n$

38 $b^{m-n} = \frac{b^m}{b^n}$

39 $(b^m)^n = b^{mn}$

سادەبکە ئەگەر کرا.

40 $\log_2 32 - \log_2 128$

41 $\log 0.1 + \log 1 + \log 10$

42 $2 - \log_{11} 121$

43 $\log_{\frac{1}{2}} 2 + \log_{\frac{1}{2}} 2^{\frac{1}{2}}$

44 $7^{\log_7 7} - \log_7 7^7$

45 $\frac{10^{\log 10}}{\log 10^{10}}$

46 **بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە** سیفەتەکانی لۆگاریتم، و بەهای $\log 2 \approx 0.301$ بەکاربهێنە، بۆ هەژماری.

أ $\log 20$

ب $\log 200$

ج $\log 2000$

47 **کیمیا** پسپۆرانی کیمیا ئامۆژگاریمان دەکەن، کە pHی ئاوی مەلەوانی پێویستە لە نێوان 7.0 و 7.6 بێت. پەیوەندی $pH = -\log[H^+]$ بۆ نووسینی بڕێك جیاوازی لە خەستی ئایۆنەکانی هایدرۆجین بۆ دوو بەهای pH ی دیاریکراو بەکاربهێنە.

48 **فرەهەنگاوەکان** لە شوێنێکی دیاریکراو، 143 جۆرە ئاژەڵ دەژین کە لەوانەیە لەناوبچن، و ژمارەکەی ساڵانە 4% کەمدەکات.

أ نەخشەیەکی توانی بنووسە، ژمارەی ئاژەڵەکان لەو شوێنەدا بە پێی ژمارەی ساڵەکان بنوێنێت.

ب نەخشەیەکی لۆگاریتمی بنووسە، ژمارەی ساڵەکان بە پێی ژمارەی ئاژەڵەکان بنوێنێت.

ج زنجیرەی ئەو دوگمانە بنووسە، کە بۆ تێکردنی نەخشە لۆگاریتمییەکە لە بژمێری ڕوونکردنەوەیی بەکاریدەهێنێت.

د پاش چەند ساڵ ژمارەی ئاژەڵەکان لەو شوێنەدا لە 30 کەمتر دەبێت؟ بۆ نزیکترین ساڵ نزیکبکەوە.

49 **پارەدان** کاڵایەك نرخەکەی 000 40 دینارە، ساڵانە نرخەکەی بەڕێژەی 8% زیاددەکات. بڕێکی لوگاریتمی بنووسە، و بەکاربهێنە بۆ دیاریکردنی ژمارەی ساڵە پێویستەکان بۆ ئەوەی نرخی کاڵایەکە بگاتە 000 50 دینار، (یارمەتی: بڕەکە بە شێوەی توانی بنووسە).

50 یەکێك لە بانکەکان بە ڕێژەی 19.2% سوودی ساڵانە دەدات بەوکەسانەی پارە لەو بانکە دادەنێن. نەخشەی $A = P(1.016)^n$ بۆ هەر ژمارکردنی بەهای ئێستا A بۆ گوژمەی بنەڕەتی دەنوێنرێت پاش n مانگ لە دانانی پارەکە.

أ 000 500 دینار لەو بانکە دانرا. بڕێکی لۆگاریتمی بنووسە، و بەکاریبهێنە بۆ دۆزینەوەی ژمارەی مانگەکان بۆ ئەوەی پارەکە بکاتە دوو ئەوەندەی خۆی .

ب دوای چەند مانگ ئەو گوژمەیە دوو ئەوەندەی خۆی دەبێت؟

ج ئایا کاریگەری کاتەکە لە سەر گوژمەیە دەبێت، تا بەهاکانی دوو ئەوەندە بێت.

بژمێری ڕوونکردنەوەیی یاسای گۆڕینی بنچینەکان و بژمێری ڕوونکردنەوەیی بەکاربهێنە بۆ کێشانی وێنەی ڕوونکردنەوەیی ئەم نەخشانە.

51 $y=\log_3 x$ **52** $y=2\log_5 x$ **53** $y=\frac{\log_{12} x}{3}$

54 **بنووسە** چۆن ڕوونکردنەوەی نەخشەی $y=\log_{16} x$ دەکێشێت بەبەکارهێنانی بژمێری ڕوونکردنەوەیی؟

55 **بیری ڕەخنەگر** بەهای نزیکەیی هەر برێك بدۆزەوە، ئەگەر زانیت $\log_{12} 20 \approx 1.2$ $\log_{12} 33 \approx 1.4$

أ $\log_{12} 1.65$ ب $\log_{12} 660$ ج $\log_{12} 400$

56 **بیری ڕەخنەگر** پەیوەندییەکی گرنگ هەیە، لە نێوان لۆگاریتم و شێوەی زانستی بۆ نووسینی ژمارەکان.

أ لۆگاریتمی 2.5 بدۆزەوە

ب لۆگاریتمی بارستایی کەشتی تایتانیك بدۆزەوە، وەڵامەکە لەگەڵ وەڵامی لقی أ بەراورد بکە.



ج **دەستەواژەیەك بنووسە** بارستایی شێرێك 2.5×10^2 kg لۆگاریتمی ئەو ژمارەیە بدۆزەوە. وەڵامەکەت لەگەڵ وەڵامەکانی دوو لقی أ و ب بەکاربهێنە، بۆ ئەوەی ڕوونیبکەیتەوە، چۆن لۆگاریتمی ژمارەیەکی نووسراو بە شێوەی زانستی دەدۆزییەوە.

د دەستەواژەیەك بەکاربهێنە بۆ دۆزینەوەی لۆگاریتمی بارستایی پارچە پارەیەك کە دەگاتە 2.5×10^{-3} kg ئایا دەستەواژەکە بۆ ئەو ژمارانەی بە شێوەی زانستی توان سالب نووسراون ڕاستە؟

وایدابنێ $b>0$ و $b\neq1$. دیاریبکە، ئایا دەستەواژانە هەردەم ڕاستە، هەندێك جار ڕاستە، هەردەم هەڵەیە.

57 دەتوانین لۆگاریتم بنچینە b بگۆڕین بۆ لۆگاریتمێك بنچینەکەی ژمارەیەکی ڕێژەیی تر بێت.

58 لۆگاریتمی بنچینە، 6 بۆ هێزێك لە هێزەکانی ژمارە 6 دەکاتە توانی ئەو هێزە.

59 ئەگەر لۆگاریتمی ژمارەی 1 بۆ بنچینە b لە ژمارەیەك دەربکرێت، ژمارەکە هەر خۆی دەمێنێتەوە.

60 دەشێت بنچینەی لۆگاریتم ژمارەیەکی سالب بێت.

61 لۆگاریتمی دووجای ژمارەیەك دەکاتە دوو ئەوەندەی لۆگاریتمی ئەو ژمارەیە.

62 دەتوانین لۆگاریتمی بنچینە جیاواز کۆبکەینەوە، بێ ئەوەی پێویستمان بە گۆڕانی بنچینەکانیان هەبێت.

63 دەتوانین $\frac{\log_b 16}{\log_b 8}$ سادەبکەین.

64 لۆگاریتمی لۆگاریتمی ژمارەیەك دەکاتە ژمارەکە خۆی.

65 **هەڵە لە شیکردنەوە** لە خوارەوە دوو ڕێگای سادەکردنی $\log 80+\log 20$ هاتووە. کامیان هەڵەیە؟

أ
$$\begin{aligned}\log 80+\log 20&=\log(80\times20)\\&=\log 1600\\&=\log(16\times10^2)\\&=\log 16+\log 10^2\\&=\log 16+2\end{aligned}$$

ب
$$\begin{aligned}\log 80+\log 20&=\log(80+20)\\&=\log 100\\&=\log(10^2)\\&=2\log 10\\&=2\end{aligned}$$



66 **کام لەم دوو یەکسانبوونانە هەڵەیە؟**

أ $\log 140-\log 35=\log 4$ ب $\frac{\log 140}{\log 35}=\log 4$

ج $\log 35+\log 4=\log 140$ د $\log\frac{140}{35}=\log 4$

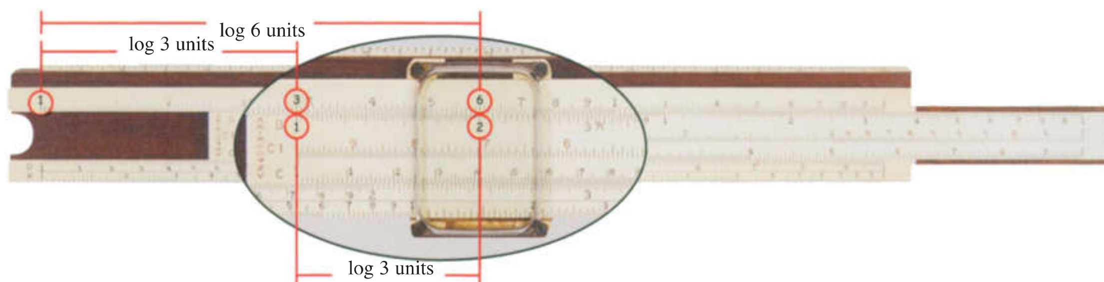
67 $\log_9 x^2 + \log_9 x$ بە سادەترین شێوە بنووسە.

أ) $\log_9\left(x^2+x\right)$ ب) $\log_9(3x)$ ج) $3\log_9 x$ د) $3\left(x^2+x\right)$

68 کام بڕی لۆگاریتمی دەکاتە $\log 6$ ؟

أ) $\log 3+\log 2$ ب) $\log 3+\log 3$ ج) $\log 3\times\log 2$ د) $\log 3\times\log 3$

بەرەنگاری و فراوانکردن



69 **مێژوی بیرکاری** پێش دەرکەوتنی بژمێرەکان، ئەندازیارەکان و خوێندکارانی زانستی بۆ ماوەیەکی زۆر جۆرە ڕاستەیەکیان بۆ جێبەجێکردنی هەژمارکردنە ئالۆزەکان بەکارهێنا. ئەو ڕاستەیە دوو هێڵی ژمارەیی بەکاردەهێنێت، هەریەکەیان لەسەر ئەوەی تریان دەخلسکێت، و پێوەری هەریەکێکیان لۆگاریتمە کە ڕێگا بەبەکارهێنانی سیفەتەکانی لۆگاریتم دەدات، بۆ لێکدان و دابەشکردنی ژمارەکان.

أ) لە وێنەکە چۆن ئەنجامی لێکدانی 2 لە 3 ڕووندەکاتەوە؟

ب) چۆن ئەو سیفەتە لۆگاریتمی ئەنجامی لیکدان دەنوێنێت؟

بواری نەخشەکە بدۆزەوە

70 $f(x)=\log(x^2-4)$ **71** $f(x)=\log x-\log(x-1)$ **72** $f(x)=\log\left(\frac{x}{x^2-1}\right)$

73 $f(x)=\log\left(\frac{1}{x}\right)^2$ **74** $f(x)=-\sqrt{\log(x+1)}$ **75** $f(x)=\sqrt{-2\log(-x)}$

76 بیسەلمێنە $\log_b a^p = p\log_b a$ **77** سادەبکە $\log_9 3^{2x}$

شیکاربکە

78 $\log_x 25=2$ **79** $\log_x(-8)=3$ **80** $0=\log_x 1$

پێداچوونەوەی لولپێچی

شیکاربکە *(قۆناغەکانی پیشوو)*

81 $4(x+1)=3(2x-6)$ **82** $-20+8n=n+29$ **83** $8\left(n+\frac{3}{4}\right)=10n-4$

ژمارەکە بە پێی i بنووسە (وانەی)

84 $3\sqrt{-16}$ **85** $-\frac{1}{2}\sqrt{-40}$ **86** $4\sqrt{-8}$ **87** $\sqrt{-125}$

هاوکێشە توانییەکە بەشێوەی لۆگاریتمی بنووسە *(وانەی 4 — 3)*

88 $5^3=125$ **89** $10^{-1}=1$ **90** $36^{0.5}=6$ **91** $4^x=256$

بەهای بڕەکە هەژماربکە *(وانەی 4 — 3)*

92 $\log_{12}1$ **93** $\log_5 25$ **94** $\log_{16}4$ **95** $\log_{625}0.04$

5-4 لۆگاریتمی سروشتی

Natural Logarithm



ئامانجەکان

- ژمارەی e بەکاردێت بۆ نووسینی نەخشەی توانی کە چەند بارێکی ژیانی ڕۆژانە دەنوێنێت
- وێنەی ڕوونکردنەوەیی ئەم نەخشانە دەکێشێت.
- ئەو هاوکێشە و پرسیارانە شیکار دەکات کە ژمارەی e و لۆگاریتمی سروشتی لەخودەگرن.

زاراوەکان Vocabulary

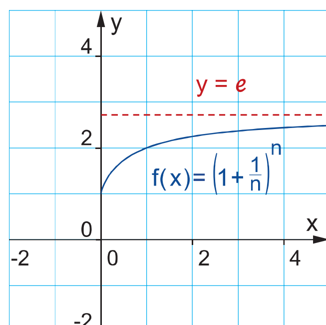
لۆگاریتمی سروشتی
Natural logarithm

نەخشەی لۆگاریتمی سروشتی
Natural logarithm function

کێ ئەمە بەکاردەهێنێت؟

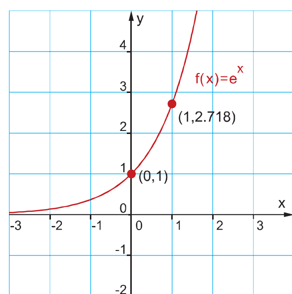
زانایان لۆگاریتمی سروشتی و مێژوو بەکاربۆن بۆ دیاریکردنی تەمەنی پاشماوەی ئاژەڵە کۆنەکان بەکاردێنن (نموونەی 4).

لە بیرت بێت یاسای سوودی ڕێژەیی بریتییە لە $A=P\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}$ کاتێك p هێمای گۆژمەی بنەڕەتی و A هێمای بڕە پارەی ئێستایە و r هێمای تێکرای سوودی ساڵانەیە، و t هێمای ژمارەی ساڵەکانەوە بێت و n هێمایە بۆ ژمارەی ئەو جارانەی کە ئەو حسابەی تێدا لە ساڵێکدا پاشکەوت دەکرێت. وا دابنێ تۆ یەك دینارت لە حسابەکەت داناوە، سوودێك بە تێکرای ساڵانەی 100% دەدرێت $(r=1)$، و حسابەکە n جار لە ساڵێك پاشکەوت دەکرێت. گۆژمەکە پاش ساڵێك دەبێتە $f(n)=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$ ، وادابنێ ژمارەی جارەکان n زیاد دەکات، تاوەکو زۆر گەورە دەبێت لەوکاتەدا دەتوانیت باسی پاشکەوتی بەردەوام بۆ حسابەکەت بکەیت، ڕوونکردنەوەیی نەخشەی $f(n)=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$ تاقیبکەوە، ئەو نەخشەیە دەرکەناری ئاسۆیی هەیە، کاتێك بەهای نەخشەکە لە...2.7182818 نزیکدەبێتەوە لەو کاتەی n لە $+\infty$. نزیکدەبێتەوە. بیرکاری زانان بە پیتی e هێمای دەکەن، کە ژمارەیەکی ناڕێژەییە وەك ژمارە π .



ئەو نەخشە توانییانەی کە بنچینەکانیان e یە هەمان ئەو سیفەتانەی نەخشەیەکی توانی هەیە. و ڕوونکردنەوەی نەخشەی $f(x)=e^{x}$ بە ڕوونکردنەوەی نەخشەی توانی تر دەچێت، وەك $f(x)=3^{x}$.

بواری نەخشەی $f(x)=e^{x}$ بریتییە لە R و مەوداکەی بریتییە لە $\{y/y>0\}$



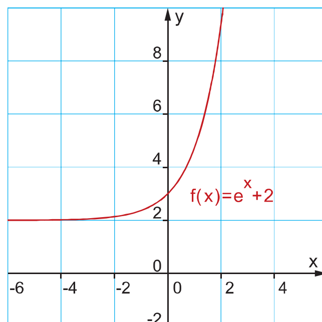
یارمەتی

ڕوونکردنەوەی نەخشە $f(n)=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$ یارمەتیت دەدات بۆ ئەوەی ببینیت بەهایەکانی $N_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$ بەرەبەرە زیاتر لە ژمارەی e نزیك دەبێتەوە.

نەخشەی $f(x)=e^{x}$ پێیدەگوترێت: نەخشەی توانی سروشتی کە ڕۆڵێکی گرنگ لە مێژووی بیرکاری دەنوێنێت.

Natural exponential funcio

نموونە 1 کێشانی وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشە توانییە سروشتییەکان.



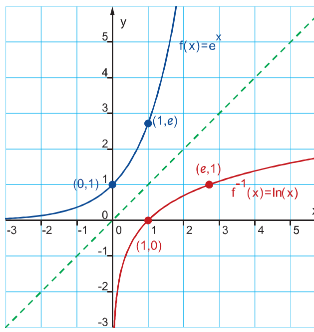
وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشەی $f(x)=e^{x}+2$ بکێشە.

خشتەی بەهایەکانی ئەو نەخشەیە دروستبکە، لەبەرئەوەی ژمارەی e ژمارەیەکی ڕێژەیی نییە، پیویستە بەهایەکانی نەخشەکە نزیك بکەیتەوە بۆ دەیەك بۆ نموونە.

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
$f(x)=e^{x}+2$	2.0	2.1	2.4	3	4.7	9.4	22.1



1. وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشەی $f(x)=e^{x}-3$ بکێشە.



لۆگاریتمی سروشتی Natural logarithm بریتییە لە و لۆگاریتمەی بنچینەکەی e بێت. هێمای ln بۆ لۆگاریتمی سروشتی بەکاردێت ئەو لوگاریتمە هەمان سیفەتەکانی لۆگاریتمی ئاسایی (دەیی) و لۆگاریتمەکانی تری هەیە.

نەخشەی لۆگاریتمی سروشتی Natural logarithm function
$f(x) = \ln x$ بریتییە لە پێچەوانەی نەخشە بۆ نەخشەی توانی سروشتی کە نەخشەیەکی لۆگاریتمییە بە بنچینەی e بوارەکەی کۆمەڵەی ژمارە ڕاستییە موجەبەکانە و مەوداکەی بریتییە لە کۆمەڵەی هەموو ژمارە ڕاستییەکان، ڕوونکردنەوەکەشی بریتییە لە ڕوونکردنەوەی بەرامبەر.

نموونـــــە 2 سادەکردنی برە توانییەکان و لۆگاریتمییە سروشتییەکان

برەکە بە سادەترین شێوە بنووسە.

أ $\ln e^{-2t}$

$\ln e^{-2t} = -2t$

ب $e^{\ln(x-1)}$

$e^{\ln(x-1)} = x-1$

ج $e^{5\ln x}$

$e^{5\ln x} = e^{\ln x^5} = x^5$



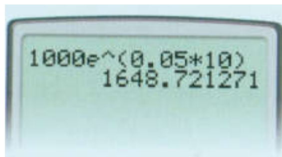
2. برەکە بە سادەترین شێوە بنووسە

أ $\ln e^{3.2}$ ب $e^{2\ln x}$ ج $\ln e^{x+4y}$

بەگەڕانەوە بۆ یاسای سوودی ئاوێتە، یاسایەکە دەبێتە $A = pe^{rt}$ کاتێك پاشەکەوتکردنەکە بەردەوام دەبێت.

نموونـــــە 3 جێبەجێکردن لە ئابوریدا

یەك ملیۆن دینار بۆ ماوەی 10 ساڵ بە تێکرایی سوودی ساڵانەی 5% دانرا بۆ ئەوەی پاشەکەوتکردنی حسابەکە بە شێوەیەکی بەردەوام بێت حسابەکە پاش ئەو 10 ساڵە دەبێتە چەند؟



$A = pe^{rt}$ یاسا

$A = 1000\ 000\ e^{0.05 \times 10}$ لە جیاتیدانێ

$A \approx 1\ 648\ 720$ بژمێربەکاربهێنە

پاش 10 ساڵ حسابەکە دەبێتە 1 648 720 دینار بە نزیکەیی.

تێبینی

ئەگەر بژمێرت نەبێ:

$e^{0.5} \approx 1.648720$



3. 100 000 دینار دەبێتە چەند پاش 8 ساڵ، ئەگەر زانیت ئەو گوژمەیە لە حسابی پاشەکەوتی بەردەوامدا، بە سوودی تێکڕای ساڵانەی3.5% دانرا؟

زانایان چەمکی نیوەتەمەن بەکاردەهێنن بۆ لێکۆڵینەوەی هەندێك ماددە و بە تایبەتی تیشکدارەکان. نیوەتەمەنی ماددەی **half - life** بریتییە لە و ماوەی ماددەکە پێویستیەتی بۆ شیبوونەوەی نیوەی ئەو ماددەیە یان گۆڕانی بۆ شتێکی تر. نەخشەی خوارەوە بۆ کرداری گەڕانەوەی سروشتی بەکاردێت.

$$N(t) = N_0 e^{-kt}$$

هێندەکە لە سەرەتای ماوەکەدا کاتێك $t = 0$

نەگۆڕی گەڕانەوە

هێندەکە لە کۆتایی ماوەی t دا

ماوەی گەڕانەوە t

نموونــــه 4 جێبەجێکردن لە سەر ئاژەڵە لە ناوچووەکان



زانایەکی بەردینی، لە کالیفۆرنیا گیانلەبەرێکی بەبەردبووی دۆزییەوە بە ناوی (دووکەڵبەشمشێری) ، کە ئاژەڵێکی لە ناوچووە لە پۆلی پشیلەکان بوو، دوای ئەنجامدانی شیکردنەوە لە سەربەبەرد بووەکە، دەرکەوت کە **15%** ی کاربۆن 14 لاشەکەی پێکهێناوە. تەمەنی ئەو پاشماوەیە بدۆزەوە، ئەگەر زانیت نیوەتەمەنی کاربۆن **14** بریتییە 5730 ساڵ.

هەنگاوی 1 نەگۆڕی گەڕانەوە بۆ کاربۆن 14 بدۆزەوە.

$N(t)=N_0e^{-kt}$ نەخشەیەکی پووکانەوە سروشتییە

$\frac{1}{2}=1\times e^{-k\times5730}$ لەجیاتی دابنێ

$\ln 2^{-1}=-5730k$ سادەبکە و لۆگاریتمی سروشتی هەردوو لا وەربگرە

$\ln 2^{-1}=(-1)\ln 2=-\ln 2$

$-\ln 2=-5730k$

$k=\frac{\ln 2}{5730}\approx 0.00012$

هەنگاوی 2 یاسای گەڕانەوە بەکاربهێنە و هاوکێشە پەیدابووەکە شیکاربکە.

$N(t)=N_0e^{-0.00012t}$ نەخشەی پووکانەوە لەجیاتی دابنێ

$15=100\times e^{-0.00012t}$ هەردوو لا دابەشی *100* بکە

$0.15=e^{-0.00012t}$ سادەبکە و لۆگاریتمی سروشتی هەردوو لا وەربگرە

$\ln 0.15=\ln e^{-0.00012t}$ سادەبکە

$\ln 0.15=-0.00012t$ شیکاربکە

650 mg

$t=-\frac{\ln 0.15}{0.00012}\approx 15809.3$

ئەو پاشماوەیە دەگەڕێتەوە بۆ 800 15 ساڵ بەنزیکەیی



4. شیبوونەوەی $mg650$ لە کرۆمیۆم51 بۆ ئەوەی ببێتە 200 mg چەند ساڵ دەخایێنێت، ئەگەر بزانیت نیوە تەمەنی کرۆمیۆم51 نزیکەی 28 ڕۆژە.

ئاگاداربە!

ln هێمای لۆگاریتمی سروشتییە بەڵام log هێمای لۆگاریتمی ئاساییە (واتە بنچینە 10)

بیربکەوە و تاوتوێبکە

1. دوو ژمارەی e و π لە چی لە یەکتر دەچن و لە چیدا جیاوازن.

2. ئەوەی e و ln بەیەکتر دەبەستێتەوە ڕوونبکەوە.

3. ڕێکخەربە ئەم خشتەیەی خوارەوە دروستبکە، پاشان تەواوی بکە. خانەکانی خشتەکە پڕبکەوە بۆ ئەوەی خاڵە لەیەکچوون و خاڵە جیاوازەکانی هەردوو لۆگاریتمەکە ڕوونبیتەوە، شێوەی گشتی بنووسە بە نموونە پاڵپشتی بکە ئەگەر پیویست بوو سادەی بکە.



	لۆگاریتمی ئاسایی	لۆگاریتمی سروشتی
بنچینە		
شێوەی لۆگاریتمی		
شێوەی توانی		
$\log_b 1$		
$\log_b b$		
$\log_b b^x$		
$b^{\log_b x}$		

5-4 ڕاهێنانەکان

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

1 **زاراوەکان** لۆگاریتمی سروشتی ژمارەی x بە شێوەی نەخشەیەك بە پیتی x بنووسە ئەو نەخشەیە پێ دەوترێت ــــ؟ــــ (لۆگاریتمی سروشتی، لۆگاریتمی دەیی).

بڕوانە نموونە 1

وێنەی ڕوونکردنەوەی نەخشەکە بکێشە.

2 $f(x)=e^{x}-4$ **3** $f(x)=-e^{x}$ **4** $f(x)=4-e^{x}$ **5** $f(x)=e^{1-x}$

بڕوانە نموونە 2

بڕەکە بە سادەترین شێوە بنووسە.

6 $\ln e^{1}$ **7** $\ln e^{x-y}$ **8** $\ln e^{\left(-\frac{x}{3}\right)}$ **9** $e^{\ln 2x}$ **10** $e^{3\ln x}$

بڕوانە نموونە 3

11 **ئابووری** ڤیان 000 750 7 دیناری لە حسابی پاشەکەوتی بەردەوام دانا، بەسوودی تێکڕای ساڵانەی 4% بەهای حسابەکە پاش 5 ساڵ دەبێتە چەند؟

بڕوانە نموونە 4

12 **فیزیا** تەکنتیوم Technetuim - 99m ماددەیەکی تیشکدەرە بۆ وێنە کێشانی ماسولکەکانی دڵ و پەیکەری ئێسك بەکاردێت. نیوەتەمەنی ئەو ماددەیە نزیکەی 6 کاتژمێرە نەگۆڕی پووکانەوەکە ئەو ماددە بدۆزەوە نەخشەی پووکانەوەی $N(t)=N_0e^{-kt}$ بەکاربهێنە بۆ هەژمارکردنی ئەوەی دەمێنێتەوە لە 250 mg لەو ماددەیە پاش 24 کاتژمێر.

ڕاهێنان و شیکاری پرسیارەکان

بۆشیکارکردنی ڕاهێنانەکان	سەیری نموونە بکە
16–13	1
20–17	2
21	3
22	4

(ڕاهێنانی ئازاد)

وێنەی ڕوونکردنەوەی نەخشەکە بکێشە.

13 $f(x)=e^{x}+1$ **14** $f(x)=e^{x}-1$ **15** $f(x)=1-e^{x}$ **16** $f(x)=10-e^{x}$

بڕەکە بە سادەترین شێوە بنووسە.

17 $\ln e^{0}$ **18** $\ln e^{2x}$ **19** $e^{\ln(x+2)}$ **20** $e^{4\ln x}$

21 **ئابووری** حسابی دڵشاد لە بانکێك 000 565 7 دیناری تێدایە دڵشاد لەو حسابە 000 000 5 دیناری بەکارهێنا بۆ حسابی تێکڕای سوودی ساڵانەی 3.5% کە پاشەکەوتی دەکات، بە شێوەی بەردەوام کۆی گشتی حسابی دڵشاد دوای سێ ساڵ دەبێتە چەند؟

22 **ژینگە** ساڵی 1986، کورەی ئەتۆمی چەرنۆبیل لە ئۆکرانیا تووشی ڕوداوێك هات، بووە هۆی پەرتبوونی هێندێکی زۆر لە پلۆتۆنیۆم. نیوە تەمەنی ئەو ماددەیە دەگاتە 110 24 ساڵ. نەگۆڕی گەڕانەوەی ئەو ماددەیە بدۆزەوە، نەخشەی پووکانەوەی $N(t)=N_0e^{-kt}$ بەکاربهێنە بۆ هەژماری ئەوەی دەمێنێتەوە لە 20g لەو ماددەیە دوای 000 5 ساڵ.

پاش چەند ساڵ هێندە پاشماوەکە لە و بیست گرامە دەبێتە یەك گرام؟

23 **بژمێر** بەهای نزیکراوەیی هەریەك لە $\ln 10$ و $\log e$ بدۆزەوە.

أ چۆن ئەو دوو ژمارەی دەستتکەوتوە بەیەکتر دەبەسترێن؟

ب ڕێسای گۆڕینی بنچینە بۆ پاڵپشتی وەڵامەکەت بەکاربهێنە.

24 ڕوونیبکەوە $\ln x=\ln 10\times\log x$.

25 **فرەهەنگاو** لە یاسای تیوتن بۆ ساردکردنەوە داهاتووە: پلەی گەرمی شلەیەك کەمدەکات بە پێی نەخشەی توانی $T = T_s + (T_0 - T_s)e^{-kt}$، کاتێك T_0 هێمای پلەی گەرمی بنەڕەتی بێت، و T_s هێمای پلەی گەرمی دەوروبەری شتەکەیە و k هێمای ژمارەیەکی نەگۆرە و t هێمای کاتە. کاتێك کات بە خولەك دەپێورێت $k = 0.283$، قاوەخانەیەك پلەی گەرمی تێیدا 21 پلەی سەدی بێت، قاوەیەك پێشکەش میوانانی دەکات پلەی گەرمییەکەی 96 پلەی سەدی بێت. ئارەزوو مەندانی قاوە ئامۆژگاریمان دەکات کە قاوە لە 60 پلەی سەدی بەنزیکەیی بخورێتەوە.

أ میوانەکە پێویستە چەند خولەك چاوەڕێ بکات پێش خواردنەوەی قاوەکەی؟

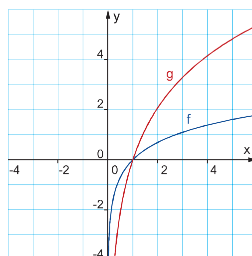
ب وەلامەکەی پێشوو دەبێتە چەند؟ ئەگەر پلەی گەرمی قاوەخانەکە ببێتە 30 پلەی سەدی؟

ج ڕوونکردنەوەی نەخشەی ساردکردنەوە بکێشە، لە دوو باری پێشوودا، بەڕوونکردنەوەیی ژمارەی خولەکەکان بدۆزەوە بۆ ئەوەی پلەی گەرمی قاوەکە یەکسان بێت بە پلەی گرمی قاوەخانەکە.

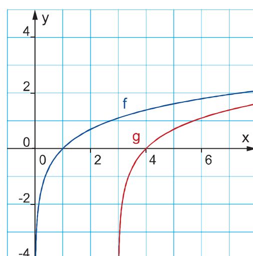
26 وێنەی ڕوونکردنەوەی ئەم دوو نەخشە $y = \frac{\ln x}{\ln 6}$ و $y = \frac{\log x}{\log 6}$ بکێشە بەراوردی نێوان دوو ڕوونکردنەوەکە بکە وبەراوردی نێوان هەریەکیان لەگەڵ ڕوونکردنەوەی نەخشەی $y = \log_6 x$ بکە.

نەخشە پەیدا بووەکان لە گۆڕینی نەخشەی $f(x) = \ln x$ بەیەکێك لەم ڕوونکردنەوەی دێت ببەستەوە.

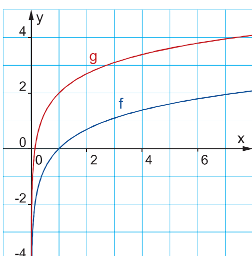
أ



ب



ج



27 $g(x) = \ln(x-3)$

28 $g(x) = 3\ln x$

29 $g(x) = \ln x + 2$

30 **ژینگە** یەکێك لەو ڕێکخراوانەی گرنگی بە ژینگە دەدات لە کەنەدا، ژمارەی ئاژەڵەکانی (ڕنە) کە لە دۆڵی ڕووباری جۆرج دەژین خەملاندنی، کە گەیشتە 4 700 سەر لە ساڵی 1954 دا. ئەو ژمارەیە بە توان زیادکرا تا گەیشتە 472 000 سەر لە ساڵی 1984 .

أ نەخشەی توانی $N(t) = N_0 e^{kt}$ بەکاربهێنە. کاتێك N_0 هێمای ژمارەی بنەڕەتی ئاژەڵەکانە و t هێمای کاتە و $N(t)$ هێمای ژمارەی ئاژەڵەکانە دوای t ساڵ و k ڕێژەی زیادبوونی ساڵانە بێت، بەهای k بدۆزەوە

ب چی دەبێت ئەگەر...؟ ئاژەڵەکان زیادیان کرد بەهەمان شێوە، لە ساڵی 2012 ژمارەکەی دەگاتە چەند؟

دەروازەیەك

زانستی گیانەوەران



ئاژەڵی ڕەنە ئاژەڵێکی کێوییە لە دۆڵی ڕووباری جۆرج، یەکێکە لە گەورەترین ڕەوەی لەم جۆرە لە جیهاندا ژمارەیان لەساڵی 1993 نزیکەی 776 000 سەربوو.

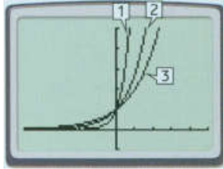
31 **تەنینەوە** کارمەندانی تەندروستی گشتی نەخشەی $f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$ بەکاردەهێنین بۆ پێوانی مەودای بلاوبوونەوەی پەتایەك لە کۆمەڵگا.

أ ڕوونکردنەوەی ئەم نەخشە بکێشە.

ب ئەو نەخشە چەند دەرکەناری هەیە.

ج لە ژیانی ڕۆژانە دا ئەونەخشەچی دەگەیەنێت لە بارەکانی بلاو بوونەوەی پەتا.

32 **بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە** لە شێوەی بەرامبەر ڕوونکردنەوەی نەخشەی $f(x)=2^x$ و $g(x)=10^x$ و $h(x)=e^x$ دەردەکەوێت.



أ ڕوونکردنەوەی هەریەك لەم نەخشانە جیابکەوە.

ب پۆتانی خاڵی هاوبەشی لە نێوان سێ ڕوونکردنەوەدا دیاربکە.

ج چی وا لەو خاڵە دەکات لە نێوان ئەو سێ ڕوونکردنەوەییەدا هاوبەش بێت؟

33 **بنووسە** بەراوردی نێوان پاشەکەوتی حسابی بانکێك بە شێوەی بەردەوام و پاشەکەوتی ڕۆژانە بکە. حسابەکە چەند قازانج دەکات ئەگەر پاشەکەوتەکە بەردەوام بێت، لە جیاتی ئەوەی ڕۆژانە بێت. لەگەڵ وەڵامەکەت نموونەیەك بهێنەوە.

34 ژمارەی کێڵگەکانی وڵاتێك گەیشتە 500 33 کێڵگە لە ساڵی 1990 ولەساڵی 2000 گەیشتە 800 30 کێڵگە.

أ بەهای k لە نەخشەی $N(t)=N_0e^{kt}$ بدۆزەرەوە، بۆ ئەوەی سامپڵێکت (نموونەیەك) بۆکەمبوونەوەی ژمارەی کێڵگەکان دەستکەوێت.

ب سامپڵەکە بەکاربهێنە بۆ خەمڵاندنی ژمارەی کێڵگەکان لەساڵی 2010 .

ج تێکڕای ڕووبەری کێڵگەکان لەماوەی 1990 - 2000 لە 1209 بۆ 1279 دۆنم زیادی کرد نەخشە-یەکی توانی بدۆزەوە کە ڕێگا دەدات بە خەمڵاندنی تێکڕای ڕووبەری کێڵگەکان لە ساڵی 2010 .



ئامادەکردن بۆ تاقیکردنەوە

35 کام کۆمەڵە بڕ ڕێکخراوان لە بچووکەوە بۆ گەورە؟

أ $\log e$ ، $\ln 10$ ، $\log 10$ ، $\ln 1$

ب $\ln 1$ ، $\log e$ ، $\log 10$ ، $\ln 10$

ج $\ln 1$ ، $\log e$ ، $\ln 10$ ، $\ln 10$

د $\ln 1$ ، $\log 10$ ، $\ln 10$ ، $\log e$

36 کام بڕ یەکسان نییە بە x کاتێك $x \neq 0$ ؟

أ $e^{\ln x}$

ب $\ln e^x$

ج $x \ln e$

د $x+\ln e$

37 کام بڕ یەکسانە بە $\log 50$ ؟

أ $\ln 50 \div \ln 10$

ب $\ln(50 \div 10)$

ج $\ln 50+\ln 10$

د $(\ln 50)\times(\ln 10)$

38 **کورتە وەڵام** بڕێك بنووسە یەکسان بێت بە $-\ln x$ بە بێ بەکارهێنانی نیشانەی سالب.

بەرەنگاری و فراوانکردن

39 چەندجار لە ساڵێکدا پێویستە بۆ دانانی حسابی بانکێك بە تێکڕایی سوودی ساڵانە 8% بۆئەوەی نرخەکەی 99.9% ی نرخەکەی بێت ئەگەر دانانەکە بەردەوام بێت؟ ئایا گۆڕان لە تێکڕای سوودەکە وەڵامەکە دەگۆڕێت؟ ئەمە ڕوونبکەوە.

40 وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشەی $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\left(\frac{x^2}{2}\right)}$ باسی ئەو ڕوونکردنەوەیە بکە بوار و مەودای نەخشەکە دیاریبکە.

41 وەڵامی ئەم پرسارانەی دێت بدەوە کە پەیوەندی بە ڕوونکردنەوەی نەخشەی $f(x)=\ln x$ هەیە:

أ کام نەخشە ڕوونکردنەوەییانە دەنوێنرێت، بە وێنەدانەوەی نەخشەی $f(x)$ بەدەوری تەوەرەی دووەم.

ب کام نەخشە ڕوونکردنەوەییانە دەنوێنرێت، بە وێنەدانەوەی نەخشەی $f(x)$ بەدەوری تەوەرەی یەکەم.

ج کام نەخشە ڕوونکردنەوەییانە دەنوێنرێت، بە وێنەدانەوەی نەخشەی $f(x)$ بەدەوری هەردوو تەوەرەکە بەدوای یەك.

د ڕوونکردنەوەی نەخشەی $f(x)$ و هەرسێ وێنەدانەوەکەی لەهەمان ڕووتەختی پۆتانەکان بکێشە. ئەو دەرکەنارانە دیاریبکە لە هەر چوار ڕوونکردنەوەکە هاوبەشن.

پێداچوونەوەی لولپێچی

42 **بۆ خۆشی** لەم ڕوونکردنەوەی بەرامبەردا نرخی چوونە ژوورەوەی باخچەی ئاژەڵان بە پێی تەمەنی سەردانکەر دەنوێنێت. وێنەیەکی ڕوونکردنەوەیی بکێشە بۆ نواندنی هەر بارێك لەمانەی خوارەوە. ئەو جێگۆڕکێیە دیاریبکە، کە ڕێگە بە دەستکەوتنی بە پێی ڕوونکردنەوەی بەرامبەر دەدات
(پۆڵەکانی پێشوو).



أ پێش کاتژمێر $5:00$ ی پاش نیوەڕۆ نرخەکان بۆ نیوە کەم دەکرێنەوە.

ب بۆ هەر چەشنە تەمەنێك بەرزترین ڕادە بۆ 3 ساڵ کەمکرایەوە.

ج هەموو نرخەکان دوو ئەوەندەکران.

نەخشەی پەیدابوو لە جێگۆڕکێی نەخشەی $f(x)=-2x^2+3x-4$ بنووسە بۆ هەر یەکە لەم جێگۆڕکێنانەی خوارەوە. *(پۆڵەکانی پێشوو).*

43 ڕاکێشانی 5 یەکە بۆ سەرەوە.

44 ڕاکێشانی دوو یەکە بۆ لای چەپ.

45 وینەدانەوە بەدەوری تەوەری یەکەم.

46 کشانی ئاسۆیی هاوکۆڵکەی 2 بێت.

ئەم برانە بەبەکارهێنانی یەك لۆگاریتم بنووسە وەڵامەکەت بە سادەترین شێوە دەربربە.

47 $\log_2 8+\log_2 \frac{1}{2}$

48 $\log_4 64-\log_4 1$

49 $\log_3 243-\log_3 2187$

50 $\log_5 25+\log_5 125$

51 $\log_8 8+\log_8 \frac{1}{8}$

52 $\log x^2+\log x$

6-4

هاوكێشە و لاسەنگە توانییەكان و لۆگاریتمییەكان

Exponential and Logarithmic Equations and Inequalities

ئامانجەكان

- هاوكێشە و لاسەنگە توانییەكان و لۆگاریتمیەكان شیكار دەكات.
- ئەو پرسیارانە شیكار دەكات كە هاوكێشە و لاسنگە توانییەكان و لۆگاریتمییەكان لە خۆدەگرێت .

زاراوەكان Vocabulary

هاوكێشەی توانییەكان Exponential Equation

هاوكێشەی لۆگاریتمی Logarithmic Equation

كێ ئەمە بەكاردەهێنێت؟

پێوەرە توانییەكان بەكاردێت، بۆ پێوانی ڕووناكی لە كردارەكانی وێنەگرتن (ڕاهێنانی 40).

هاوكێشەی توانی Exponential Equation هاوكێشەیەكە بڕێك یان زیاتری تێدایە و نەزانراوێكی توانی تێدایە. بۆ ئەوەی هاوكێشەیەكی توانی شیكار بكەیت:

- هەوڵبدە بە شێوەیەك بینووسیتەوەكە هەموو هێزەكان هەمان بنچینەیان هەبێت.
  ئەگەر $b^x = b^y$ ئەوا $x = y$ $(b \neq 1 ، b \neq 0)$
- لۆگاریتمی هەردوو لای هاوكێشەكە بەكاربهێنە.
  ئەگەر $a = b$ ئەوا $\log a = \log b$ ، $(a > 0 \quad b > 0)$

نموونـــــە 1 شیكاركردنی هاوكێشە توانییەكان

شیكار بكە و پاسادانبكە

أ $8^x = 2^{x+6}$

$(2^3)^x = 2^{x+6}$ بینووسە وەك هێزی بۆ ئەوەی هەمان بنچینەت

$2^{3x} = 2^{x+6}$ دەستكەوێت بۆ ژماركردنی هێزی هێز، دوو توانەكە لە

$3x = x + 6$ یەكتر بدە لە بەر ئەوەی بنچینەكان وەك یەكن، دوو

$x = 3$ توانەكە یەكسانن.

پاسادانبكە

8^x	2^{x+6}
8^3	2^{3+6}
8^3	2^9
512 ✓	512

شیكارەكە $x = 3$

ب $5^{x-2} = 200$

$\log 5^{x-2} = \log 200$ لەبەر ئەوەی 200 هێز نیە لە هێزەكانی 5 ، لۆگاریتمی هەردوو لا وەربگرە.

$(x-2)\log 5 = \log 200$ سیفەتی لۆگاریتمی هێز بەكاربهێنە هەردوو لا بەسەر log5 دابەشبكە

$x - 2 = \dfrac{\log 200}{\log 5}$

$x = 2 + \dfrac{\log 200}{\log 5} \approx 5.292$

5^(5.292-2)
199.9904485

پاسەدانبكە بژمێر بەكاربهێنە.

شیكار بریتییە لە $x \approx 5.292$

ڕۆشنایی

كاتێك وەڵامێكی نزیكراوە لە كرداری پاسادانكردن بەكاردەهێنیت، وەڵامی تەواوت بۆ دەرناچێت بەڵكو ئەنجامێكی گونجاوت بۆ دەردەچێت.



1. شیكاربكە و پاسەدانبكە

أ $3^{2x} = 27$ ب $7^{-x} = 21$ ج $2^{3x} = 15$

نموونـــــه 2 جێبەجێکردن لـەسەر دراو (پـارە)

دەتوانیت لە نێوان دەستکەوتنی ئۆتۆمبیلێك نرخەکەی 20 ملیۆن دینار یان دەستکەوتنی یەك دینار لە ڕۆژی یەکەم و دوو ئەوەندەی دەستتکەوتووە لە ڕۆژی دواتر و هەروەها * یەکێکیان هەڵبژێریت، ئەگەر دووەمت هەڵبژارد، لە چ ڕۆژێك گوژمەیەکی زیاترت لە نرخی ئۆتۆمبێلەکە دەستدەکەوێت؟

لە ڕۆژی یەکەم یەك دینار2^0ت دەستدەکەوێت و لە ڕۆژی دووەم 2^1 دینار و هەروەها ئەوا 2^{n-1} دینارت لە ڕۆژی n دەستدەکەوێت. بۆ دەستکەوتنی وەڵام لاسەنگەکە شیکار بکە.

$$2^{n-1} > 20\ 000\ 000$$

$2^{n-1} > 2 \times 10^7$ — 20 ملیۆن بە شێوەی زانستی بنووسە

$\log(2^{n-1}) > \log(2 \times 10^7)$ — لۆگاریتمی هەردوو لا وەربگرە

$(n-1)\log 2 > \log 2 + \log 10^7$ — سیفەتی هێز و سیفەتی ئەنجامی لێکدان بە کاربهێنە. .

$(n-1)\log 2 > \log 2 + 7$ — $\log 10^7 = 7$

$n-1 > \frac{\log 2+7}{\log 2}$ — هەردوو لا دابەشی $\log 2$ بکە بژمێر بەکاربهێنە

$n > \frac{\log 2+7}{\log 2} + 1$ — وەڵامەکەت نزیکبکەوە و بۆ نزیکترین ژمارەی تەواوی لە لای سەرەوە

$n > 25.26$

لە ڕۆژی بیست و شەشەمەوە، ئەوەی دەستت دەکەوێت زیاترە لە نرخی ئۆتۆمبیلەکە.
ساغبکەوە. لەبەر ئەوەی$2^{26-1} = 2^{25} = 33\ 554\ 432$ لە ڕۆژی بیست و شەشەمەوە 33 55 44 32 دینارت دەستدەکەوێت، ئەوەش زیاترە لە نرخی ئۆتۆمبیلەکە.

تێبینی

ئاساییە خوێندکار بەراوردی نێوان کۆی ئەوەی دەستدەکەوێت لەگەڵ نرخی ئۆتۆمبیلەکە بکات واتە ئەمە شیکار بکات.

$2^0+2^1+2^2\ldots+$
$2^{n+1}>20\times10^6$
$\Longrightarrow n=24$

تێبینی

ئەگەر بژمێرت پێ نەبێ:
$\log 2 \approx 0.30$
$\log 3 \approx 0.47$
$\log 5 \approx 0.69$



2. لە نموونەی 2 وا دابنێ ئەو گوژمەی هەر ڕۆژێك وەریدەگرێت 3 ئەوەندەی ئەو گوژمەیە لە ڕۆژی پێشتر وەریدەگرێت لە جیاتی دوو ئەوەندە. لە کام ڕۆژ ئەوەی وەریدەگرێت لە ملیار دینار زیاترە؟

هاوکێشەی لۆگاریتمی Logarithmic Equation هاوکێشەیەکە بڕێکی لۆگاریتمی یان زیاتری تێدایە و نەزانراوێك لەخۆ دەگرێت، دەتوانیت هاوکێشە لۆ گاریتمیەکان بەبەکارهێنانی سیفەتی لۆگاریتمی شیکار بکەیت.

نموونـــــه 3 شیکارکردنی هاوکێشەی لۆگاریتمی

شیکاربکە

أ $\log_3(x-5) = 2$

$3^{\log_3(x-5)} = 3^2$ — 3 بەکاربهێنە وەك بنچینەیەکی هاوبەش بۆ هەردوو لا.

$x - 5 = 9$ — پێچەوانەبوونەوە لە نێوان هێز و لۆگاریتم بەکاربهێنە

$x = 14$ — سادەبکە.

ب $\log 45x - \log 3 = 1$

$\log\left(\frac{45x}{3}\right) = 1$ — سیفەتی لۆگاریتمی ئەنجامی دابەشکردن بەکاربهێنە

$\log(15x) = 1$ — دابەشبکە.

$10^{\log(15x)} = 10^1$ — 10 وەك بنچینەیەکی هاوبەشی هەردوولا بەکاربهێنە

$15x = 10$ — پێچەوانەبوونەوە لە نێوان هێز و لۆگاریتم بەکاربهێنە

$x = \frac{2}{3}$ — سادەبکە.

لە بیرت بێت

پێداچوونەوەی سیفەتەکانی لۆگاریتم بکە لەوانەی 4-4 دا

ج

$\log_4 x^2 = 7$

$2\log_4 x = 7$ — سیفەتی لۆگاریتمی هێزی

$\log_4 x = \frac{7}{2}$ — هەردوولا دابەشی 2 بکە.

$x = 4^{\frac{7}{2}}$ — پێناسەی لۆگاریتم

$x = (2^2)^{\frac{7}{2}}$ — $4 = 2^2$

$x = 2^7 = 128$ — سادەیبکە .

د

$\log x + \log(x+9) = 1$

$\log x(x+9) = 1$ — سیفەتی ئەنجامی لێکدانی لۆگاریتم بەکاربهێنە

$10^{\log x(x+9)} = 10^1$ — 10 وەك بنچینەی هاوبەش بۆ هەردوو لا بەکاربهێنە

$x(x+9) = 10$ — پێچەوانەبوونەوە لە نێوان هێز و لۆگاریتم بەکاربهێنە .

$x^2 + 9x - 10 = 0$ — ڕادەکان لە یەکتریدە و کۆیانبکەوە.

$(x-1)(x+10) = 0$ — شیتەڵبکە

$x - 1 = 0$ یان $x + 10 = 0$ — سیفەتی لێکدانی سفری بەکاربهێنە

$x = 1$ یان $x = -10$ — شیکار

ساغبکەوە

$\log x + \log(x+9)$	1
$\log 1 + \log(1+9)$	1
$\log 1 + \log 10$	1
$0 + 1$	1
$0 + 1$	1 ✓

$\log x + \log(x+9)$	1
$\log(-10) + \log(-10+9)$	1 ✗

$\log(-10)$ پێناسە نەکراوە

کەواتە شیکارەکە بریتییە لە $x = 1$

ئاگاداربە!

هەمووکات شیکارەکان ساغبکەوە چونکە لەوانەیە شیکاری نامۆ بێتە ناو شیکارەکان.



3. شیکاربکە

أ $3 = \log 8 + 3\log x$

ب $2\log x - \log 4 = 0$

نموونە 4

بەکارهێنانی خشتەکان و جەبر بۆ شیکارکردنی هاوکێشە و لاسەنگە توانییەکان و لۆگاریتمییەکان.

بۆ شیکارکردن خشتەیەك یان جەبر بەکاربهێنە.

أ $2^{2x} = 1024$

بژمێری ڕوونکردنەوەیی بەکاربهێنە$(2X)$^2 لە پێشY1 و 1024 پێش Y2 بنووسە.



لە وێنە ڕوونکردنەوەییەکە بۆ پۆوتانی یەکەمی خاڵی یەکتربڕینی دوو ڕوونکردنەوەیەکە بگەڕێ.

X	Y1	Y2
1	4	1024
2	16	1024
3	64	1024
4	256	1024
5	1024	1024
6	4096	1024
7	16384	1024

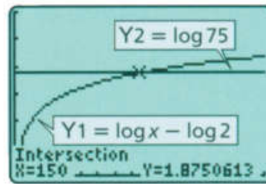
X=5

لەخشتەکەدا لە بەهای x بگەڕێ کە Y1 = Y2 وادەکات

شیکار بریتییە لە $x = 5$

ب $\log x - \log 2 \leq \log 75$

بژمێرە بەکاربهێنە $\log x - \log 2$ لە پێش Y1 و log75 لە پێش Y2 بنووسە.



X	Y1	Y2
120	1.7782	1.8751
130	1.8129	1.8751
140	1.8451	1.8751
150	1.8751	1.8751
160	1.9031	1.8751
170	1.9294	1.8751
180	1.9542	1.8751

X=150

لە وێنەی ڕوونکردنەوەیی بەدوای پۆوتانی یەکەمی خاڵی یەکتربڕینی دوو ڕوونکردنەوەییەکە بگەڕێ.

لەخشتەکەدا بۆ بەهایەکانی x بگەڕێ کەواتەکەن. $Y1 \leq Y2$

کۆمەڵەی شیکار بریتییە لە $\{x / x \leq 150\}$

ساغبکەوە: جەبر بەکاربهێنە.

$$\log x - \log 2 \leq \log 75$$

$$\log \frac{x}{2} \leq \log 75$$

سیفەتی ئەنجامی دابەشکردنی لۆگاریتم بەکاربهێنە

$$10^{\log \frac{x}{2}} \leq 10^{\log 75}$$

10 وەک بنچینەیەکی هاوبەشی بۆ هەردوو لا بەکاربهێنە.

$$\frac{x}{2} \leq 75$$

پێچەوانەبوونەوە لە نێوان هێز و لۆگاریتم بەکاربهێنە، سادەبکە.

$$x \leq 150 \checkmark$$



4. خشتەیەک یان جەبر بەکاربهێنە بۆ شیکارکردنی:

أ $2^x = 4^{x-1}$ **ب** $2^x > 4^{x-1}$ **ج** $\log x^2 = 6$

بیربکەوە و تاوتوێبکە

1. بۆچی دەرئەنجامی ئەوە دەکەیت، ئەگەر $\log a = \log b$ ئەوا $a = b$ کاتێک $a > 0$ و $b > 0$؟

2. تەنها هەنگاوی یەکەم بۆ شیکارکردنی ئەمانەی دێن دیاربیکە.

أ $\log x^5 = 10$ **ب** $\log 2x + \log 2 = 1$

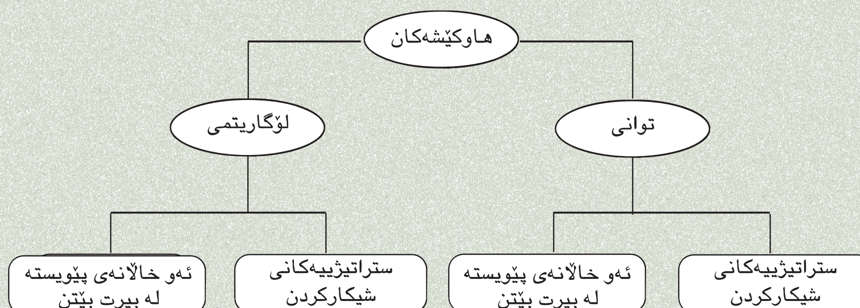
ج $x^4 = 100$ **د** $\log(x + 1000) = 2$

هـ $\log(x + 4) + \log x = 2$ **و** $\log_6 (x + 6) = 3$

3. ڕوونیبکەوە چۆن دەتوانرێت هاوکێشەیەکی لۆگاریتمی شیکارێکی سالبی هەبێت. بەڵگە بۆ وەڵامەکەت بهێنەوە و ئەگەر دەکرێت نموونەیەک بهێنەوە.



4. ڕێکخەربە ئەم هێڵکارییەی خوارەوە دروستبکە و تەواوییکە. بەشێوازی خۆت ئەو ستراتیژانە و خاڵانە بنووسەکە پێویستە لە بیرت بێت کە تایبەتن بە هاوکێشەی توانی و لۆگاریتمی.



6-4 ڕاهێنانەکان

ڕاهێنانی ئاراستەکراو

1 **زاراوەکان** دەتوانیت شیکاری هاوکێشەی ______ بکەیت، بەوەرگرتنی لۆگاریتم بۆ هەردوولا (توانی یان لۆگاریتمی)

بڕوانە نموونە 1

شیکاربکە و پاسادانبکە.

2 $4^{2x} = 32^{\frac{1}{2}}$ **3** $9^{x} = 3^{x-2}$ **4** $2^{x} = 4^{x+1}$

5 $4^{x} = 10$ **6** $\left(\frac{1}{4}\right)^{2x} = \left(\frac{1}{2}\right)^{x}$ **7** $2.4^{3x+1} = 9$

بڕوانە نموونە 2

8 **دانیشتوان** ژمارەی دانیشتوانی لادێیەك 3400 کەسە، و بەڕێژەی 3% ساڵانە زیاددەکات. دەتوانیت پشت بەنەخشەی $P = 3400(1+0.03)^{t}$ ببەستێت بۆ نواندنی ژمارەی دانیشتوان بە پێی کات t کاتێك p هێمای ژمارەی دانیشتوان پاش t ساڵ بێت دوای چەند ساڵ ژمارەی دانیشتوان لە 100 000 کەس تێدەپەڕێت.

بڕوانە نموونە 3

شیکاربکە و پاسادانبکە

9 $\log_2(7x+1) = \log_2(2-x)$ **10** $\log_6(2x+3) = 3$

11 $\log 72 - \log\left(\frac{2x}{3}\right) = 0$ **12** $\log_3 x^9 = 12$

13 $\log_7(3-4x) = \log_7\left(\frac{x}{3}\right)$ **14** $\log 50 + \log\left(\frac{x}{2}\right) = 2$

15 $\log x + \log(x+48) = 2$ **16** $\log\left(x+\frac{3}{10}\right) + \log x + 1 = 0$

بڕوانە نموونە 4

خشتەیەك و وێنەیەکی ڕوونکردنەوەیی بەکاربهێنە بۆ شیکاری:-

17 $2^{2x+1} = 256$ **18** $2^{x}3^{x} \leq 7776$ **19** $2\log x^4 = 16$ **20** $x > 10\log x$

ڕاهێنان و شیکارکردنی پرسیارەکان

بۆشیکارکردنی ڕاهێنانەکان	سەیری نموونە بکە
26–21	1
27	2
33–28	3
36–34	4

ڕاهێنانی ئازاد

شیکاربکە و پاسادانبکە

21 $2^{x-1} = \frac{1}{64}$ **22** $\left(\frac{1}{4}\right)^{x} = 8^{x-1}$ **23** $\left(\frac{1}{5}\right)^{x-2} = 125^{\frac{x}{2}}$

24 $\left(\frac{1}{2}\right)^{-x} = 1.6$ **25** $(1.5)^{x-1} = 14.5$ **26** $3^{\frac{x}{2}+1} = 12.2$

27 **دەرمان** پەرستارێك حەبێکی ئارامکەرەوەی دابە نەخۆشێك،325mg ئەسپرینی تێدایە. نەخشەی $A = 325\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{15}}$ بۆ دیاریکردنی هێندی ئەسپرینی A ماوە لە خوێنی نەخۆشەکە دوای t خولەك لە وەرگرتنی حەبەکە. لاسەنگەیەکی لۆگاریتمی بنووسە و شیکارییبکە، بۆ دیاریکردنی ژمارەی خولەکە پێویستەکان بۆ ئەوەی هێندی ئەسپرینەکە لە 50mg کەمتربێت.

شیکاربکە

28 $\log_3(7x) = \log_3(2x+0.5)$ **29** $\log_2\left(1+\frac{x}{2}\right) = 4$

30 $\log 5x - \log(15.5) = 2$ **31** $\log_5 x^4 = 2.5$

32 $\log x - \log\left(\frac{x}{100}\right) = x$ **33** $2 - \log 3x = \log\left(\frac{x}{12}\right)$

خشتەیەك یان جەبر بەکاربهێنە بۆ شیکارکردنی

34 $2 \times 3^{x-1} = 162$ **35** $4x \leq 2^{x+1}$ **36** $\log(2x-17) + \log x \geq 2$

37 $\log x = \log(x^2 - 12)$ شیكاربكە وەڵامەكەت ڕوونبكەوە.

38 $5^{2x} = 100$ شیكاربكە وەڵامەكەت نزیكبكەوە بۆ نزیترین بەشی سەدی.

39 $5^{x+2} = 64$ بە زیاتر لە ڕێگایەك شیكاری بكە.

40 **مۆزیك** لەرەلەری هەر ئاوازێك (بە هێرتز) لە ئاوازەكانی پیانۆ بە پەیوەندییەك لەگەڵ شوێنی دووگمەكەی (كلیلەكەی) لە سەر تەختەی كلیلەكان بە پێی نەخشەی $f(n) = 440 \times 2^{\frac{n}{12}}$ دەنوێنرێت، كاتێك n ژمارەی ئەو كلیلانەیە كە ئەو كلیلە لە كلیلی مەركەزی جیادەكاتەوە (n سالب دەبێت ئەگەر كلیلەكە لە لای چەپی كلیلە مەركەزیكەوە بێت، و موجەب دەبێت ئەگەر لە لای ڕاستی بێت) شوێنی كلیلەكە بدۆزەوە بۆ ئاوازێك لەرەلەرەكەی 110 هێرتزە.

41 **پارەدان** وا دابنێ 250 000 دینار بە بانكێك سپێردرا بە سوودێكی ئاویتە تێكڕاكەی4.5% بێت لە وەرزێكدا پاشەكەوتی حسابی وەرزی (4 جار لە ساڵێكدا) دەكرێت یاسای $A = P(1+r)^n$ بەكاردێت بۆ هەژماری ئەوەی گوژمە بنەڕەتییەكە p دەیگاتێ، كە سپێردرابوو لە حسابی سوودی ئاوێتەیەك تێكڕاكەی r بێت لەوەرزێكدا، دوای تێپەڕبوونی n وەرز لە سپاردنی ئەو یاسایە بەكاربهێنە بۆ دۆزینەوەی ژمارەی وەرزە پێویستەكان، بۆ ئەوەی گوژمەكە بەلای كەمی ببێتە 500 000 دینار (یارمەتی: یەكەمجار هەردوو لای هاوكێشەكە بەسەر p دابەشبكە).

42 **بیركردنەوەی ڕەخنەگرانە** چەند ژمارەی ڕاستی دەبنە شیكاری $\log x^2 < 2\log x$ ؟ بژمێری ڕوونكردنەوەیی بۆ وێنەی هەردوو ڕوونكردنەوەییەكە بەكاربهێنە، پاسەدانی وەڵامەكەت بكە. دوو ڕوونكردنەوەكە چی نیشاندەدات بۆ وەڵامەكە.

43 **هەڵە لە شیكاردا** لە كاتی شیكاركردنی هاوكێشەی $\log x + 4 = 8$ ، دانا وەڵامی 999999 ، دەستكەوت. هەڵەی دانا لە كوێیە؟

44 **بنووسە** باسی دوو ڕێگا بكە، دەتوانیت بەكاریان بهێنێت بۆ شیكاركردنی هاوكێشەیەكی توانی. نموونەیەك بهێنەوە، ڕوونیبكاتەوە كە هەر ڕێگایەكییان كەی بەكاردەهێنرێت.

دەروازەیەك

مۆزیك



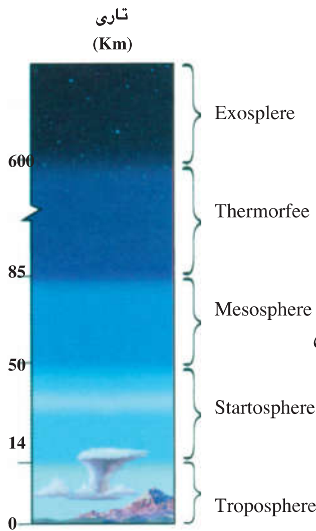
پیانۆ دادەنرێت بە ئامێرێكی مۆزیكی ژێدار و دەهۆڵی لە یەك كاتدا چەكوشی بچووك بۆ دانراوە لە ژێیەكان دەدات.

45 دەتوانیت نەخشە $N(t) = 119(0.987)^t$ بۆ دیاریكردنی ژمارەی كێڵگەكانی پەلەوەر بەهەزاران لە یەكێك لە وڵاتەكان بە پێی ژمارەی ساڵەكانی t دوای ساڵی 1980

أ ئایا ژمارەی كێڵگەكان زیادیكردووە لە ساڵی 1980 یان كەمیكردووە، چۆن ئەوەت زانی؟

ب ژمارەی كێڵگەكان ساڵی 1980 و ساڵی 2000 لە و وڵاتەدا چەند بوو؟

ج بە پێی نەخشەكە كەی ژمارەی كێڵگەكان بەنزیكەیی دەبێتە 80 000 كێڵگە؟



46 **کەشناسی** لە چینێکی بەرگەی هەوادا، پلەی گەرمی نەگۆڕەو دەکاتە $-57°$ ، دەتوانرێت پشت بە نەخشەی $P(h) = 128(10)^{-0.0682h}$ ببەستین وەك هاوكێشەیەك بۆ پێوانی پەستانی هەوای p (بە كیلۆ باسكاڵ kpa پێورابێت). بە پێی بەرزی h (بەكیلۆ مەتر پێورابێت) لە ڕووی زەوییەوە پەستانی هەوا لەو چینە لە نێوان $2.55\ kpa$ و $22.9\ kpa$ دەبێت.

أ كەمترین بەرزی و زۆرترین بەرزی لەو چینەدا چەندە بۆ ئەوەی هاوكێشەكە ڕاستبێت؟

ب چی دەبێت ئەگەر....؟ پەستانی كەش لە ڕووی دەریا $101\ kpa$ بەنزیكەیی بێت، ئەگەر ئەو هاوكێشەی سەرەوەت بەكارهێنا بۆ دیاریكردنی پەستانی كەش لە ڕووی دەریا، ئایا بەهایەكی گەورەتر یان بچووكتر لە بەها ڕاستەقینەكەی دەستدەكەوێت. ئەمە ڕوونبكەوە.

ئامادەكردن بۆ تاقیكردنەوە

47 شیكاری هاوكێشەی $b^x = c$ دەكاتە چی؟

أ $x = \frac{\log b}{\log c}$ ب $x = \frac{\log c}{\log b}$ ج $x = \frac{\log b}{c}$ د $x = \frac{\log c}{b}$

48 شیكاری هاوكێشە $\log(x-21) = 2 - \log x$ بكە.

أ $x = 4$ ب $x = \frac{25}{4}$ ج $x = \frac{21}{2}$ د $x = 25$

49 كام بڕە گەورەترین بەها وەردەگرێت كاتێك $p = 5$ و $q = 2$ ؟

أ $\log 2p - \log 3q$ ب $2\log q - 3\log p$ ج $\log p^2 - \log q^3$ د $\log p - \log q$

بەرەنگاری و فراوانكردن

50 ئایا دەتوانرێت هاوكێشەی $\log_x x = x$ شیكار بكرێت؟ ئەمە ڕوونبكەوە.

51 هاوكێشەی $x = 0.125^{\log_2 5}$ بەجەبری شیكار بكە.

52 كۆمەڵە شیكاری لاسەنگەی $\log_3 36 - \log_3 x > 1$ بدۆزەوە؟ بژمێری زانستی بەكاربهێنە بۆ شیكاركردنی لاسەنگەكە بە ڕوونكردنەوەیی.

پێداچوونەوەی لولپێچی

53 **وێنەگرتن** نرخی شووشتنەوەی وێنەیەكی پێوانە $24cm \times 20cm$ 750 دینارە، نرخی شوشتنەوەی وێنەیەكی پێوانە $15cm \times 10cm$ 350 دینارە، سێوی 5250 دیناری لایە. هێمای x بەكاربهێنە بۆ ژمارەی وێنەكانی پێوانەی یەكەم، و y بۆ ژمارەی وێنەكانی پێوانەی دووەم *(وانەی 2 – 1)*.

أ لاسەنگەیەك بنووسە بۆ ژمارەی ئەو وێنانەی كە سێوی دەتوانیت لە هەرجۆرێك بیشواتەوە.

ب لاسەنگەكە بەڕوونكردنەوەیی شیكاربكە. سێوێ دەتوانێت چەند جۆری دووەم بشواتەوە، ئەگەر زانیت 4 وێنە دەركەوت لە جۆری یەكەم؟

سنووردەری ڕێزكراوەكە بدۆزەرەوە *(وانەی 3 – 4)*

54 $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$ **55** $\begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$ **56** $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$ **57** $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$

دژە كردارەكان بەكاربهێنە بۆ دۆزینەوەی پێچەوانەی نەخشكە *(وانەی 4 – 2)*

58 $f(x) = 4x + 3$ **59** $f(x) = 6(x-2)$ **60** $f(x) = \frac{x}{3} + 9$ **61** $f(x) = \frac{7x-1}{5}$

7-4 نموونە توانییەکان و لۆگاریتمییەکان Exponential and Logarithmic Models

ئامانجەکان

- بەکارهێنانی نەخشەی توانی و لۆگاریتمی بۆ دۆزینەوەی نموونەکان بۆ پێدراوەکان.
- نموونە توانییەکان ولۆگاریتمییەکان بەکاردێت بۆ شیکردنەوە و دارشتنی پێشبینییەکان

زاراوەکان Vocabulary

لێژ بوونەوەی توانی (الانحدار الاسی) Exponential Regression

لێژبوونەوەی لۆگاریتمی (الانحدار اللوغاریتمی) Logarithm Regression

کێ ئەمە بەکاردەهێنێت؟

ئەو کەسانەی بەردە بەنرخەکان مشتومالْ دەکەن دەزانن کە بەهای خشلْە هاوشێوەکان بە پێی پەیوەندییەکی توانی بەبارستاییەکەیەوە دەبەسترێتەوە (نموونە 2)

دەتوانرێت بۆ شیکردنەوەی پێدراوەکان شێوازێك یان پەیوەندییەك دەربکەوێت کە لە نێوان دوو هێندا دووبارە دەبێتەوە. سەیری خشتەی خوارەوە بکە بۆ بەهایەکانی نەخشەی $f(x) = 2(3^x)$.

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	$\frac{2}{3}$	2	6	18	54

× 3　× 3　× 3　× 3

سەرەنجبدەکە رێژەی هەر بەهایەك لە بەهایەکانی y بۆ بەهای پێش خۆی نەگۆڕە. هەر بەهایەك لەو بەهایانە، جگە لە بەهای یەکەم، دەکاتە سێ ئەوەندەی بەهایەکەی پێش خۆی، و هەروەها، ئەوا رێژەی بەهای نەخشەی بەرامبەر بەهای x ـە کە هەمان ماوە لە یەکێکیان جیادەکاتەوە، رێژەیەکی نەگۆڕە دەتوانرێت ئەم جۆرە پێدراوانە بە نەخشەیەکی توانی $f(x) = ab^x$ بنوێنرێت.

نموونە 1 جیاکردنەوەی پێدراوە توانییەکان

دیاریبکە نەخشەی f نەخشەیەکی توانییە یان نا. ئەگەر توانییە، رێژەی نەگۆڕەکەی بدۆزەرەوە کاتێك $f(x) = ab^x$

أ

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-3	-1	1	3	5

جیاوازی یەکەم　+2　+2　+2　+2

نەخشەکە نەخشەیەکی هێڵییە.

ب

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

جیاوازی یەکەم　$+\frac{1}{2}$　+1　+2　+4

رێژەکان　$\frac{1}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{8}{4} = 2$

نەخشەکە نەخشەیەکی توانییە و رێژە نەگۆڕەکەی بریتیە لە 2

لەبیرت بێت

نەخشەی هێڵی وەك نموونەیەك بەکاردێت بۆ پێدراوەکان جیاوازییە یەکەمەکانی نەگۆڕ بێت. هەروەها نەخشەی دووجا وەك نموونەیەك بەکاردێت بۆ پێدراوەکان جیاوازیە دووەمەکانی نەگۆڕبێت.

خاڵی چاودێری

1. نەخشەی f نەخشەیەکی توانییە یان نا. ئەگەر توانییە رێژە نەگۆڕەکەی بدۆزەرەوە کاتێك $f(x) = ab^x$

أ

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	$2.\overline{6}$	4	6	9	13.5

ب

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-3	2	7	12	17

پێشتر بژمێری ڕوونکردنەوەیت بەکاردەهێنا بۆ دۆزینەوەی نموونەیەکی هێڵی کە پێدراوە هێڵییەکان دەنوێنێت. واتە کرداری **لێژبوونەوەی هێڵیت** ئەنجامدا، بژمێری ڕوونکردنەوەیی بەکاردێت بۆ دۆزینەوەی **نموونەی توانی** کە پێدراوەتوانییەکان دەنوێنێت. کاتێك دڵنیا دەبێت پێدراوەکان توانین. **ExpReg** (Exponential Regression) لە بژمێری ڕوونکردنەوەیدا بەکاربهێنە، بۆ دۆزینەوەی نموونەیەکی نوێ بۆ ئەوپێدراوانە، کرداری دۆزینەوەی نموونەی توانی بۆ نواندنی کۆمەڵێك پێدراو پێیدەوترێت کرداری **لێژبوونەوەی توانی Exponential Regression** نموونە توانییەکان کە بژمێری ڕوونکردنەوەیی درووستی دەکات ، تەنها نەخشەی جۆری $f(x)=ab^x$ دەگرێتەوە وە هەروەها کشانەوەی ئەم نەخشانە لە بژمێرەکە ناکرێت

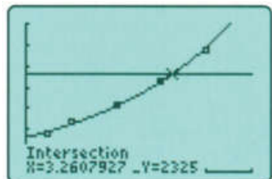
نموونـــە 2 جێبەجێکردن لە مشتومالکردنی خشڵەکان

خشتەی بەرامبەر بارستایی ژمارەیەك پارچە ئەڵماس و نرخەکەی بەنزیکەیی دەردەخات. نموونەیەکی توانی بۆ ئەو پیدراوانە بدۆزەوە. ئەو نموونەی دۆزیتەوە بەکاربهێنە بۆ خەملاندنی بارستایی ئەڵماسێك نرخەکەی 2325 هەزار دیناربێت.

هەنگاوی 1 پێدراوەکان لە دوو لیست لە ناوبژمێرەکە تۆماربکە.

نرخی ئەڵماس	
بارستەیی (قیراط)	نرخ دینار
0.5	920 000
1.0	1 160 000
2.0	1 500 000
3.0	2 150 000
4.0	2 900 000

فرمانی لێژبوونەوەی توانیExpReg بەکاربهێنە بژمێرەکە نموونەیەکی توانی ئەو پێدراوانەت دەداتی، بریتییە لە نەخشەی توانی $V(w) = 805462.6\ (1.38)^w$ کاتێك V هێمای نرخی ئەڵماسەکەیە، W هێمایە بۆ بارستەییەکەی کە بەقیرات پێوراوە.



هەنگاوی 2 بەڕوونکردنەوەیی پێدراوەکانی خشتەکە بنوێنیە، و وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشەکە بکێشە. بۆ دڵنیابوون لەوەی نموونەیەکی بۆ ئەو پێدراوانە دروستکردووە ڕێسای نەخشەکە بەرامبەرY1 لە شاشە Y = بنووسە، دووگمەیVARS دابگرە و**Statistics : 5** هەڵبژێرە پاشان ENTER دابگرە. بجوڵێ بۆ EQ Reg EQ : 1 هەڵبژێرە.

VARS Y-VARS
1:Window...
2:Zoom...
3:GDB...
4:Picture...
5:Statistics...
6:Table...
7:String...

XY Σ EQ TEST PTS
1:RegEQ
2:a
3:b
4:c
5:d
6:e
7↓r



Intersection
X=3.2607927 Y=2325

2 325 000 تۆماربکە بەرامبەرY2 لەوێنەی نەخشەی $V=2\ 325\ 000$ فەرمانی یەکتربڕین لە بژمێر بەکاربهێنە. لەوانەیە پێویستت بە ڕێکخستنی دوورییەکانی شاشەکە هەبێت بۆ ئەوەی خاڵی یەکتربڕین دەربکەوێت.

لەبیرت بێت

ئەگەر لەسەر شاشەی بژمێرr^2و r ت نەیبینی کاتێك لێژبوونەوە هەژمار دەکەیت. دووگمەی CATALOG دابگرە 2nd پاشان 0 دابگرە و Diagnosticon هەڵبژێرە.

خاڵی چاودێری

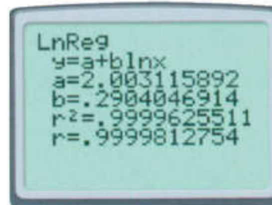
2. دابەزینی توانی بەکاربهێنە بۆ دۆزینەوەی نموونە بۆ پێدراوەکانی خشتەی خوارەوە، کەی ژمارەی بەکتریاکان دەبێتە 2000 بەکتریا.

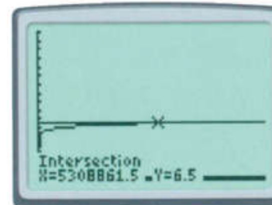
کات (خولەك)	0	1	2	3	4	5
ژمارەی بەکتریا	200	248	312	390	489	610

دەتوانرێت زۆر لە پێدراوەکانی ژیانی ڕۆژانە بە نەخشەی لۆگاریتمی بنوێنرێت. دەتوانێت **لێژبوونەوەی لۆگاریتمی Logarithmic Regression** بۆ دۆزینەوەی نەخشە بەکاربهێنرێت.

نموونـــــە 3 جیبەجێکردن لە فیزیادا

هێزی تەقینەوە	
TNT تەن	هێز
	2.0
	3.0
	4.0
	5.0





لە خشتەی بەرامبەر هێزی تەقینەوە، بە پێوەری ڕێختەر دەردەکەوێت، بۆ هێندێکی دیاریکراو لە ماددەی TNT ، نەخشەی لۆگاریتمی سروشتی بدۆزەوە، کە دەبێتە نموونەیەك بۆ ئەو پیدراوانە. ئەو نموونەی دۆزیتەوە بەکاربهێنە، بۆ خەملاندنی هێندە تەقێنراوەکان لە ماددەی TNT تەقینەوەکەی بکاتە بومەلەرزەیەك بەهێزی 6.5 بە پێوەری ڕێختەر. پێدراوەکان لە دوو لیستدا تۆماربکە.

لە بژمێری ڕوونکردنەوەیی پاشان فەرمانی لێژبوونەوەی لۆگاریتمی بەکاربهێنە، دوگمەی STAT دابگرە CALC پاشان **9 : LnReg** هەڵبژێرە.نەخشەی $R(x) = 2 + 0.29\ln x$ نموونەیەکی لۆگاریتمییە پێدراوەکانی نەخشەکە پێکدەهێنێت. کاتێك R هێزی بوومەلەرزەکان بێت بە پێوەری ڕێختەر و t هێندی تەقێنداوەکانی ماددەی TNT بە چەندها تەن بێت. بەهای r^2 دەریدەخات نموونەکە گونجاوە بۆ نواندنی پێدراوەکانی خشتەکە. فرمانی یەکتربرین لە بژمێری ڕوونکردنەوەیی بەکاربهێنە بۆ دۆزینەوەی x کاتێك $y = 6.5$ هێزی تەقاندنەوەکانی ماددەی TNT بەبارستایی 5.3 ملیۆن تەن بەنزیکەیی دەکاتە هێزی تەقینەوەی بوومەلەرزەیەك بەهێزی 6.5 بە پێوەری ڕێختەر.



خاڵی چاودێری

3. لێژبوونەوەی لۆگاریتمی بەکاربهێنە، بۆ دۆزینەوەی نەخشەیەك کە نموونەیەك لە پێدراوەکانی خشتەکە دروست بکات. کەی خێراییەکە دەگاتە 8 m/s مەتر لە چرکەیەکدا؟

خولەك	1	2	3	4	5	6	7
خولەك (m / s)	0.5	2.5	3.5	4.3	4.9	5.3	5.6

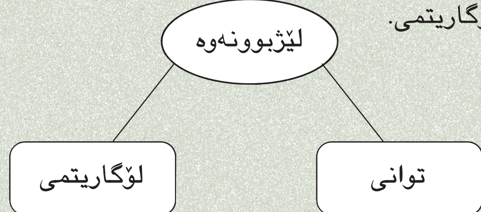
بیربکەوە و تاوتوێبکە

1. چۆن دەزانیت کە ئایا دەکرێت پێدراوەکان بە نموونەیەکی توانی بنوێنێت، کاتێك بە شێوەی $f(x) = ab^x$ بنووسرێت.

2. ڕوونبکەوە بۆچی پێدراوەکان لە باری دوو خاڵەکە بەس نییە بۆ ئەوەی پێت بڵێت پێدراوەکان لۆگاریتمین یان توانین.

3 ڕێکخەر بە ئەم هێڵکارییەی خوارەوە دروستبکە و تەواوبکە. ئەو هەنگاوانە دیاریبکە بۆ دۆزینەوەی نموونەیەکی توانی یان نموونەیەکی لۆگاریتمی.





7-4 ڕاهێنانەکان

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

1 **زاراوەکان** ______ بەکەڵکە کاتێك دەتوانرێت پێدراوەکان بەنەخشەی $f(x)=ab^x$ بنوێنرێت (لێژبوونەوەی توانی یان لێژبوونەوەی لۆگاریتمی).

پروانە نموونە 1

ئایا نەخشەی f نەخشەیەکە لە جۆری $f(x) = ab^x$ ئەگەر وایە، ڕیژە نەگۆڕەکە دیاریبکە

2

x	−1	0	1	2	3
$f(x)$	$-2\frac{5}{7}$	−1	11	95	683

3

x	−1	0	1	2	3
$f(x)$	27	18	12	8	$5\frac{2}{3}$

4

x	−1	0	1	2	3
$f(x)$	5	1	−3	−7	−11

5

x	−1	0	1	2	3
$f(x)$	$2\frac{1}{4}$	3	4	$5\frac{2}{3}$	$2\frac{1}{9}$

پروانە نموونە 2

6 **فیزیا** لەو خشتەیەی خوارەوە دەردەکەوێت، پلەی گەرمی کوپە چایەکە چەند لە پلەی گەرمی ژوورەکە زیاترە، کاتێك سارد دەبێتەوە. نموونەیەکی توانی بدۆزەوە، ئەو پێدراوانە بنوێنێت. نموونەکە بەکاربهێنە بۆ خەملاندنی ژمارەی خولەکی خایەندراو پێش ئەوەی جیاوازی نێوان پلەی گەرمی کوپەکەو ژوورەکە بۆ کەمتر لە 4 پلە.

چۆن چایەکە سارد دەبێتەوە					
کات بە خولەك	0	1	2	3	4
پلەکانی گەرمای زیاتر لەپلەی گەرمی ژوورەکە	55	48	43	38	33

پروانە نموونە 3

7 **ئەندامبوون** لەم خشتەیەی خوارەوە زیادبوونی ژمارەی ئەندامانی یانەیەکی کۆمەڵایەتی مانگانە دەردەکەوێت. نموونەیەکی لۆگاریتمی بدۆزەوە پێدراوەکانی خشتەکە بنوێنێت، نموونەکە بەکاربهێنە بۆ دۆزینەوەی ژمارەی مانگە پێویستەکان بۆ ئەو یانەیە بۆ ئەوەی ژمارەی ئەندامەکانی بگاتە 8000

بوون بە ئەندام لەیانەکە					
کات بەمانگ	6	18	42	90	150
ژمارەی ئەندامەکان	3000	4000	5000	6000	7000

ڕاهێنان وشیکارکردنی پرسیارەکان

ڕاهێنانی ئازاد	
بۆ شیکاری ڕاهێنانەکان	سەیری نموونە بکە
11–8	1
12	2
13	4

دیاریبکە ئایا f نەخشەیەکی توانییە لە جۆری $f(x) = ab^x$ ، ئەگەر وایە، ڕێژە نەگۆڕەکەی دیاریبکە.

8

x	−1	0	1	2	3
$f(x)$	1.25	1	0.75	0.5	0.25

9

x	−5	−3	1	3	5
$f(x)$	20	6	2	12	30

10

x	−1	0	1	2	3
$f(x)$	0.667	1	1.5	2.25	3.375

11

x	−1	0	1	2	3
$f(x)$	−16	−8	−4	−2	−1

12 **زانستە کۆمەڵایەتییەکان** خشتەی بەرامبەرت زیادبوونی ژمارەی شۆفێرەکان لە یەکێك لە وڵاتەکان لە ساڵی 1980 تا ساڵی 2000 دەردەخات، نموونەیەکی توانی بۆ نواندنی پێدراوەکانی خشتەکە بدۆزەوە. نموونەکە بەکاربهێنە بۆ دیاریکردنی ئەو کاتەی ژمارەی بەشداربووان لەو وڵاتە لە 120 ملیۆن تێدەپەڕێت.

زیادبوونی ژمارەی شوفێرەکان			
ساڵەکانی دوای 1970	10	20	30
ژمارە (بەملیۆن)	14.6	22.5	35.3

13 **گەیاندن** خشتەکەی خوارەوە زیادبوونی ژمارەی بەشداربوون لە ئینتەرنێت لە یەکێك لە وڵاتەکان لە ساڵی 1990 تا ساڵی 2000 دەردەخات، نموونەیەکی توانی بۆ نواندنی پێدراوەکانی خشتەکە بدۆزەوە. نموونەکە بەکاربهێنە بۆ دیارکردنی ئەو کاتەی ژمارەی شوفێرەکان لە 100 ملیۆن تێدەپەڕێت.

ژمارەی بەشداربووانی ئینتەرنێت											
ساڵەکانی دوای 1990	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ژمارە بە (ملیۆن):	4.4	5.5	6.6	7.3	9.1	8.5	8.7	11.1	15.7	19.6	23.6

14 **ژینگە** زانیاریەکان لە بارەی باڵندەی (غەرنوق) کە هەرەشەی لە ناو چونیان لێ دەکرێت ژمارەکەی دەستی بەزیادبوون کرد. خشتەکەی خوارەوە زیادبوونی ئەو ژمارەیەمان لە ماوەی 55 ساڵ دەردەخات نموونەیەکی لۆگاریتمی بدۆزەوە، زیادبوونی ژمارەی ئەو باڵندانە بنوێنێت. کەی ژمارەیان دەگاتە 500 باڵندە؟

ژمارەی باڵندەکانی غەرنوق					
ژمارە	18	40	85	120	185
ساڵەکانی دوای 1940	5	22	40	47	57

دیاریبکە ئایا پێدراوەکانی خشتەکە توانین. ئەگەر وایە لێژبوونەوەی توانی بەکاربهێنە بۆ دۆزینەوەی نموونەیەك ئەمە بنوێنێت

15

x	1	2	3	4
$f(x)$	11	95	683	4799

16

x	−1	0	2	3
$f(x)$	4	2	0.5	0.25

17 **بیری ڕەخنەگر** پێدراوکان لە بارەی جۆرە باڵندەیەك لە ئەفریقیا ئەوە دەگەیەنێت کە ژمارەیان کەمدەکات لە ساڵی 1930 یەوە بەلایەنی زۆرەوە زیاتر نیو ملیۆن کەمدەکات، بەڵام ئەمڕۆ ئەو کەمبوونە لە 15 000 کەمترە، پێدراوی تری پێویست چییە، بۆ ئەوەی بڕیاربدەیت، کە ئەم لێژبوونەوەیە توانییە؟

18 **ژینگە** لێکۆڵینەوەیەك وا دەگەیەنێت کە ئەستووری بەفر لە بەهاردا لە یەکێك لە ناوچە ساردەکان کاردەکاتە سەر تێکڕایی مانەوەی گۆڵك لە ژیاندا، ئەگەر ئەستووری بەفرەکە 5000 mm بێت تێکڕاکە دەبێتە نزیکەی 0.9%، و ئەگەر ئەستووری بەفرەکە 6700 mm بێت تێکڕاکەی دەبێتە 0.3% کەچی ئەستووری بەفرەکە 0.17% بێت تێکڕاکە دەبێتە 8250 mm ، نەخشەیەکی توانی بدۆزەوە بۆ نواندنی ئەو پێدراوانە. نموونەکە بەکاربهێنە بۆ خەملاندنی ڕێژەی مانەوەی گۆڵك لە ژیاندا کاتێك ئەستووری بەفرەکە 4000 mm بێت.



19 **تەکنەلۆژیا** خشتەی بەرامبەر، زیادبوونی فرۆشتنی ئامێرەکانی هێدفۆن لە پشووی هاویندا دەردەخات. وایدابنێ فرۆشتنی ئەو ئامێرانە بە ڕێکی زیاددەکات. نەخشەیەکی توانی بۆ نواندنی پێدراوەکانی خشتەکە بنووسە، نەخشەکە بۆ خەملاندنی فرۆشتنەکان بەکاربهێنە، بۆ سێ ساڵی داهاتوو.

20 **دەستەواژەیەك بنووسە** خشتەی بەهای نەخشەیەکی بەهایەکانی 1، 2، 3، 4، 5، 6، 7، 8 بۆ گۆڕاوی سەربەخۆی جیاوازییە یەکەمەکان و دووەمەکان و سێیەمەکان بدۆزەوە. دەستەواژەیەك بنووسە لە بارەی جیاوازییەکان لە n ڕادەدا وایدابنێ کە بواری نەخشەکە بریتییە لە ژمارە سروشتییەکان.

21 **بنووسە** چۆن دەزانیت کە کۆمەڵەی پێدراوەکان توانییە و هێڵی یان دووجایی یان سێجای نییە.

22 پێدراوەکانی ئەم خشتەی خوارەوە بەکاربهێنە.

x	0	2	3	4	5	6
y	18	32	43	57	76	101

أ) کامیان پێدراوەکانی خشتەکە بە شێوەیەکی باشتر دەنوێنێت نەخشەیەکی توانی یان نەخشەیەکی لۆگاریتمی؟ ئەمە ڕوونبکەوە

ب) ئەگەر ڕیزی دووەم لە خشتەی پێشوو $\log y$ لە خۆبگرێت لە جیاتی y، کام نەخشە لە پێدراوەکانی خشتەی نوێ بە شێوەیەکی باشتر دەنوێنێت. نەخشەی توانی یان نەخشەی هێڵی؟ ئەمە ڕوونبکەوە

ئامادەکردن بۆ تاقیکردنەوە

23 کام لەم بارانەی خوارەوە دەتوانرێت بە نەخشەیەکی توانی بنوێنرێت؟

أ) تێچوونێك بەهایەکەی 100 000 دینار مانگانە بەرز دەبێتەوە.

ب) ڕووبەری چوار گۆشەیەك درێژی لایەکی دە ، دە ، زیاد دەکات.

ج) دوای هەر خولێك نیوەتیرەی برغویەك بە زیاد بوونی پانییەکەی بە ڕێژەی 10% زیاددەکات.

د) ژمارەی دانیشتوان بە چەند جارەبوونەوەی کات، چەند جار دەبێتەوە.

24 کام لەم کۆمەڵە ژمارانەی خوارەوە توانین؟

أ) $(0,0.1)$، $(1,0.5)$، $(2,2.5)$، $(3,12.5)$

ب) $(0,-1)$، $(1,0)$، $(2,7)$، $(3,20)$

ج) $(0,-1)$، $(1,0.5)$، $(2,2)$، $(3,3.5)$

د) $(0,-1)$، $(1,2)$، $(2,11)$، $(3,26)$

25 **کورتە وەڵام** ژمارەی نەزانراو لە خشتەکەدا بدۆزەوە ئەگەر بزانیت پێدراوەکانی توانین.

x	0	1	2	3
y	2	3.5	■	10.71875

بەرەنگاری و فراوانکردن

26 نەخشەیەکی توانی ڕوونکردنەوەی بە دوو خاڵی $(2,48)$ و $(4,300)$دا دەڕوات بدۆزەوە. هەنگاوەکانت ڕوونبکەوە

27 **ژینگە** سەناریا لەیەکێك لە تاقیگەکانی کیمیا کاردەکات، هەڵمێکی ژەهراوی هەڵمژی لە ئەنجامی، تێکچوونی ئامێرێك. لە شیکردنەوەی خوێنەکەیدا پاش 4 کاتژمێر لە ڕووداوەکە دەرکەوت، ماددەی تۆکسین Toxine ی ژەهراوی بە ڕێژەی $0.01006\text{mg}/\text{cm}^3$ لە خوێنەکەیدا هەیە، لە شیکردنەوەیەکی تر دوای 2 کاتژمێر دوای شیکردنەوەی یەکەم دەرکەوت ڕێژەی تۆکسین بوو بە $0.00881\text{mg}/\text{cm}^3$ وایدابنێ هێندی تۆکسین لە خوێنەکەیدا بە شێوەی توانی بە پێی کات دەگۆڕێت.

أ نەخشەیەکی توانی بدۆزەوە،پێدراوەکان بنوێنێت.

ب تۆکسین هەڕەشە لە تەندروستی مرۆڤ دەکات ئەگەر ڕێژەکەی $0.015\text{mg}/\text{cm}^3$ لە خوێن زیاد بکات. ئایا ئەو هێندە تۆکسینەی کە سەناریا هەڵیمژی هەڕەشە لە تەندروستی دەکات؟

ج سەناریە دەتوانیت دەست بە کاری ڕۆژانەی خۆی بکاتەوە، کاتێك تێکرایی تۆکسین لە خوێنەکەی $0.00010\text{mg}/\text{cm}^3$ کەمتر بێت. ژمارەی کاتژمێری پێویست (بەنزیکردنەوە بۆ نزیکترین کاتژمێر) هەژماربکە بۆ ئەوەی بچێتەوە سەرکاری ڕۆژانەی خۆی.

پێداچوونەوەی لولپێچی

شیکاربکە *(وانەی پێشوو)*

28 $|-5x| = 45$ **29** $|x+4| = 0$ **30** $|2x-4| = 3$ **31** $2|2x|+1 = 10$

سفرەکانی هەر نەخشەیەك بەبەکارهێنانی شیتەڵکردن بدۆزەوە *(وانەی پێشوو)*

32 $f(x) = x^2 + 2x - 3$ **33** $f(x) = 3x^2 + 24x$

34 $f(x) = 2x^2 + 10x + 12$ **35** $f(x) = x^2 + 9x - 36$

شیکار بکە و ساغیبکەوە *(وانەی 4-6)*

36 $\frac{1}{64} = 4^{x+5}$ **37** $81^x = 3^{x+4}$ **38** $8^{\frac{x}{3}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+2}$ **39** $216^x = 6^{2x}$

بەشی 4

ڕێبەری خوێندن: پێداچوونەوە

1 جۆرە ڤیتامینێك لە خوێندا بە ڕێژەی 15% لە کاتژمێرێکدا کەمدەکات.

أ ئایا ئەم نەخشەیەی ئەم بارەدەنوێنێت نەخشە- یەکی ڕوو لەزیاد بوونە یان ڕوولە کەمبوون؟

ب ئەگەر بڕی ئەم جۆرە فیتامینە $400\ mg$ بێت. نەخشەیەك بنووسە بڕی ماوەی ڤیتامینەکە پاش T کاتژمێر بنوێنێت.

ج وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشەکە بکێشە و بەکاربهێنە بۆ خەملاندنی بڕی مانەوەی فیتامینەکە پاش 7 کاتژمێر

هەر نەخشەیەك لەمانە نەخشەی گەشەیە یان نەخشەی پووکانەوەیە دیاریبکە.

2 $f(x)=0.5(1.25)^x$

3 $f(x)=0.5\left(\frac{3}{2}\right)^x$

4 $f(x)=2.5(0.25)^x$

5 $f(x)=2(1+0.25)^x$

ئەم پێدراوانە بەکاربهێنە بۆ شیکارکردنی پرسیارەکان لە 6 بۆ 9

ژمارەی خوێندکاران لە یەکێك لە قوتابخانەکاندا بە ڕێژەی 2% سالانە زیاد دەکات، لەپێنج سالی کۆتایدا. ژمارەی خوێندکارەکان ئەم سال گەیشتە 765 قوتابی.

6 ئایا ئەو نەخشەی ئەو بارە دەنوێنێت نەخشەی گەشەیە یان نەخشەی پووکانەوەیە.

7 وێنەی ڕوونکردنەوەیی ئەم نەخشەبکێشە.

8 وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشەکە بەکاربهێنە، بۆ خەملاندنی ژمارەی خوێندکارەکان پاش 5 سال.

9 کەی ژماری خوێندکارانی قوتابخانەکە لە 1000 خوێندکار تێپەڕ دەکات؟

10 ڕوونکردنەوەی نەخشەی $f(x)=\frac{4}{5}-3x$ بکێشە. پێچەوانەی نەخشەکەی بنووسە وێنەی ڕوونکردنەوەیی بکێشە.

11 ئەو پەیوەندییەی بە خشتەکە نوێنراوە بە شێوەی ڕوونکردنەوە بکێشە.

x	-1	0	1	2	3
y	1	0.2	0.04	0.008	0.001

پاشان وێنەی ڕوونکردنەوەیی پێچەوانەی نەخشەکە بکێشە، و ئەو خشتەیە بنووسە کە دەینوێنێت.

ئەم پێدراوانە بۆ شیکارکردنی پرسیارەکانی 12 و 13 بەکاربهێنە.

کەمبوونەوەی ژمارەی دانیشتوانی شارێك بە ڕێژەی 3% لە چاو ژمارەی سالی ڕابردوو.

12 بڕێك بنووسە ژمارەی دانیشتوانی شارەکە ئەم سال P_T بەپێی ژمارەیان بۆ سالی ڕابردوو P_L بنوێنێت.

13 بڕێك بنووسە ژمارەی دانیشتوانی شارەکە بۆ سالی ڕابردوو P_L بەپێی ژمارەیان بۆ ئەم سال P_T بنوێنێت.

14 نەخشەی $M=\frac{5}{8}K$ ڕێگە بە گۆڕینی ماوەکان لە کیلۆمەتر بۆ میل بە شێوەی نزیکراوەیی دەدات. پێچەوانەی نەخشەکە بنووسە و بەکاربهێنە، بۆ گۆڕینی 25 میل بۆ کیلۆمەتر.

15 ئەم یەکسان بوونە $19^{1.5}=27$ بە شێوەی لۆگاریتمی بنووسە.

16 بەهای بڕەی $\log_4 64$ چەندە؟

17 وێنەی ڕوونکردنەوەی نەخشەی $f(x)=0.6^x$ بکێشە. و وێنە ڕوونکردنەوەی هەلگەڕاوەی نەخشەکە بکێشە، و مەوداکەی دیاریبکە.

ئەمانە لە شێوەی توانیەوە بۆ شێوە لۆگاریتمی بگۆڕە.

18 $3^5=243$ **19** $1=9^0$ **20** $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}=27$

ئەمانە لە شێوەی لۆگاریتمی بۆ شێوە توانییەوە بگۆڕە.

21 $\log_2 16=4$ **22** $\log 10=1$

23 $2=\log_{0.6}0.36$

بەهای ئەم بڕانە بە هزری هەژماربکە

24 $\log_7 49$ **25** $\log_{0.5}0.25$

26 $\log_{12}\left(\frac{1}{12}\right)$ **27** $\log 0.01$ **28** $\log_2 1$

29 خشتەیەك بۆ بەهاکانی نەخشەی $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ دروستبکە، و ێنەی ڕوونکردنەوەی پێچەوانەی نەخشەکە بکێشە، بەبەکارهێنانی خشتەی بەهایەکان، بوار و مەودای پێچەوانەی نەخشەکە دیاریبکە.

ئەم برە لۆگاریتمییانە بە سادەترین شێوە بنووسە

30 $\log 25 + \log 40$

31 $\log_5 25 - \log_5 25$

32 $\log_2 8 + \log_2 16$

33 $\log 100 + \log 1000$

34 $\log_2 128 - \log_2 2$

35 $\log 10 - \log 0.1$

36 $\log 10^5 + \log 10^4$

بەهای برەکان بدۆزەوە.

37 $\log_3 8^2$

38 $\log_5 25^2$

39 $\log_5 16$

40 ئەمرۆ ئاستی توندی دەنگ میوزیك لە یانەی لاوان بە 10 دیسیبل Decibel لەوەی دوێنێ بەرزتربوو نەخشەی $L = 10\log\frac{I}{I_0}$ بەکاردەهێنرێت بۆ پێوانی ئاستی توندی دەنگی مۆزیك L، کاتێك I هێمای توندی دەنگ بە $\mathrm{W/m^2}$ دەپێورێت. هێمای I_0 بۆ توندی بەرگوێ کەوتن. توندی دەنگی مۆزیك دوێنێ چەند ئەوەندەی توندی دەنگی مۆزیك ئەمرۆیە؟

شیکاری ئەم هاوکێشە.یە بکە

41 $5^x = 50$

42 $\log_9 x^2 = 5$

43 $3^{x-1} = \frac{1}{9}$

شیکاری ئەم لاسەنگەیە بکە.

44 $\left(\frac{1}{2}\right)^x \le 64$

45 $\log x^{\frac{5}{2}} > 2.5$

46 پەیوەندی $A = P(1+r)^n$ بۆدیاریکردنی بەهای دانراوی حسابی بانکی بە کاردێت، کە تێیدا گوژمەی بنەڕەتی P بە سوودی ساڵانە و تێکرای r پاش n ساڵ لە سپاردنی گوژمەکە. هەکار 250 000 دیناری لە بانکی دانا، کەی نرخی حسابە کە دەبێتە 500 000 دینار ئەگەر بزانیت ڕێژەی سوودی ساڵانە بریتییە لە 4% ؟

47 ئەم برە بەسادەترین شێوە بنوسە. $e^{\ln(2x+1)}$

48 سەیران 5 ملیۆن دینار لە حسابێك بە تێکرای سوودی ساڵانە 6% سپارد، بۆ ئەوەی پاشکەوت کردنەکە بەردەوام بێت. حسابەکەی پاش 5 ساڵ دەبێتە چەند؟

49 جۆرێك لە باڵندە ساڵی 1940 ژمارەیان 22 باڵندە بوو. بەردەوام بەزیاد بوونی توانی هەتا ساڵی 2003 گەیشتە 194 باڵندە.

أ نەخشەی گەشەی توانی بەکاربهێنە $P(t) = P_0 e^{kt}$ هێمای ژمارەی بنەڕەتی و$P(t)$ ژمارەکانییەتی P_0 لە کاتی t دا بۆ دیاریکردنی تێکرای زیادبوون k.

ب بەچەند ژمارەی ئەم باڵندانە دەخەمڵێنیت ئەگەر زیادبوونەکەی بەهەمان شێوە بەردەوام بێت؟

50 ئەم خشتەیەی خوارەوە زیادبوونی ژمارەی جۆرێك لە دارەکانی بەهارات دەنوێنێت بۆ ماوەی 6 ساڵ لە کێڵگەیەکی نموونەییدا. بژمێری ڕوونکردنەوەیی بەکاربهێنە، بۆ دۆزینەوەی نەخشەیەکی لۆگاریتمی کە پێدراوەکانی خشتەکە بنوێنێت. ئەو ساڵەی ژمارەی دارەکان دەبێتە 70 دار بخەمڵێنە.

ساڵ	1	2	3	4	5	6
ژمارە	14	30	40	46	53	55

ئەم خشتەی خوارەوە زیادبوونی ژمارەی باڵندەکان لە پۆلێك باڵندە لە جۆری دەگمەن دەنوێنێت. کە لە شوێنێکی دیاریکراودا دەژی لە ماوەی 55 ساڵانی کۆتایی.

ساڵەکان لە دەستکردن بەتۆمارکردنی ژمارەکان	ژمارەی باڵندەکان
5	18
22	22
40	85
57	185

51 **ExpReg** لە بژمێری ڕوونکردنەوەیی بەکاربهێنە، بۆ دۆزینەوەی نموونەیەکی توانی بۆ پێدراوەکانی خشتەکە.

52 **LnReg** لە بژمێری ڕوونکردنەوەیی بەکاربهێنە، بۆ دۆزینەوەی نموونەیەکی لۆگاریتمی بۆ پێدراوەکانی خشتەکە.

53 بەراوردبکە لەنێوان دوو بەهای r^2 کە بۆ دوو نەخشەکە دەگەڕێتەوە. کام لەم دوو نەخشانە باشترین نموونەیە لە نواندنی پێدراوەکانی خشتەکەدا؟ بۆچی؟

بەشی 4

تاقیکردنەوەی بەش

دیاریبکە، نەخشەکە گەشەی توانییەیان نەخشەی پووکانەوەی توانییە، پاشا وێنەی ڕوونکردنەوەیی بکێشە

1. $f(x) = 0.4^x$
2. $f(x) = 1.3\left(\frac{2}{5}\right)^x$
3. $f(x) = \frac{7}{8}(1.1)^x$
4. $f(x) = 50(1+0.04)^x$
5. تارا ئۆتۆمبێلێکی بە 000 500 13 دینار کڕی. وادابنێ نرخی ئۆتۆمبیلەکە ساڵانە بە ڕێژەی 15% دادەبەزێت. نەخشەی توانی بنووسە کە ببێتە نموونەیەك بۆ دیاریکردنی نرخی ئۆتۆمبیلەکە بە پێی کات (ساڵ)، وێنەی ڕوونکردنەوەیی ئەم نەخشە بکێشە، کەی نرخی ئۆتۆمبێلەکە لە 000 000 3 دینار کەمتر دەبێت؟

وێنەی ڕوونکردنەوەی نەخشەکە بکێشە، پاشان پێچەوانەی نەخشەکەی بنووسە، ڕوونکردنەوەی نەخشەکە بکێشە.

6. $f(x) = x - 1.06$
7. $f(x) = \frac{5}{6}x - 1.06$
8. $f(x) = 1.06 - \frac{5}{6}x$
9. $f(x) = \frac{1}{4}\left(1.06 + \frac{5}{6}x\right)$

ئەمانە بە شێوەیەکی تر بنووسە (توانی یان لۆگاریتم)

10. $16^{\frac{1}{4}} = 2$
11. $16^{-0.5} = \frac{1}{4}$
12. $\log_{\frac{1}{4}} 64 = -3$
13. $\log_{81} \frac{1}{3} = -\frac{1}{4}$

بەهای پێدراوی x بەکاربهێنە بۆ کێشانی وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشەکە، پاشان پێچەوانەی نەخشەکە بنووسە، و وێنەی ڕوونکردنەوەیی بکێشە بوار و مەودای پێچەوانەکەی نەخشەکەی دیاریبکە.

14. $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x \; ; x = -1,0,2,4$
15. $f(x) = 2.5^x \; ; x = -1,0,1,2,3$
16. $f(x) = 5^{-x} \; ; x = -1,0,1,2,3$

بە سادەترین شێوە بنووسە

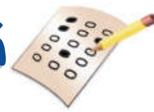
17. $\log_4 128 - \log_4 8$
18. $\log_2 12.8 + \log_2 5$
19. $\log_3 243^2$
20. $5^{\log_5 x}$

شیکاربکە

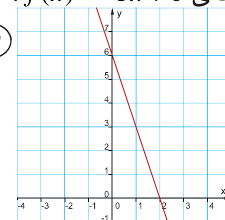
21. $3^{x-1} = 729^{\frac{x}{2}}$
22. $5^{1.5-x} \le 25$
23. $\log_4(x+48) = 3$
24. $\log(6x^2) - \log 2x = 1$
25. دەتوانیت نەخشەی $y = D(0.95)^x$ بەکاربهێنێت وەك نموونەیەك بۆ هەژمارکردنی ئەوەی دەمێنێتەوە لەو ڤیتامینە شلەی لە لەشی مرۆڤ دوای خواردنەوەی. D هێمای بڕی ڤیتامینی شلی خوراوەیە.
y هێمای بڕی ڤیتامینی ماوەیە بە ملیلتر پاش x خولەك یەکێك 15m ڤیتامینی شلی خواردوە. چەند کاتی دەوێت بۆ ئەوەی ڤیتامینەکەی لەشی لە 5ml کەمتربێت.
26. نیوەی تەمەنی پلۆتۆنۆنیۆم دەگاتە 239 و 000 24 ساڵ پەیوەندی $\frac{1}{2} = e^{-kt}$، t نیوەی تەمەنی مادەکەیە، k نەگۆری پووکانەوەیە، لە 100g پلۆتۆنیۆم پاش 5 ساڵ چەند دەمێنێتەوە؟
27. لێژبوونەوەی لۆگاریتمی بەکاربهێنە بۆ دۆزینەوەی نەخشەیەك بۆ لیکۆڵینەوەی ژمارەی تیمساحەکان، لە کۆمەڵە کە دا لەپێدراوەکانی خشتەی بەرامبەر. کاتێك y هێمای گۆڕاوی ژمارەی تیمساحەکانە، x هێمای گۆڕاوی کاتە بە ساڵ.

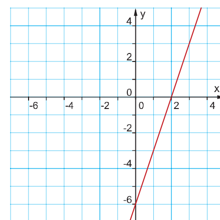
ژمارە	50	62	78
ساڵ	1	2	3

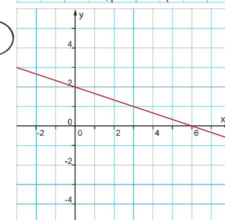
تاقیکردنەوەی کەڵەکەبوو

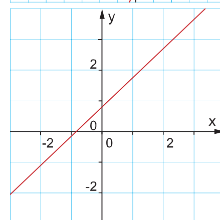


1 کام ڕوونکردنەوە پیچەوانەی نەخشە دەنوێنێت بۆ نەخشەی $f(x) = -3x + 6$.

أ


ب


ج


د


2 کام لەمانەی خوارەوە سادەترین شێوەیە بۆ بڕەی $\log_5 12 - \log_5 4$ ؟

أ $\log_5 48$ ب $\log_8 8$ ج $\log_5 16$ د $\log_5 3$

3 بەهای x چەندە لە هاوکێشەی $\log_4 (x-1)^3 = 9$؟

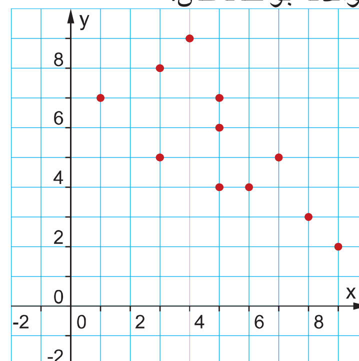
أ 27 ب 64 ج 65 د 81

4 کام لەمانە نەخشەی پەیدابووە لە ڕاکێشانی نەخشەی بنەڕەتی $f(x) = \ln x$ دووەیەکە بۆلای ڕاست و 7 یەکە بۆ خوارەوە پاشان فراونبوونی ئاسۆیی هاوکۆلکەی 6 بێت؟

أ $g(x) = 6\ln x$ ج $g(x) = 6\ln\left(x+2\right)+7$

ب $g(x) = \ln\left(\frac{x}{6}-2\right)-7$ د $g(x) = 6\ln\left(\frac{x}{6}+2\right)+7$

5 کام لەمانەی خوارەوە هاوکێشەی ڕاستەهێڵی باشترین نواندنە بۆ خاڵەکان.



أ $y = -\frac{10}{11}x + 10$ ج $y = -\frac{11}{10}x + 1$

ب $y = \frac{10}{11}x + 10$ د $y = \frac{11}{10}x + 1$

6 کام لەمانەی خوارەوە هاوکۆلکەی $P(x) = 8x^3 + 16x^2 + x + 2$

أ $4x - 1$ ب $2x + 3$ ج $x + 2$ د $3x - 3$

7 کام نەخشە لە مانەی خوارەوە سفرەکانی 1- و 0 ؟

أ $f(x) = x^2 + x - 1$ ج $f(x) = x^2 + x$

ب $f(x) = x^2 - x$ د $f(x) = -x^2 + x$

8 هاوکۆلکەی پەیوەستی بۆ دووکۆمەڵە پێدراو بریتییە لە -0.24 لە کاتێکدا ڕاستەهێڵی باشترین نواندن تەوەرەی دووەم لە $y = 10$ دەبڕێت. کام لەمانەی خوارەوە مەرج نیە ڕاست بێت؟

أ تا بەهایەکانی کۆمەڵەیەك زیاد بکات بەهایەکانی کۆمەڵەکەی تر کەم دەکات.

ب لە ڕاستەهێڵی باشترین نواندندا بەهایەکانی، y کەمدەکات بەهایەکانی x ی بەرامبەر، کە لە 10 کەمتر دەبێت.

ج ڕاستەهێڵی باشترین نواندن نموونەیەکی باشە بۆ پێدراوەکان.

د ئەو ڕاستەهێڵەی باشترین نواندنە، لارییەکەی سالبە.

9 کام لەم برگەهاوتایانەی خوارەوە سەرەکەی $(-2, -3)$

أ $y = x^2 + 4x + 1$ ج $y = x^2 - 4x + 1$

ب $y = x^2 + 4x - 1$ د $y = x^2 - 4x - 1$

10 کام لەمانە یەکسانە بە $3(x+y)^4$

أ $x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$

ب $3x^4 + 12x^3y + 18x^2y^2 + 12xy^3 + 3y^4$

ج $81x^4 + y^4$

د $3x^4 + 3y^4$

11 لاری ڕاستەهێڵی $y = mx + b$ موجەبە و یەکتربڕینی ستوونی 5 . لاری ڕاستەهێڵەکە دەست بە کەمبوونەوە دەکات کام لەمانە هەڵەیە؟

أ یەکتربڕینی ئاسۆیی ڕاستەهێڵە نوێیەکە کەمترە لە یەکتربڕینی ڕاستە هێڵە بنەڕەتییەکە.

ب ڕاستەهێڵی نوێ ڕاستەهێڵی بنەڕەتی تەنها لە $(0, 5)$ دا دەبڕێت.

ج لاری ڕاستەهێڵی نوێ گەورەترە لە 0 .

د ڕاستەهێلی نوێ تەریبە بە ڕاستەهێڵی بنەڕەتی.

ڕیزکراوەی $N=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 4 & -3\end{bmatrix}$ بەکاربهێنە بۆ شیکارکردنی دوو ڕاهێنانی 12 ، 13

12 دانەی n_{21} چەندە؟

(أ) 2 (ب) -3 (ج) 4 (د) -6

13 کام لەمانە هەڵگەراوەی ڕێزکراوی N

(أ) $\begin{bmatrix}2 & -1\\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}$ (ج) $\begin{bmatrix}\frac{3}{2} & -2\\ 2 & -1\end{bmatrix}$

(ب) $\begin{bmatrix}\frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\\ 2 & -1\end{bmatrix}$ (د) $\begin{bmatrix}2 & -1\\ \frac{3}{2} & -2\end{bmatrix}$

کورتە وەڵام

14 دانەی وونبوو چەندە؟

$$\begin{pmatrix}5 & 8\\ 4 & 3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\square & 2\\ -6 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-28 & 10\\ -2 & 8\end{pmatrix}$$

15 بەهای $\log_{6.25}2.5$ چەندە؟

16 یاسای هاوکێشەی دووجا بەکاربهێنە بۆ دۆزینەوەی ڕەگی موجەب بۆ نەخشەی

$f(x)=x^2+2.6x-7.31$

17 دووبارە بۆوەی ڕەگی 2 لەم هاوکێشەیەدا چەندە؟

$x^3-8x^2+20x-16=0$

18 جێگۆڕکێی نەخشەی بنەڕەتی $f(x)=x^2$ بۆ نەخشەی $g(x)=\frac{1}{2}(5x)^2-4$ کرا هاوکۆلکەی چوونەوەیەکەی چەندە؟

19 کام هێز لە هێزەکانی 2 یەکسانە بە؟ 268435456

کورتە وەڵام

20 یەکێك لە خوێندگاکان بژمێری چاپەکۆنەکانی خستە مەزاد بۆ فرۆشتن ودابینکردنی بە گوژمەی لە 5 200 000 دینار کەمتر نەبێت خوێندنگا کە نرخی بژمێری 500 000 دینارو نرخی ئامێری چاپی بە 50 000 دینار دیاریکرد خوێندنگاکە بەهیوای 5 بژمێر بۆ هەردوو ئامێری چاپ بەلایەنی کەمەوە بفرۆشێت.

(أ) سیستمی لاسەنگەی هێڵی بنووسە پرسیارەکە بنوێنێت x ژمارەی بژمێرەکان y ژمارەی ئامێری چاپەکانە.

(ب) بە شێوەی ڕوونکردنەوەیی سستەمی ئەو لاسەنگانەی نووسیوتە بنوێنە.

21 ڕادیۆم - 226 (Radium - 226) بۆ چارەسەری پزیشکی بەکاردەهێنرێت نیوەی تەمەنی ئەم ماددە 1620 ساتە.

(أ) بەهای k بدۆزەوە کەسەر بەڕادیۆم – 226

(ب) 100 g لە ڕادیۆم –226 پاش 3240 ساڵ چەندی لێدەمێنێتەوە؟ وەڵامەکەت نزیك بکەوە بۆ نزیکترین گرام.

22 زریان 26 شەتڵی سنەوبەری هەیە. دەیەوێت لە دووری یەکساندا، بیانرووێنێت، بە دەوری باخچەیەکی چوار گۆشە درێژی لایەکی 21 مەتر بێت، لە هەر گۆشەیەکی شەتلێك دەروێنێت.

(أ) زۆرترین ژمارەی لە تواناداربووی شەتڵەکان کە بتوانیت بیروێنێت چەند؟

(ب) ماوەی نێوان دوو شەتڵ چەندە؟

23 ماوە لە ئەنجامی دابەشکردنەکە بدۆزەرەوە.

$2x^5+6x^4-10x^3-2x^2+54x+14$ بەسەر $x-4$

درێژە وەڵام

24 ئەم خشتە ژمارەی کاتژمێرەکان دەنوێنیت کە خوێندکارەکە هەموو ئێوارەیەك بۆ بە جێهێنانی ئەرکی ماڵەوە دەیخایەنێت بۆ هەندێك لە پۆلەکان.

پۆل (x)	4	6	8	10	12
ژمارەی کاتژمێرەکان (y)	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3

(أ) دیارییکە ئەم پێدراوانە توانییە.

(ب) پێدراوەکانی خشتەکە بە شێوەی ڕوونکردنەوەیی بنوێنە.

(ج) پاسەدانی ئەوە بکە نەخشەی $f(x)=\frac{1}{16}(\sqrt{2})^x$ نموونەیەك بۆ پێدراوەکان دەنوێنێت.

(د) خوێندکاری پۆلی سێ یەم خوێندنی هەموو ئێوارەیەکی چەند دەخایەنێت؟

بەشی

5

سیفەتی نەخشەکان

Properties of Functions

بەشی پێنجەم

وانەکان

خاشاکەکانی بۆشایی

گەشتەکانی بۆشایی ئاسمان لە پاش خۆیان زیاتر لە 28 000 پارچە خاشاکیان جێهێشتووە، لە بۆشاییدا مەلەدەکەن. دەتوانیت ئەو ئاڕاستەی کە زیادبوونی ژمارەی ئەو خاشاکانەی دەیگرنە بەر شیبکەیتەوە بە بەکارهێنانی نەخشەکان و ڕوونکردنەوەکانیان

ئایا تۆ ئامادەیت؟

زاراوەکان

هەر زاراوەیەك بە پێناسەکەی لای چەپ ببەستەوە.

1	ڕاکێشان	أ	لێکۆڵینەوەیەکی ئامارییە بۆ پەیوەندی نێوان دوو گۆڕاو.
2	لاری	ب	تێکڕای نەگۆڕ بۆ گۆڕانی نەخشەی هێڵی.
3	لێژبوونەوە	ج	ڕێژە لەنێوان دوو کۆمەڵە لە پێوانەکان.
4	پەیوەستی	د	جێگۆڕکیی ئەندازەیی هەر خاڵێك لە خاڵەکانی شێوە ئەندازەییەکەیان بۆ ڕوونکردنەوەیی بەهەمان ماوە و ئاڕاستە دەجولێنیت.
		هـ	پێوانەی هێزی پەیوەندی هێڵی نێوان دوو گۆڕاو و ئاڕاستەکانیانە.

پێکەوە بەستنی دەق و جەبر

هاوکێشەیەك بنووسە هەر بارێك لەمانە بنوێنێت.

5 تێچوونی بەکرێگرتنی ستۆدیۆی تۆمارکردن کاتژمێری یەکەم 30 000 دینارەو 20 000 دینار بۆ هەر کاتژمێرێکی زیادە

6 تانکییەکی ئاو 30 گاڵۆن ئاوی تێدایە، ترومپایەك 8 گالون ئاو زیاد دەکاتە سەری بۆ هەر خولەکێك.

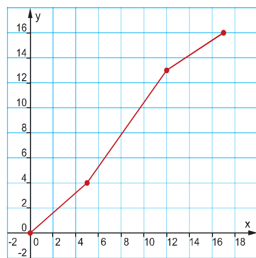
هێڵە ڕوونکردنەوەییەکان

وێنەی ڕوونکردنەوەیی بەرامبەر بەکاربهێنە بۆ دیاریکردنی بەهای داواکراو

7 $f(6)$

8 $f(15)$

9 بەهای x کاتێك $f(x)=2$



10 بەهای x کاتێك $f(x)=9$

11 لاری پارچە ڕاستەهێڵی نێوان $x=6$ و $x=14$

12 لاری پارچە ڕاستەهێڵی نێوان $x=14$ و $x=18$

لێکدانی دوو ڕادەدارەکان

لێکبدە، پاشان بە سادەترین شێوە بنووسە.

13 $(x-6)(x+4)$

14 $(6-x)(4-x)$

15 $(5x+8)(2x-7)$

16 $(x^2-7)(4x+5)$

17 $(3x^2+8)(7x^2+8)$

18 $(x-8)(x+8)$

نووسینی بڕی ڕادەدارەکان بەسادەترین شێوە

ئەمانە بە سادەترین شێوە بنووسە.

19 $8(3x^5)-(2x)^3(5x^2)$

20 $5(x+3)^2-6(x+3)$

21 $3x(4-x^3)-6x^2(x+4)$

22 $3x^3(x^2+4)^2-x(x^4-5)$

بەشی 5

ڕێبەری خوێندن: تێڕوانین لەسەر بەشەکە

لە ڕابردوودا

خوێندووتە

- نەخشە جیاوازەکان و ڕوونکردنەوەکانیان و هاوکێشەکانیان.
- جێگۆڕکێی زۆر لە نەخشەکان.
- جێبەجێکردنی کردارە جیاوازەکان لەسەر برە جیاوازەکان.
- بەکارهێنانی نەخشە هێڵییەکان و دووجاکان و توانەکان بۆ دروستکردنی نموونەی بیرکارییانە، بارەکانی ژیانی ڕۆژانە بنوێنێت.

لەم بەشەدا

لەمەودوا فێردەبیت

- نواندنە جیاوازەکانی نەخشەکە.
- جێگۆڕکێی نەخشە بنکە پەلدارەکان.
- ئەنجامدانی کردارەکان لەسەر نەخشەکان.
- دروستکردنی نموونە بیرکارییەکان بە بەکارهێنانی نەخشە جیاوازەکان.

لە داهاتوودا

دەتوانیت کارامەییەکانی ئەم بەشە بەکاربێنیت

- لە قۆناغەکانی داهاتوو کە جیاکاری و تەواوکاری و ئامار دەخوێنن.
- لە خوێندنی وانەکانی تری وەك تەندروستی و فیزیا و کیمیا و ئابووریدا.
- لە دەرەوەی خوێندنگا بۆ دارشتنی نموونەی پێدراوەکان و جیبەجێکردنی بێشبینییەکان، لە بوارە جۆر بەجۆرەکانی وەك وەرزش و گەشت و پارەدار کردن.

زاراوەکان — Vocabulary

Vocabulary	زاراوەکان
Composition of functions	ئاوێتەکردنی نەخشەکان
One-to-one function	نەخشەی یەك بۆ یەك
Piecewise function	نەخشەی ڕێسا پەلدار
Step function	نەخشەی پلەدار

ڕۆشناییەك لەسەر زاراوەکان

بۆ ڕاهاتن لەگەڵ هەندێك زاراوەی هاتوو لەم بەشەدا، ئەم هەنگاوانە پەیڕەوبکە:

1. لە واتاکانی وشەی **ئاوێتە** کۆمەڵە شتێك پێکەوە دابنرێن، چۆن وشەی ئاوێتە بەو واتایە بەکاردێت بۆ تێگەیشتنت لە **ئاوێتەکردنی نەخشەکان** لە بیرکارییدا.

2. ئەگەر سەیری پلەکانی پەیژە بکەیت لە تەنیشتەوە، ئایا ئەوە دەبینیت وێنەی ڕوونکردنەوەی نەخشە دەنوێنێت؟ تا چ ڕادەیەك لە ڕوونکردنەوەی **نەخشەڕێسا پەلدار** دەچێت؟

3. پێناسەی نەخشەت لەبیربێت، بۆ چوونت لەسەر **نەخشەی یەك بۆ یەك** چییە؟ نموونەیەك لە بیرکارییدا بهێنەوە و نموونەیەکی ژیانی ڕۆژانە بۆ نەخشەی یەك بۆ یەك و نموونەیەکی تر بۆ نەخشەیەك یەك بۆ یەك نەبێت.

4. پلەکانی پەیژە تەریبن و بەیەکەوە نەبەستراون، چی تێدەگەی لە دەستەواژەی نەخشەی پلەدار.

بەشی

5

بیرکاری به خوێندنەوه و نووسین



ستراتیژی خوێندنەوە: پرسیارەکان بخوێنەوە بۆئەوەی تێبگەیت

پرسیارەکە چەندجارێك بخوێنەوە، بۆئەوەی لە بیرۆکەی پرسیارەکە تێبگەیت پاشان پرسیارەکە بە شێنەیی و بە وردی بخوێنەوە بۆ دیاریکردنی داواکراو. لەکاتی خوێندنەوەدا هێڵ بەژێر زانیارییەکان بکێشە – کلیلەکانی دەقی پرسیارەکە هەنگاوی جۆراوجۆر بێت، بیکە بەچەند بەشێك، پاشان پلان بۆ شیکارکردنەکەی دابڕێژە.

دۆزینەوەی بۆشایی نەخشەی $f(x)=\frac{7}{2}\sqrt{x}$ ڕێسایەکە بۆ خەملاندنی ئاسۆ بەکیلۆمەتر کاتێك چاوی بینەر لە بەرزی x مەتر لە ڕووی زەوی بێت. دەتوانیت وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشەکە بکێشیت بۆ بەرامبەرەکەت لەسەر مەریخ بەکێشانیکی ئاسۆیی هاوکۆلکەکەی $\frac{9}{5}$ بێت. نەخشەی دووری ئاسۆ لە مەریخ بنووسە و بەکاربهێنە بۆ هەژمارکردنی دووری ئاسۆ لە کەشتییەوانی بۆشایی سەر مەریخ، لەڕووی هەسارەکەوە 6 مەتر چاوی بەرز دەکاتەوە.

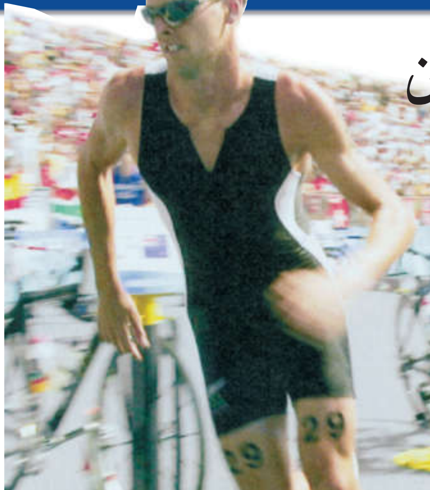
هەنگاو	پرسیار	وەڵام
1	بیرۆکەی پرسیارەکە چییە؟	جێگۆڕکێی نەخشەی ڕەگی دووجا بە گۆڕینی هاوکۆلکەکانی.
2	پرسیارەکە داوای چ وەڵامێك دەکات؟	• نووسینەوەی نەخشەکە بۆ تێخستنی هاوکۆلکەکەی نوێ. • هەژمارکردنی بەهای نەخشە نوێیەکە کاتێك x بەهایەکی دیاریکراوە وەردەگرێت.
3	ئەم زانیارییانە – کلیلی پێویست بۆ شیکارکردنی پرسیارەکە چین؟	• نەخشەی $f(x)=\frac{7}{2}\sqrt{x}$ دووری لەسەر زەوی دەنوێنێت. • نەخشەی سەر مەریخ بریتییەلە کشانی نەخشەی زەوی بەهاوکۆلکەی $\frac{9}{5}$. • کەشتییەوانی بۆشایی لەسەر ڕووی مەریخ 6 مەتر چاوی بەرزدەکاتەوە.
4	پلانم چییە بۆ شیکارکردنی ئەو پرسیارە فرە هەنگاوە؟	• نووسینی نەخشەی دووری ئاسۆیی لەسەر مەریخ. • هەژمارکردنی بەهاکەی کاتێك $x = 6$

هەوڵبدە

بۆ هەر پرسیارێك خشتەیەك بۆ هەنگاوەکانت دروستبکە (هەروەك لەسەرەوە دیارە)

1. درێژی لاکێشە $x + 5$، پانی $x + 4$ مەتر بێت خشتەیەکی ڕێژەیی بنووسە، ڕێژەی ڕووبەری لاکێشەکە بۆ چێوەکەی بنوێنێت. بوار و مەودای گونجاو بۆئەم خشتەیە دیاریبکە.

2. نەخشەی $d = \frac{\sqrt{15w}}{2.54\pi}$ نموونەیەکە بۆ هەژمارکردنی تیرەی گوریس (بەسانتیمەتر) کە پێویستە بۆ بەرزکردنەوەی w تەن. گوریسێك تیرەکەی 3.5 cm بێت بارستایی چەن تەن زیاتر دەتوانێت بەرزبکاتەوە لە گوریسێکی تر تیرەکەی 5.1 cm بێت؟



1-5 نەخشە ڕێسا پەلدارەکان

Piecewise Functions

ئامانجەکان

• نەخشەی ڕێسا پەلدار دەنوسێت و وێنە ڕوونکردنەوەییەکەی دەکێشێت.

• نەخشە ڕێسا پەلدارکان بۆ باسکردنی باری ژیانی ڕۆژانە بەکاردەهێنێت.

زاراوەکان Vocabulary

نەخشەی ڕێسا پەلدار
Piecewise function

نەخشەی پلەدار
Step function

بۆچی ئەمە فێردەبین؟

دەتوانیت نەخشەی بنکە پەلدار بەکاربهێنیت بۆ نواندنی توانای پێشبڕکێکار لە پێشبڕکێی سیانی (نموونە 4) .

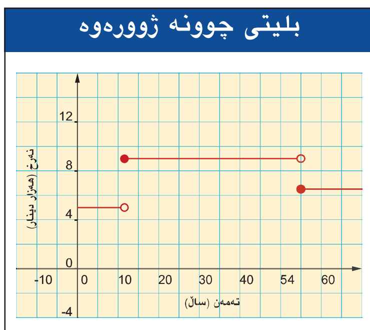
نەخشەی ڕێسا پەلدار **Piecewise Function** بریتییە لە کۆبوونەوەی نەخشەیەك یان زیاتر کە **لقەکانی** ، ڕێسای ئەو نەخشە لە بەشێکەوە بۆ بەشێکی تر بوارەکەی دەگۆڕێت بۆ نموونە. نرخی بلیتی چوونەژوورەوەی مۆزەخانەی نیشتمانی بە جیاوازی تەمەنەکان دەگۆڕێت، بە جۆرێك کە بۆهەر چەشنە تەمەنێك نرخێك دیاریدەکرێت بەم شێوەیە. بەهای ئەم نەخشەیە نرخی بلیتی چوونە مۆزەخانە کە بەپێی تەمەن دەنوێنێت، نەگۆڕە لەمەودای هەر بەشێکدا کە بوارەکەی چەشنە تەمەنێك دەنوێنێت، بەهایەکان بە پێی جیاوازی بەشەکان جیاوازدەبن. (نرخی بلیتەکان بە پێی تەمەنەکان جیاوزا دەبن).

نموونە 1 جیبەجیکردن لە بواری خۆشیدا

خشتەیەك بۆ نواندنی وێنەی ڕوونکردنەوەیی بەرامبەرت دروستبکە. پاشان بە وشە باسیبکە.

هەنگاوی 1 خشتەیەك دروستبکە.

لەبەرئەوەی سەری پارچە ڕاستەهێڵەکانی ناو وێنە ڕونکردنەوەییەکە بوارەکە دەکەن بە سێ بەشەوە. خاڵی سەرەکان و ئەو خاڵانەی لێوەی نزیکە بۆ دیاریکردنی ئەو بەشانە بەکاربهێنە.



نرخی بلیتی چوونەژوورەوە	
تەمەن	نرخ
لە 5 بۆ 12	5000
لە 13 بۆ 54	9000
لە 54 گەورەتر	6500

بواری نەخشەکە بۆ سێ بەش دابەش دەکرێت

تەمەنەکانی لە 12 کەمتر ←[5, 13)

تەمەنەکانی لە 13 کەمتر نەبێ و لە 55 کەمتر بێت ←[13, 55)

تەمەنەکانی کەمتر نەبێت لە 55 ←[55, ∞)

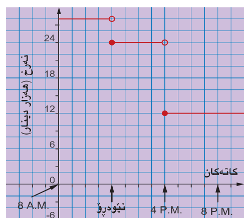
هەنگاوی 2 باسکردنی بە وشە بنووسە.

بەشەکانی بوار و نرخەکان بەپێی خشتەکە بەکاربهێنە.

تەمەنی کوڕێك لە 12 ساڵ بەرەو خوار بۆ نرخی بلیتەکەی 5000 دینار دەدات بەڵام ئەوەی لە 13 ساڵ کەمتر نەبێت و لە 54 ساڵ زیاتر نەبێت بۆ بلیتەکەی 9000 دینار دەدات. ئەوەی لە 55 ساڵ کەمتر نەبێت 6500 دینار دەدات.



1. خشتەیەك دروستبکە وێنە ڕوونکردنەوەیی بەرامبەر بنوێنێت، پاشان باسکردنی بە وشە بنووسە.

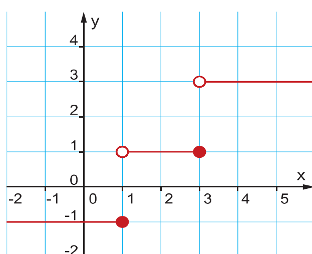


دەتوانیت نەخشەی ڕێسا پەلدار بە نووسینی نەخشەیی دەربېرێت وەك نەخشەی نموونە 1، بەم شێوەیە دەنووسرێت.

$$f(x)=\begin{cases}5000 & 0<x<13\\ 9000 & 13\le x<55\\ 6500 & x\ge 55\end{cases}$$ لق

بەم شێوەیە دەخوێنرێتەوە، $f(x)$ یەکسانە بە 5000 کاتێك x گەورەتر لە 0 و بچوکتر لە 13 بێت، 9000 کاتێك x کەمتر نەبێت لە 13 و کەمتر لە 55 بێت، 6500 کاتێك x کەمتر نەبێت لە 55 .

بۆ دیاریکردنی بەهای نەخشەیەکی ڕێسا پەلدار بۆئەو بەهایەی دەیدرێتێ، لقەکەی دیاریبکە، پاشان ڕێسای نەخشەی ئەو بەشە بەکاربهێنە.



جۆرێك لە نەخشەی بنکە پەلدار سیفەتێکی گرنگیان هەیە لە بەهایەکەی نەگۆڕە لەهەر بەشێك لە بەشەکانیدا. بەم نەخشانە دەوترێت **نەخشەی پلەدار** **Step Function** .

نموونە لەسەر نەخشەی پەلدار:

$$f(x)=\begin{cases}-1 & x\le 1\\ 1 & 1<x\le 3\\ 3 & x>3\end{cases}$$

بۆ تێگەیشتنت لەهۆکاری ناونانی نەخشەکە بە پلەدار، بە وردی سەرنجی ڕوونکردنەوەی نەخشەکە بدە.

نموونە 2 هەژمارکردنی بەهاکانی نەخشەی ڕێسا پەلدار

بۆهەر نەخشەیەکی ڕێسا پەلدار بەهای بەرامبەر $x=-2$ و $x=5$ بدۆزەوە.

أ
$$f(x)=\begin{cases}-5 & x\le 0\\ 4 & 0<x\le 3\\ 12 & x>3\end{cases}$$

$f(-2)=-5$ لەبەرئەوەی $-2<0$ ، ئەو لقەی بەرامبەر $x\le 0$ بەکاربهێنە

$f(5)=12$ لەبەرئەوەی $3<5$ ، ئەو ئەلقەی بەرامبەر $x>3$ بەکاربهێنە

ب
$$f(x)=\begin{cases}3x+4 & x<5\\ x^2-3 & x\ge 5\end{cases}$$

$f(-2)=3(-2)+4=-2$ لەبەرئەوەی $-2<5$، ئەو ئەلقەی بەرامبەر $x<5$ بەکاربهێنە

$f(5)=5^2-3=22$ لەبەرئەوەی $5\le 5$ ، ئەو ئەلقەی بەرامبەر $x\ge 5$ بەکاربهێنە



2. بۆ هەر نەخشەیەکی ڕێسا پەلدار بەهای بەرامبەر $x=-1$ و $x=3$ بدۆزەوە.

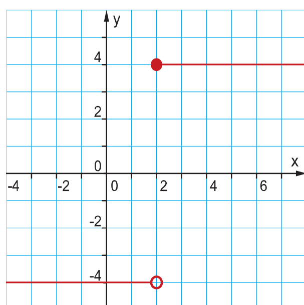
أ $f(x)=\begin{cases}12 & x<-3\\ 15 & -3\le x<6\\ 20 & x\ge 6\end{cases}$

ب $f(x)=\begin{cases}3x^2+1 & x<0\\ 5x-2 & x\ge 0\end{cases}$

نموونــــە 3 وێنەی ڕوونکردنەوەی نەخشەیی بنکە پەلدار

وێنەی ڕوونکردنەوەیی هەر نەخشەیەك بکێشە.

أ
$$f(x)=\begin{cases}-4 & x<2\\ 4 & x\ge 2\end{cases}$$

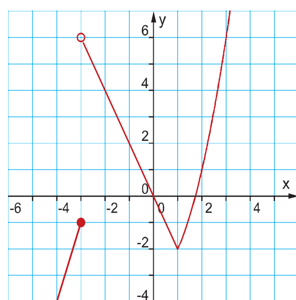


ڕوونکردنەوەی نەخشەکە لەدوو بەش پێکدێت و هەریەکەیان نیو ڕاستەهێڵە لەبەرئەوەی $x=2$ بواری نەخشەکە دەکات بەدوو بەشەوە، بەهای نەخشەکە لەو بەهایەدا هەژماریکە. بە بەکارهێنانی دوو لقی بنکەکەی. لەبەرئەوەی $f(x)=-4$ کاتێك $x<2$ وێنەی خاڵی $(2, -4)$ لە شێوەی بازنەیەکی بچوك کراوەی بکێشە، پاشان بە دەستپێکردن لەم خاڵەوە وێنەی نیو ڕاستەهێڵەکە بە ئاسۆیی بۆلای چەپ بکێشە. لەبەرئەوەی $f(x)=4$ کاتێك $x\ge 2$ وێنەی خاڵی $(2, 4)$ لە شێوەی بازنەیەکی بچوکی پڕکراوە بکێشە، و بەدەستپێکردن لەم خاڵەوە نیو ڕاستەهێڵەکە بە ئاسۆیی بۆلای ڕاست بکێشە.

ب
$$g(x)=\begin{cases}3x+8 & x\le -3\\ -2x & -3<x<1\\ x^2-3 & x\ge 1\end{cases}$$

x	$3x+8$	$-2x$	x^2-3
-4	-4		
-3	-1	6	
-2		4	
-1		2	
0		0	
1		-2	-2
2			1
3			6

نەخشەکە لەدووبەشی هێڵی و بەشێکی دووجا پێکدێت. بواری نەخشەکە لە $x=-3$ و $x=1$ بەش دەبێت. خشتەی بەهایەکان بۆ وێنە کێشانی ڕوونکردنەوەیی هەرلقێك بەکاربهێنە.



بازنەیەکی پڕ لە $(-3 ,-1)$ و بازنەیەکی بەتاڵ لە $(-3 ,6)$ دیارییکە بە شێوەیەك لەسەر ڕوونکردنەوەکە بەهای نەخشەکە لە $x=-3$ بەڕوونی دیاربێت. پێویست بە دانانی خاڵ لەسەر $(1 , -2)$ ناکات. چونکە ڕوونکردنەوەی دوو لقەکە لەم خاڵەدا بەیەك دەگەن.



3. وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشەکە بکێشە.

أ
$$f(x)=\begin{cases}4 & x\le -1\\ -2 & x>-1\end{cases}$$

ب
$$f(x)=\begin{cases}-3x & x<2\\ x+3 & x\ge 2\end{cases}$$

سەرنجبدە نەخشەی ڕێسا پەلدار مەرج نییە نەخشەیەکی بەردەوام بێت، واتە ڕوونکردنەوەکەی خاڵی لێکدابڕاوی تێدایە. بۆ نووسینی ڕێسای نەخشەی ڕێسا پەلدار یەکەمجار دیارییکە لە کوێدا بواری نەخشەکە بەش دەبێت، پاشان ڕێسای هەر بەشێك بنووسە پاش ئەوە ڕێساکان لە نووسینی نەخشەیدا کۆبکەوە.

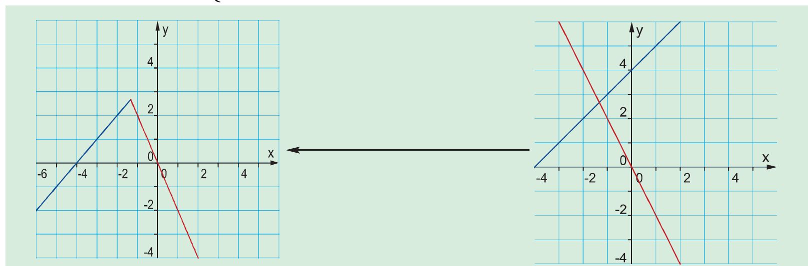


لە خوێندکارەوە بۆ خوێندکار

وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشە ڕێسا پەلدارەکان

کاتێك وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشەی ڕێسا پەلدار دەکێشم، وێنەی ڕوونکردنەوەیی هەر لقێك دەکێشم، هەروەکو نەخشەیەکی سەربەخۆ،پاشان ئەم بەشە ڕوونکردنەوەییە کە بەهایەکانی x ی دەکەوێتە دەرەوەی بەشەکە دەسڕمەوە.

نموونە $f(x)=\begin{cases} x+4 & x<-2 \\ -2x & x\geq -2 \end{cases}$



نموونــــە 4 جێبەجێکردن لەسەر وەرزش

ئالان بەشداری لە پێشبڕکێی سیانی بەدرێژی **153 km** کرد، لەیەك کاتژمێر دا **3 km** مەلەی کرد و **120 km** بەسواری پاسکیل لە ماوەی **4** کاتژمێردا بڕی. پاشان**30 km** بۆماوەی **3** کاتژمێر ڕایکرد. وێنەیەکی ڕوونکردنەوەیی بکێشە بۆئەو دوورییەی ئالان بەپێی کات بڕیویەتی. پاشان نەخشەیەکی ڕێسا پەلدار بۆئەو ڕوونکردنەوە بنووسە.

هەنگاوی 1 خشتەیەك دروستبکە پێدراوەکان کورتبکاتەوە. یاسای پەیوەندی نێوان خێرایی و کات و دووری براو بەکاربهێنە، بۆ دیاریکردنی تێکرای خێرایی ئالان لەهەر قۆناغێکی پێشبڕکێکەدا.

نواندنی ئالان لە پێشبڕکێی سیانی

قۆناغ	کات	دووری	خێرایی
مەلەوانی	1	3	3
پاسکیل سواری	4	120	30
ڕاکردن	3	30	10

هەنگاوی 2 لەبەرئەوەی کات گۆڕاوێکی ئازادە، دیارییکە لە کوێدا بواری نەخشەکە بەش دەبێت بە بەکارهێنانی پێدراوەکانی کات.

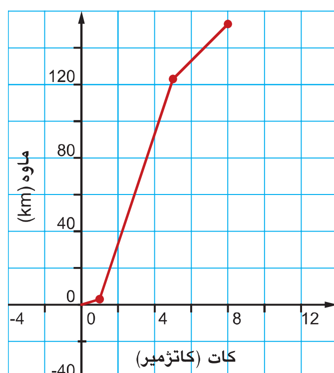
مەلەوانی $0\leq t\leq 1$ یەك کاتژمێر مەلەی کردووە

پاسکیل سواری $1<t\leq 5$ 4 کاتژمێر ڕایکردووە

ڕاکردن $5<t\leq 8$ 3 کاتژمێر ڕایکردووە

هەنگاوی 3 وێنەیەکی ڕوونکردنەوەیی دروستبکە.

پاش کاتژمێرێك. ئالان $3\ km$ بڕی . هەتاکو ئەوەی بڕیویەتی لە کۆتایی قۆناغی دووەم (پاش 5 کاتژمێر) $123\ km$ بڕی لە کۆتاییدا $153\ km$ تەواوکرد لە 8 کاتژمێردا.



ئاگاداربە!

دەتوانرێت پەیوەندی $d=vt$ بنووسرێت، بەشێوەی $v=\frac{d}{t}$ بۆ دۆزینەوەی تێکرای خێرایی

هەنگاوی 4 نەخشەی هێڵی بۆهەر لقێك بنووسە.

شێوەی لاری – خاڵ بەکاربهێنە

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

مەلەوانی $d=3t$ $m=3$ و خاڵی $(0, 0)$ بەکاربهێنە

بە پاسکیل $d=30t-27$ $m=30$ و خاڵی $(5, 123)$ بەکاربهێنە

ڕاکردن $d=10t+73$ $m=10$ و خاڵی $(8, 153)$ بەکاربهێنە

نووسینی نەخشەیی بۆئەم نەخشە بریتییە لە:

$$d(t)=\begin{cases} 3t & 0\le t\le 1 \\ 30t-27 & 1<t\le 5 \\ 10t+73 & 5<t\le 8 \end{cases}$$



4. ڕێباز لە یەکێك لە چێشتخانەکانی پایتەخت ئیش دەکات، بۆهەر کاتژمێرێکی ئیش 8000 دینار وەردەگرێت، کاتێك کاتژمێرەکانی ئیشکردنی هەفتەیەکی لە 40 کاتژمێر تێپەڕنەکات. و 000 12 دینار وەردەگرێت بۆهەر کاتژمێرێکی ئیشکردن زیاد لە 40 کاتژمێر تێپەڕنەکات. وێنەیەکی ڕوونکردنەوەیی بکێشە، دەستکەوتنی ڕێباز بەپێی ژمارەی کاتژمێرەکانی ئیشکردن لە هەفتەیەکدا بنوێنێت، ئەگەر بزانیت ناتوانیت زیاتر لە 60 کاتژمێر لە هەفتەیەکدا ئیش بکات. نەخشەیەکی ڕێسا پەلدار بۆئەو ڕوونکردنەوە بنووسە.

بیربکەوە و تاوتوێبکە



1. ڕونبکەوە ئەگەر لە توانادابێت نەخشەی پلەدار بەدەستبهێنرێت بەهایەکەی نەگۆڕبێت. لەهەر لقێك و ڕوونکردنەوەکەی نەپچڕاوبێت.

2. ڕێکخەربە ئەم خشتەیەی خوارەوە دروستبکە و تەواویبکە. بۆهەر چوارچێوەیەك باسی بوار و مەودای هەموو نەخشەکە بنووسە و نموونەی بۆ بهێنەوە.

نەخشە	بوار	مەودا	نموونە
ڕێسا پەلدار			
پلەدار			

1-5 ڕاهێنانەکان

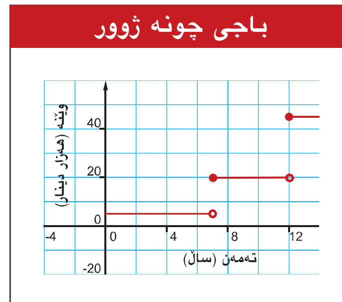
ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

1 پەیوەندی نێوان نەخشەی پلەدار و نەخشەی ڕێسا پەلدار ڕوونبکەوە.

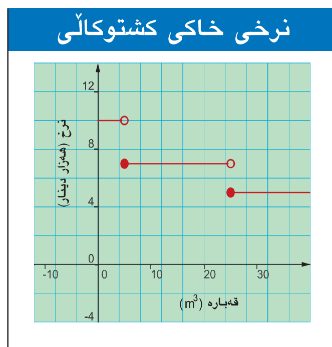
پڕوانە نموونە 1

خشتەیەك بۆهەر وێنەیەکی ڕوونکردنەوە بکێشە و بە وشە باسیبکە.

2 باجی چونە ژوور



3 نرخی خاکی کشتوکاڵی



پڕوانە نموونە 2

بەهای نەخشەکە هەژماربکە کاتێك $x=-6$ و $x=3$

4 $f(x)=\begin{cases}-8 & x\le -5\\ 0 & -5<x<6\\ 5 & x\ge 5\end{cases}$

5 $g(x)=\begin{cases}5x-9 & x<2\\ 4-x^2 & x\ge 2\end{cases}$

پڕوانە نموونە 3

وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشەکە بکێشە.

6 $f(x)=\begin{cases}7 & x<-2\\ -2 & x\ge -2\end{cases}$

7 $g(x)=\begin{cases}-2x+8 & x\le 4\\ \frac{1}{2}x & x>4\end{cases}$

پڕوانە نموونە 4

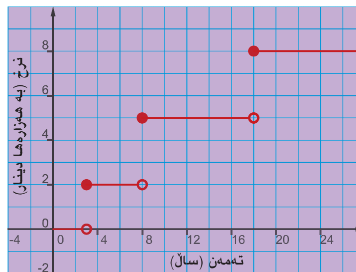
8 تێچوونی بەکرێ گرتنی کەشتییەکی بچوك 20 000 دینارە لە کاتژمێرێکدا بۆ 4 کاتژمێری یەکەم، و 3 000 دینارە بۆهەر کاتژمێرێکی زیادە، وێنەی ڕوونکردنەوەیی بکێشە، تێچوونی بەکرێگرتنی کەشتییەکە بۆ ژمارەی کاتژمێرەکان بنوێنێت، کە لە 8 کاتژمێر زیاتر نەبێت.

ڕاهێنان وشکیارکردنی پرسیارەکان

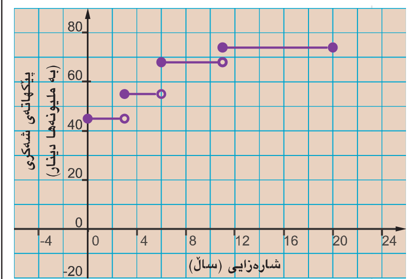
ڕاهێنانی ئازاد	
بۆشیکارکردنی پرسیارەکان	تەماشای نموونە
10-9	1
12-11	2
14-13	3
15	4

خشتەیەك دروستبکە بۆهەر وێنەیەکی ڕوونکردنەوە، پاشان بە وشە باسیبکە.

9 نرخەکانی بۆفیەی کراوە



10 موچەی ساڵانە بەپێی ساڵەکانی خزمەت



بەهای نەخشەکە هەژماربکە کاتێك $x=-2$ و $x=2$ و $x=6$.

11
$$f(x)=\begin{cases}9x-2 & x<-3\\ x^2-3 & -3\le x<1\\ 5 & x\ge 1\end{cases}$$

12
$$f(x)=\begin{cases}12-9x & x\le 0\\ x^2+3x & 0<x<3\\ 4^x & x\ge 3\end{cases}$$

وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشەکە بکێشە.

13
$$f(x)=\begin{cases}\frac{3}{4}x+1 & x<4\\ \frac{3}{4}x-2 & x\ge 4\end{cases}$$

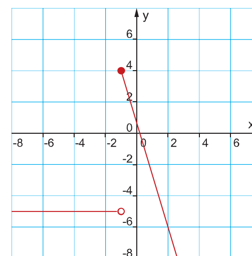
14
$$g(x)=\begin{cases}-2x-5 & x<-2\\ x^2-3 & x\ge -2\end{cases}$$

15 تێچوونی برینەوەی خوری مەڕ دەگۆڕێت، بە گۆڕانی بارستاکەی. ئەم خشتەی بەرامبەر نرخەکانی برینەوەی مەڕێکەکە، هۆشیار وەریدەگرێت. وێنەی ڕوونکردنەوەیی بکێشە، تێچوونی برینەوەی مەڕ بنوێنێت، بارستایی لە60 kg زیاتر نەبێت. نەخشەیەکی بنکە پەلدار بنووسە ئەمە دەرببڕێت.

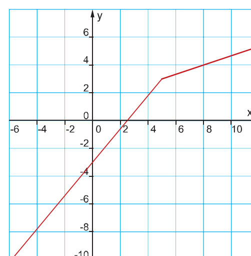
نرخی مەڕ برینەوە	
بارستایی(kg)	نرخ (دینار)
15 یان کەمتر	30 000
نێوان 15 و 50	50 000
50 یان زیاتر	75 000

بۆهەر وێنەیەکی ڕوونکردنەوە نەخشەیەکی ڕێسا پەلدار بنووسە.

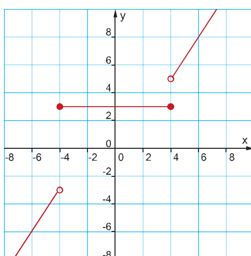
16



17



18



19 **گەراج** گەراجی ئۆتۆمبیل لە پایەتەخت بۆهەر کاتژمێرێکی وەستان 6000 دینار وەردەگرێت، لەماوەی چوار کاتژمێری یەکەمدا، بۆهەر کاتژمێرێکی زیادە 3000 دینار وەردەگرێت. نەخشەی ڕێسا پەلدار بنووسە بۆ هەژمارکردنی تێچوونی وەستانی ئۆتۆمبیل بەپێی ژمارەی کاتژمێرەکان.

20 **گەشت** هەڵۆ و توانا بە ئۆتۆمبیل لە سلێمانییەوە بۆ دهۆك ڕۆیشتن. ئەم وێنەی بەرامبەر ناوەندەی خێرایی ئۆتۆمبیلەكە بەپێی قۆناغەكان دەنوێنێت، بۆ ماوەی 30 خولەك لەناو شاردا بە ناوەندە خێرایی 45 km / h دەڕۆیشت پاشان ماوەی 3 كاتژمێر لە ڕێگای خێرا بە ناوەندەی خێرایی 90 km / h دەڕۆیشت، و 30 خولەك بە ناوەندە خێرایی 60 km / h دەڕۆیشت لە شاخ.



أ نەخشەیەكی ڕێسا پەلدار بنووسە ئەو دووریەی ئۆتۆمبیلەكە بڕیویەتی بەپێی كات بنوێنێت.

ب وێنەی ڕوونكردنەوەیی نەخشەكە بكێشە.

ج **چی دەبێت ئەگەر ... ؟** ماوەی گەشتەكە چەند دەخایەنێت ئەگەر ناوەندە خێرایی ئۆتۆمبیلەكە لە قۆناغی دووەم 75 km / h لە جیاتی 90 km / h بێت.

نەخشەی ڕووت بەشێوەی نەخشەی ڕێسا پەلدار بنووسە.

21 $f(x) = |x|$ **22** $g(x) = |x-4|$ **23** $h(x) = 2|x| - 4$

24 **خزمەتگوزاری** دەزگای هیوا بۆ نێراوە پۆستییەكان بۆ گەیاندنی هەر كیلۆگرامێك 11 000 دینار وەردەگرێت، بۆ ئەو نێراوانەی كێشیان لە2kg تێپەڕ نەكات، و بۆ ئەو نێراوانەی كێشیان لە2kg زیاترە 3000 دینار بۆهەر كیلۆگرامێك بۆنرخەكەی زیاددەكرێت،و وێنەیەكی ڕوونكردنەوەیی بكێشە بۆ تێچوونی گەیاندنی نامەیەك كێشەكەی لە2kg زیاتر نەبێت. نەخشەیەكی ڕێسا پەلدار بنووسە ئەمە دەربڕێت.

وێنەی ڕوونكردنەوەیی نەخشەكە بكێشە.

25 $$h(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 & x \le 0 \\ 2^x - 4 & 0 < x \le 3 \\ 2x - 2 & x > 3 \end{cases}$$

26 $$g(x) = \begin{cases} -3 & x \le 0 \\ 3^x - 4 & x > 0 \end{cases}$$

بوار و مەودای هەر نەخشەیەك بدۆزەوە.

27 $$g(x) = \begin{cases} -\frac{5}{2}x - 2 & x \le -2 \\ -x - 5 & x > -2 \end{cases}$$

28 $$h(x) = \begin{cases} x^2 - 2x - 3 & x < 4 \\ 3x - 7 & x \ge 4 \end{cases}$$

29 **بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە** بۆچی نواندنی نەخشەی ڕێسا پەلدار باشترین نواندنە بۆ بەرزی سەرخەری کارەبایی لە زەوی پاش t چرکە لە بەرزبوونەوەی؟ ئایا دەتوانرێت بکرێت بە نەخشەی پلەدار؟

30 **بنووسە** هۆی چییە وا دەکات بەکارهێنانی نەخشەی ڕێسا پەلدار باشترین نواندنە بۆ بارەکانی ژیانی ڕۆژانە؟ دوو نموونە بەلایەنی کەمەوە لەناو وەڵامەکەت بهێنەوە.

ئامادەکردن بۆ تاقیکردنەوە

31 یەکێك لە بریکارەکانی بەکرێدانی ئۆتۆمبیل لە ڕۆژێکدا 15 000 دینار وەردەگرێت، ئەگەر ژمارەی ئەو کیلۆمەترانەی ئۆتۆمبیلەکە دەیبڕێت لە 200 km تێپەڕنەکات. ئەگەر ئۆتۆمبیلەکە لە 200 km زیاتری بڕی لەسەر کرێگرتە پێویستە 50 دینار بۆهەر کیلۆمەترێکی زیاد بدات، کام لەم نەخشانەی خوارەوە تێچوونی بەکرێگرتنی ئۆتۆمبیلەکە بەپێی ژمارەی کیلۆمەترە بڕاوەکان لە ڕۆژێکدا دەنوێنێت؟

أ) $f(x)=\begin{cases}15\ 000 & 0\le x\le 200\\ 50x & x>200\end{cases}$

ج) $f(x)=\begin{cases}15\ 000 & 0\le x\le 200\\ 15\ 000+50(x-200) & x>200\end{cases}$

ب) $f(x)=\begin{cases}15\ 000x & 0\le x\le 200\\ 15\ 000x & x>200\end{cases}$

د) $f(x)=\begin{cases}15\ 000 & 0\le x\le 200\\ 15\ 000+50x & x>200\end{cases}$

32 کام لەم نەخشانەی خوارەوە نەخشەی بەردەوامە؟

أ) $f(x)=\begin{cases}3x-4 & x<0\\ -1 & x\ge 0\end{cases}$

ج) $h(x)=\begin{cases}x^2 & x<-2\\ 2x & x\ge -2\end{cases}$

ب) $g(x)=\begin{cases}5x-4 & x<3\\ 2x+5 & x\ge 3\end{cases}$

د) $(x)=\begin{cases}3x+4 & x\le -1\\ 3^x+4 & x>-1\end{cases}$

33 $f(-2)$ بدۆزەوە کاتێك $f(x)=\begin{cases}1-5x & x<-5\\ 3-x^3 & -5\le x<-2\\ 5-x^2 & x\ge -2\end{cases}$

أ) 5−　　ب) 1　　ج) 9　　د) 11

بەرەنگاری و فراوانکردن

نەخشەی گەورەترین تەواو بریتییە لە نەخشەی $f(x) = [x]$ کاتێك $[x]$ هێمای گەورەترین ژمارەی تەواو لە x زیاترنەبێت. بژمێری ڕوونکردنەوەیی هێمای **Int(x)** بۆ نواندنی ئەم نەخشە بەکاردەهێنێت. ئەگەر نرخی قووتویەك شەربەت 750 دینار بێت. ئەوا نەخشەی $f(x)=\text{Int}\left\lfloor\dfrac{x}{750}\right\rfloor$ ژمارەی قووتوە شەربەتەکانت دەداتێ کە دەتوانیت بە x دینار بیکڕیت.

34 نەخشەیەك بنووسە بۆ هەژمارکردنی ژمارەی قووتوی پەتاتەی سوورکراوە کە دەتوانیت بیکڕیت بە x دینار. ئەگەر بزانیت نرخی قوتویەك 650 دینارە، ئەم خشتە بەکاربهێنە بۆ دیاریکردنی ژمارەی قووتوە پەتاتە سوورکراوەکان کە دەتوانیت بە دەهەزار دینار بیکڕیت.

تێبینی: نەخشەی بچووکترین تەواو بریتییە لە $f(x) = [x]$ کاتێك $[x]$ هێمای کەمترین ژمارەی تەواوە لە x کەمتر نەبێت وەك $f(2.9) = f\,[2.9] = 3$

35 گەراجی ئۆتۆمبیل 4000 دینار وەردەگرێت بەرامبەر وەستانی ئۆتۆمبیلێك ماوەکەی لە یەك کاتژمێر تێپەڕنەکات. ئەگەر ماوەی وەستان لە کاتژمێرێك زیاتر بوو، گەراجە 1500 دینار وەردەگرێت بۆهەر کاتژمێرێکی زیادە، یان کەرتێك لە کاتژمێرێکی زیادە. نەخشەیەك بنووسە تێچوونی وەستانی ئۆتۆمبیل بەپێی کات t کاتژمێر بنوێنێت. ئەم نەخشە بەکاربهێنە بۆ هەژمارکردنی تێچوونی وەستانی ئۆتۆمبیلێك بۆماوەی 5 کاتژمێر و 23 خولەك.

پێداچوونەوەی لوولپێچی

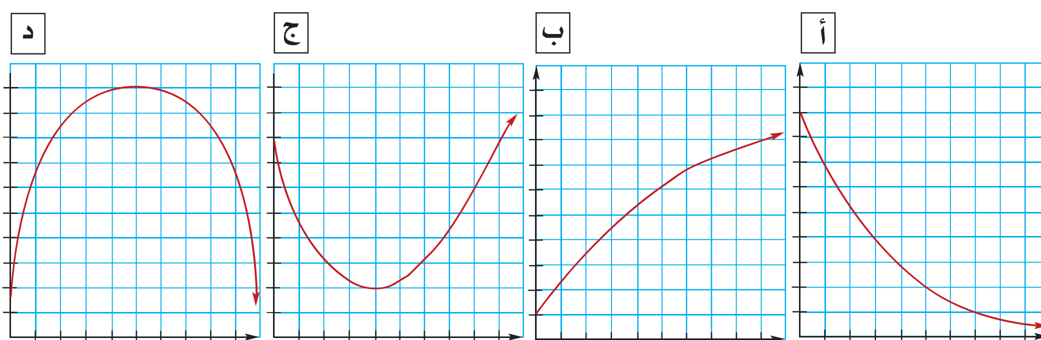
36 **ئەندازە** پەیوەندییەکی هێڵی هەیە لایەکانی چەندلا ڕێکە و کۆی پێوانەکانی گۆشەکانی ناوەوەی بەیەکەوە دەبەستێت، وەك لەم خشتەی خوارەوە دەردەکەوێت. نەخشەیەك بۆ دەربڕینی ئەم پەیوەندییە بنووسە. (وانەی 1 − 2)

ژمارەی لایەکان	3	4	5	6	8
سەرجەمی پێوانەی گۆشەکانی ناوەوە بەپلە	180	360	540	720	1080

دەرکەنارەکانی هەر نەخشەیەك و بوار و مەودای دیاریبکە (پۆلەکانی پێشوو)

37 $f(x) = \frac{4}{x-1} - 3$ **38** $f(x) = \frac{3}{x+2} + 1$ **39** $f(x) = \frac{5}{x-3} + 1$

هەریەکە لەم وێنە ڕوونکردنەوەییانە، بارێك لەپرسیارەکانی خوارەوە (40 − 43) دەنوێنێت دیاربکە. (وانەی 5 − 1)



40 کۆمپانیایەك یەکێك لە بەرهەمەکانی لەبازاڕ خستەڕوو، بەبێ ئەوەی پروپاگەندەی بۆ بکات، قازانجی دابەزی! پاشان پروپاگەندەی بۆکرد قازانجی بەرزبووە.

41 دابەزینی نرخی بژمێر بەپێی کات.

42 دابەزینی قازانجی دوکانی ئایس کرێم لە زستان، بەڵام بەهار و پایز بەرزدەبێتەوە لەهاویندا زۆر بەرز دەبێتەوە.

43 پلەی گەرمی بەرزدەبێتەوە. لەنێوان کاتژمێر12:00 پاش نیوەڕۆ تا 5:00پاش نیوەڕۆ.



دۆزینەوەی جیاوازییەکان و ڕێژەکان

بیرت بێت، هەردەم جێگیربوونی جیاوازییەکان یان ڕێژەکان یارمەتیت دەدەن بۆ دیاریکردنی جۆری ئەو نەخشەیەی بەکاریدەهێنیت بۆ نواندنی کۆمەڵە پێدراوەکان. دەتوانیت بەرنامەی EXCEL ی بژمێر بۆ هەژمارکردنی جیاوازییەکان و ڕێژەکان بەخێرایی بەکاربهێنیت.

پێدراوەکانی خشتەی بەرامبەر بەکاربهێنە. بەرنامەی **EXCEL** بەکاربهێنە بۆ هەژمارکردنی جیاوازییەکانی یەکەم و جیاوازییەکانی دووەم و ڕێژەکان، نەگۆڕەکە دیاریبکە ئەگەر هەبوو.

x	5	6	7	8	9	10	11
y	1	3.4	6.6	10.6	15.4	21	27.4

سەرەتا سەردێری ڕیزەکان بخەرە ناوبژمێرەکە، وەك دیارە بیرت نەچێت، جیاوازی نێوان بەهایەکانی x پێویستە یەکسان بن.

1 هەژماری جیاوازییەکان بکە یاسای $=C2-B2$ لە خانەی C3 تۆماربکە بۆ هەژمارکردنی جیاوازی نێوان دوو بەهای یەکەم لە بەهایەکانی y ئەوەی لە C3 دایە لەبەرگرەوە بۆ خانەکان لە D3 هەتا H3 .

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	x	5	6	7	8	9	10	11
2	y	1	3.4	6.6	10.6	15.4	21	27.4
3	جیاوازییەکانی یەکەم		2.4	3.2	4	4.8	5.6	6.4
4	جیاوازییەکانی دووەم							
5	ڕێژەکان							

2 جیاوازییەکانی دووەم هەژماربکە یاسای $=D3-C3$ لە خانەی D4 تۆماربکە بۆ هەژمارکردنی جیاوازییەکانی دووەم ئەوەی لە D4 دایە لەبەرگرەوە بۆ خانەکان لە E4 تا H4 .

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	x	5	6	7	8	9	10	11
2	y	1	3.4	6.6	10.6	15.4	21	27.4
3	جیاوازییەکانی یەکەم		2.4	3.2	4	4.8	5.6	6.4
4	جیاوازییەکانی دووەم			0.8	0.8	0.8	0.8	0.8
5	ڕێژەکان							

3 ڕێژەکان هەژماربکە یاسای $=C2/B2$ لە خانەی C5 بۆ هەژمارکردنی ڕێژەی دوو بەهای یەکەمین لە بەهایەکانی y ئەوەی لە خانەی C5 لەبەربگرەوە بۆ خانەکانی D5 تا H5.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	x	5	6	7	8	9	10	11
2	y	1	3.4	6.6	10.6	15.4	21	27.4
3	جیاوازییەکانی یەکەم		2.4	3.2	4	4.8	5.6	6.4
4	جیاوازییەکانی دووەم			0.8	0.8	0.8	0.8	0.8
5	ڕێژەکان		3.40	1.94	1.61	1.45	1.36	1.30

لەمەی پێشوو دەردەکەوێت جیاوازییەکانی دووەم نەگۆڕە

هەوڵبدە

بۆ هەریەکە لەم کۆمەڵە پێدراوانە بەرنامەی EXCEL بەکاربهێنە بۆ هەژمارکردنی جیاوازییەکانی یەکەم و جیاوازییەکانی دووەم و ڕێژەکان. ئەگەر نەگۆڕی تێدابوو دیاریبکە.

1

x	2	4	6	8	10
y	–20	124	364	700	1132

2

x	4	7	10	13	16	19
y	1.31	2.48	3.65	4.82	5.99	7.16

3

x	3	4	5	6	7
y	8.96	35.84	143.36	573.44	2293.8

4

x	1.5	3	4.5	6	7.5
y	–9	15	57	117	195

5 **بیری ڕەخنەگر** کام جۆر لە نەخشەکان گونجاوترە بۆ نواندنی پێدراوەکانی ڕاهێنانی 4؟ بەڵگە بۆ وەڵامەکەت بهێنەوە.

2–5

جێگۆڕکێی نەخشەکان

Transforming Functions



ئەگەر لە دانەوەی قەرزەکەت دوا بکەویت ئەوا لەبەردەم هاوکاران بڵاوی دەکەینەوە

داوای لێبوردن دەکەم لە دواکەوتنم لە دانەوەی بەشە قەرزەکانم چاوەڕوانی جێگۆڕکێم.

ئامانجەکان

- نەخشەکان جێگۆڕکێی پێدەکات.
- جێگۆڕکێی نەخشە دەناسێت.

بۆچی ئەمە فێردەبین؟

دەتوانیت جێگۆڕکێی نەخشەکان بەکاربهێنیت بۆ باسکردنی ئەو گۆڕانکارییانەی لە باجی تۆمار کردنی ناو لە زانکۆدا ڕوودەدات (نموونە 4)

لە وانەکان و پۆلەکانی پێشوودا فێربوویت چۆن نەخشە جیاوازەکان جێگۆڕکێ پێبکەیت، دەتوانیت نەخشەی ڕێسا پەلدار جێگۆڕکێ پێبکەیت بە جێگۆڕکێ کردنی هەر لقێك لە لقەکانی. ئەم خشتەی خوارەوە ڕێساکانی جێگۆڕکێی نەخشەکان کورت دەکاتەوە.

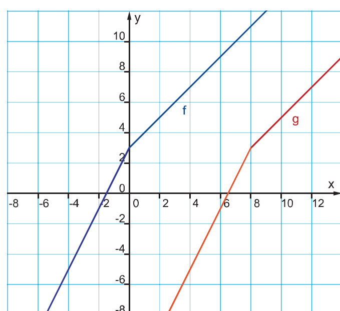


جێگۆڕکێی نەخشەی $f(x)$	
ڕاکێشانی ئاسۆیی	ڕاکێشانی ستوونی
$f(x) \to f(x-h)$ بۆلای ڕاست ڕادەکێشرێت ئەگەر $h>0$ بۆلای چەپ ڕادەکێشرێت ئەگەر $h<0$	$f(x) \to f(x)+k$ بۆلای سەرەوە ڕادەکێشرێت ئەگەر $k>0$ بۆلای خوارەوە ڕادەکێشرێت ئەگەر $k<0$
وێنەدانەوە بەدەوری تەوەری دووەم y - axis	وێنەدانەوە بەدەوری تەوەری یەکەم x - axis
$f(x) \to f(-x)$	$f(x) = -f(x)$
فراوانبوون یان چوونەوەیەکی ئاسۆیی	فراوانبوون یان چوونەوەیەکی ستوونی
$f(x) \to f\left(\frac{1}{b}x\right)$ فراوانبوونە ئەگەر $b>1$، چوونەوەیەکە ئەگەر $0<b<1$	$f(x) \to af(x)$ فراوانبوونە ئەگەر $a>1$، چوونەوەیەکە ئەگەر $0<a<1$

نموونە 1 جێگۆڕکێی نەخشە ڕێسا پەلدارەکان

نەخشەی $g(x)$ پەیدابوو لە جێگۆڕکێی نەخشەی $f(x)=\begin{cases} x+3 & x>0 \\ 2x+3 & x\le 0 \end{cases}$ بنووسە بە ڕاکێشانی 4 یەکە بۆلای ڕاست.

پێویستە هەرلقێك لە لقەکانی نەخشەکە 4 یەکە بۆلای ڕاست ڕابکێشرێت. $x-4$ لە جیاتی x لە ڕێسای نەخشەی $f(x)$دابنێ، پاشان ڕێساکە بە سادەترین شێوە بنووسە.



$$g(x)=f(x-4)=\begin{cases} (x-4)+3 & x-4>0 \\ 2(x-4)+3 & x-4\le 0 \end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases} x-1 & x>4 \\ 2x-5 & x\le 4 \end{cases}$$

ساغبکەوە وێنەی ڕوونکردنەوەی هەردوو نەخشەکە لە ڕووتەختی پۆوتان بکێشە بۆ پاڵپشتی وەڵامەکەت

ئاگاداربە!

ڕاکێشانی ئاسۆیی، ڕێسایەکانی نەخشەی بنکە پەلدار ماوەکانی بوارەکەی دەگۆڕێت بەڵام ڕاکێشانی ستوونی تەنها ڕێساکانی نەخشەکە دەگۆڕێت.



1. نەخشەی $g(x)$ ی پەیدابوو بە جێگۆڕکێی نەخشەی $f(x)=\begin{cases} x^2 & x\le 0 \\ x-3 & x>0 \end{cases}$ بنووسە بە کشانی (مطّ) ئاسۆیی هاوکۆلکەی 2 بێت.

لەکاتی جێگۆڕکێی نەخشە لەوانەیە یەکتربڕینەکانی لەگەڵ تەوەرەی پۆوتانەکان بگۆڕیت و لەوانەشە نەگۆڕێت. کاتێك جێگۆڕکێیەکە پێناسە دەکرێت، دەتوانیت یەکتربڕینەکانی نەخشە – وێنە دیاریبکەیت.

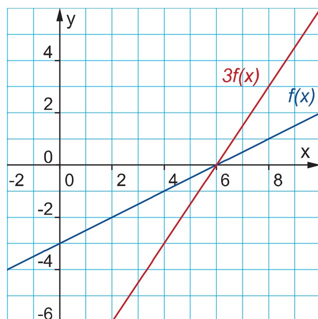


کاریگەرییەکانی جێگۆڕکێی لەسەر یەکتربڕینەکانی ئاسۆیی و ستوونی نەخشەی $f(x)$	
کشانی یان چوونەوەیەکی ئاسۆیی هاوکۆلکەی a بێت	کشانی یان چوونەوەیەکی ستوونی هاوکۆلکەی b بێت
یەکتربڕینەکانی ئاسۆیی لە b دەدرێت یەکتربڕینەکانی ستوونی ناگۆڕێت	یەکتربڕینەکانی ئاسۆیی ناگۆڕێت یەکتربڕینەکانی ستوونی لە a دەدرێت
وێنەدانەوە بە دەوری تەوەرەی یەکەم	وێنەدانەوە بە دەوری تەوەرەی دووەم
یەکتربڕینەکانی ئاسویی ناگۆڕێت یەکتربڕینەکانی ستوونی دەگۆڕێت بە دژەکەی	یەکتربڕینەکانی ئاسۆیی دەگۆڕێت بە دژەکەی یەکتربڕینەکانی ستوونی ناگۆڕێت

نموونـــــە 2 دیاریکردنی یەکتربڕینەکان

یەکتربڕینەکانی نەخشەی $f(x)$ دیاریبکە، پاشان یەکتربڕینەکانی نەخشەی $g(x)$ دیاریبکە، بەبێ وێنەکێشانی ڕوونکردنەوەیی.

أ $f(x)=\frac{1}{2}x-3$ ؛ $g(x)=3f(x)$.



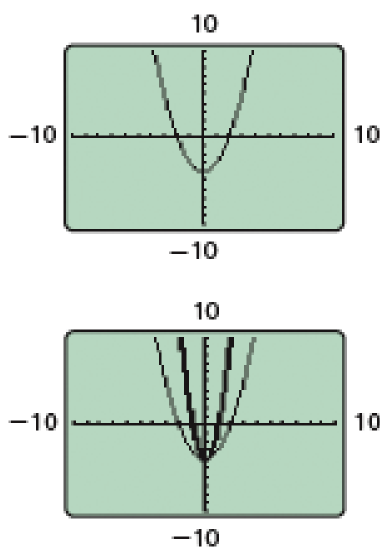
یەکتربڕینەکانی نەخشە بنەڕەتییەکە دیاریبکە.

$$0=\frac{1}{2}x-3 \qquad f(0)=\frac{1}{2}(0)-3=-3$$

$$x=6 \qquad f(0)=-3$$

یەکتربڕینی ستوونی 3- و یەکتربڕینی ئاسۆیی 6 لەبەرئەوەی $g(x)$ کشانی ستوونییە بۆ نەخشەی $f(x)$ بە هاوکۆلکەی 3 کەواتە یەکتربڕینی ئاسۆیی ناگۆڕێت، بەڵام یەکتربڕینی ستوونی لە هاوکۆلکەی کشان دەدرێت کە (3)یە. یەکتربڕینی ستوونی بۆ نەخشەی $g(x)$ بریتییەلە 9-=(3-)3

ب $f(x)=x^2-4$ ؛ $g(x)=f(2x)$.



بە بژمێری ڕوونکردنەوەیی دەردەکەوێت کە یەکتربڕینی ستوونی بۆ نەخشەکە بریتییە لە 4- و دوو یەکتربڕینی ئاسۆیی هەیە بریتین لە 2- و 2 لە نەخشەی $f(x)$ دا سەرنج بدە نەخشەی $g(x)$ بریتییە لە ئەنجامی چوونەوەیەکی ئاسۆیی نەخشەی $f(x)$ هاوکۆلکەی $\frac{1}{2}$ بێت. لەمەوە دەردەچێت یەکتربڕینی ستوونی ناگۆڕێت و هەر یەکتربڕینێکی ئاسۆیی لە $\frac{1}{2}$ دەدرێت. یەکتر بڕینەکانی ئاسۆیی بۆنەخشەی $g(x)$ بریتین لە 1- و 1.

ساغبکەوە لەسەر هەمان شاشە وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشەی $g(x)$ بکێشە بۆ پاڵپشتی وەڵامەکەت.



2. یەکتربڕینەکانی نەخشەی $f(x)$ دیاریبکە، پاشان یەکتربڕینەکانی نەخشەی $g(x)$ بەبێ وێنەکێشانی ڕوونکردنەوەکەی دیاریبکە.

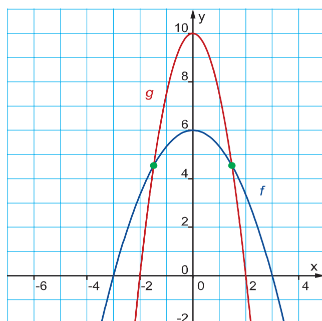
أ $f(x)=\frac{2}{3}x+4$ $\quad g(x)=-f(x)$ **ب** $f(x)=x^2-9$ $\quad g(x)=\frac{1}{3}f(x)$

نموونــــه 3 ئاوێتەکردنی جێگۆڕکێیەکان

وێنەی ڕوونکردنەوەی نەخشەی $g(x)=f\left(\frac{\sqrt{15}}{2}x\right)+4$ کاتێک $f(x)=-\frac{2}{3}x^2+6$

هەنگاوی 1 وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشەی $f(x)$ بکێشە ڕوونکردنەوەی $f(x)$ تەوەرەی دووەم لە $(0,6)$ و تەوەرەی یەکەم لە $(-3,0)$ و $(3,0)$ دەبڕێت

هەنگاوی 2 هەر جێگۆڕکێیەك بەجیا تاقیبکەوە.
جێگۆڕکێی یەکەم بریتییە لە چوونەوەیەکی ئاسۆیی هاوکۆلکەی $\frac{2}{3}$ یە. پاش ئەم جێگۆڕکێیەکە یەکتربڕینی ستوونی ناگۆڕێت، وەك خۆی 6 دەمێنێت بەڵام یەکتربڕینەکانی ئاسۆیی دەبێتە 2- و 2 . جێگۆڕکێی دووەم بریتییە لە ڕاکێشانی 4 یەکە بۆ سەرەوە، خشتەکە بۆ ڕوونکردنەوەی ڕاکێشانی هەرسێ خاڵەکە بەکاربهێنە.



خاڵەکانی یەکتربڕین	$(-2,0)$	$(2,0)$	$(0,6)$
وێنەی ڕاکێشانەکەی	$(-2,4)$	$(2,4)$	$(0,10)$

ساغبکەوە وێنەی ڕوونکردنەوەیی دوو نەخشەی $f(x)$ و $g(x)$ لە هەمان ڕووتەختی پۆوتان بکێشە.



3. وێنەی ڕونکردنەوەیی نەخشەی $g(x)=-\frac{1}{2}f(x)$ کاتێك $f(x)=2^x-4$ بێت.

نموونـــــه 4 جێبەجێکردن لەسەر شیکارکردنی پرسیارەکان



سەرۆکایەتی یەکێك لە زانکۆکان نەخشەی بنکە پەلدار بەکاردەهێنێت بۆ دیاریکردنی باجی تۆمارکردنی خوێندکاران بەپێی ژمارەی کاتژمێرە وانەکان تیایدا تۆمارەدەکەن.

ئەم نەخشەیە بریتییە لە

$$f(x)=\begin{cases}110\ 000x & 0<x<12\\ 1\ 320\ 000 & 12\le x\le 18\\ 150\ 000(x-18)+1\ 320\ 000 & x>18\end{cases}$$

سەرۆکایەتی زانکۆ بڕیاریدا بۆ وەرزی پایز باج بە ڕێژەی 10% زیادبکرێت، هەروەها بڕیاریدا 750 000 دینار باج بخرێتە سەر هەر کەسێك ناوی تۆمار دەکرێت. نەخشەیەك بنووسە ڕێگە بە هەژمارکردنی باجی تۆمارکردن لە وەرزی پایز بە پێی x دەدات.

1 پرسیارەکە تێبگە

نەخشەی نوێ بە جێگۆڕکێی نەخشەی سەرەکی بە دوو جێگۆڕکێ دیاریدەکرێت زیادکردنی باجی تۆمارکردنی 10%پاشان خستنەسەری باجی کارە کارگێڕییەکان بڕەکەی 75 000 دینارە. دەتوانین باجی 10%بگۆڕین بۆ لێکدانی هەر لقێك لە لقەکانی نەخشە لە110%یان 1.1 ئەوە دەگەینێت نەخشە بخرێتە ژێر کشانی ستوونی هاوکۆلکەکەی1.1 بێت، بەڵام زیادکردنی باجی کارگێڕییەکان، واتە گۆڕینی نەخشەکە بە ڕاکێشانی بۆ سەرەوە بە بڕی 75 000 یەکە.

2 پلان دابنێ

جێگۆڕکێی یەکەم جێبەجێبکە، پاشان جێگۆڕکێی دووەم و نەخشەی پەیدابوو بنووسە.

3 شیکاربکە

دەستبکە بە دۆزینەوەی نموونەی باجەکان پاش زیادکردنی 10% .

$$g(x)=(1.1)f(x)=\begin{cases}(1.1)110\ 000x & 0<x<12\\ (1.1)1\ 320\ 000 & 12\le x\le 18\\ (1.1)[150\ 000(x-18)+1\ 320\ 000] & x>18\end{cases}$$

هەر لقێك لە 1.1 بدە

$$=\begin{cases}121\ 000x & 0<x<12\\ 1\ 452\ 000 & 12\le x\le 18\\ 165\ 000(x-18)+1\ 452\ 000 & x>18\end{cases}$$

ئێستا نموونەی باجەکان پاش زیادکردنی باجی کارگێڕییەکان بڕەکەی 75 000 دینارە بدۆزەوە.

$$h(x)=g(x)+75\ 000=\begin{cases}121\ 000x+75\ 000 & 0<x<12\\ 1\ 452\ 000+75\ 000 & 12\le x\le 18\\ 165\ 000(x-18)+1\ 452\ 000+75\ 000 & x>18\end{cases}$$

$$=\begin{cases}121\ 000x+75\ 000 & 0<x<12\\ 1\ 527\ 000 & 12\le x\le 18\\ 165\ 000(x-18)+1\ 527\ 000 & x>18\end{cases}$$

4 ساغبکەوە

وەڵامەکەت بە بەکارهێنانی هەندێك لە بەهایەکانی ساغبکەوە. ئەگەر باجی سەرەکی بۆ 20 کاتژمێر 1 620 000 دینار بێت، بە زیادبوونی ئەو باجە بە 10% و خستنەسەری 75 000 دینار، ئەم باجە دەبێتە 1 857 000 دینار. بەهای نەخشە نوێیەکە بدۆزەوە کاتێك $x=20$.

$$h(20)=165\ 000(20-18)+1\ 527\ 000=330\ 000+1\ 527\ 000=1\ 857\ 000\ ✓$$



4. مۆزەخانەی زانستەکان 5 000 دینار باجی چوونەژوورەوە وەردەگرێت، بۆهەر منداڵێك تەمەنی لە 12 ساڵ کەمتربێت، 7500 دینار وەردەگرێت بۆهەر کەسێك تەمەنی لە 12 ساڵ کەمتر نەبێت (12 ساڵی بەرەو سەرەوە) کارگێری مۆزەخانەکە بڕیاریدا نرخەکانی چونەژوورەوە 20% بەرزبکاتەوە، هەر بلیتێك 500 دینار بخاتە سەری. بۆ ئاسانکاری کرین بەهۆی ئامێرەوە. نەخشەیەك بنووسە. نرخی نوێی چوونەژوورەوە بەپێی تەمەنی کرپار بێت.

بیربکەوە و تاوتوێبکە

1. کام لەم جێگۆڕکێیانە یەکتربڕینەکانی ستوونی ناگۆڕێت؟
2. ڕوونی بکەوە بۆچی خاڵی $(0 ، 0)$ ناگۆڕێت لەژێر کاریگەری هەرکشانێك وەهەر چوونەوەیەکێك.
3. ڕیکخەربە ئەم خشتەی خوارەوە دروستبکە و پاشان تەواوبکە. باسی کاریگەری هەر جێگۆڕکێیەك لەسەر یەکتربڕینەکان بکە.



جێگۆڕکێ	یەکتربڕینی ئاسۆیی	یەکتربڕینی ستوونی
کشان یان چوونەیەکی ئاسۆیی بە هاوکۆلکەی b		
کشان یان چوونەیەکی ستوونی بە هاوکۆلکەی		
وێنەدانەوە بەدەوری تەوەری x		
وێنەدانەوە بەدەوری تەوەری y		

5–2 ڕاهێنانەکان

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

پروانە نموونە 1

ڕێسای نەخشەی $g(x)$ ی پەیدابوو لە ئەنجامی جێگۆڕکێی نەخشەی $f(x)=\begin{cases} x-3 & x\le 0 \\ 4x & x>0\end{cases}$ بنووسە.

1. ڕاکێشانی 6 یەکە بۆلای چەپ
2. چوونەوەیەکی ئاسۆیی هاوکۆلکەکەی $\frac{1}{4}$ بێت.

پروانە نموونە 2

یەکتربڕینەکانی نەخشەی $f(x)$ پاشان نەخشەی $g(x)$ دیاربکە بەبێ وێنەکێشانی ڕوونکردنەوەیی

3. $f(x)=4x+12$ ؛ $g(x)=\frac{1}{6}f(x)$
4. $f(x)=-x^2+16$ ؛ $g(x)=f(4x)$

پروانە نموونە 3

وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشەی $f(x)$ بکێشە پاشان جێگۆڕکێ بەکاربێنە بۆ وێنەکێشانی ڕوونکردنەوەیی نەخشەی $g(x)$

5. $f(x)=-x^2+1$ ؛ $g(x)=f(2x)-1$
6. $f(x)=|x-1|-2$ ؛ $g(x)=-2f(x)$

پروانە نموونە 4

7. **باجەکان** یەکێك لە حکومەتەکان پشت دەبەستێت بە نەخشەی $T(x)=\begin{cases} 0.02x & 0<x\le 10\ 000\ 000 \\ 0.05x & x>10\ 000\ 000\end{cases}$ بۆدیاریکردنی باجی دەرامەت بەپێی داهاتی تاك x. حکومەت بڕیاری زیادکردنی باجێکی 20% دا و باجێکی بڕاوەی 100 000 دینار سەپاند، بۆهەر کەسێك باجی لەسەرە بیدات، نەخشەیەکی نوێ بۆ دیاریکردنی نرخی باج بەپێی داهات بنووسە.

جێبەجێکردنەکان

بۆشیکارکردنی پرسیارەکان	تەماشای نموونە
10-8	1
16-11	2
18-17	3
19	4

راهێنانی ئازاد

ڕیسای نەخشەی $g(x)$ پەیدابوو لەئەنجامی جێگۆڕکێی نەخشەی $f(x)=\begin{cases}x^2 & x<1\\ 4x & x\geq 1\end{cases}$ بنووسە بەپێی ئەمانە:

8 چوونەوەیەکی ستوونی هاوکۆلکەی $\frac{1}{4}$ **9** کشانی ئاسۆیی هاوکۆلکەی 2

10 ڕاکێشانی 3 یەکە بۆ خوارەوە

یەکتربڕینەکانی نەخشەی $f(x)$ پاشان نەخشەی $g(x)$ دیاربکە بەبێ وێنەکێشانی ڕوونکردنەوەکەی

11 $f(x)=-\frac{3}{2}x+9$ ؛ $g(x)=\frac{2}{3}f(x)$ **12** $f(x)=x^2-25$ ؛ $g(x)=f\left(\frac{5}{3}x\right)$

13 $f(x)=-\frac{2}{5}x+2$ ؛ $g(x)=f(2x)$ **14** $f(x)=x^2-3x-4$ ؛ $g(x)=-f\left(\frac{1}{3}x\right)$

15 $f(x)=3^x-1$ ؛ $g(x)=2f(x)-4$ **16** $f(x)=x^3+8$ ؛ $g(x)=f\left(-\frac{1}{2}x\right)$

وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشەی $f(x)$ بکێشە، پاشان جێگۆڕکێ بەکاربێنە بۆ دیارکردنی وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشەی $g(x)$

17 $f(x)=\frac{1}{2}x+4$ ؛ $g(x)=3f(-x)$ **18** $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x-2$ ؛ $g(x)=-f(2x)$

19 **کار** بۆهەژمارکردنی تێچوونی پێداویستییەکانی ئاهەنگی قوتابخانەکان، یەکێك لە کۆمپانیاکان پشت دەبەستێت بەم نەخشەیە. $c(n)=\begin{cases}18\ 000n & n\leq 50\\ 400\ 000+10\ 000n & n>50\end{cases}$ کاتێك n ژمارەی کەسان بێت.

أ بەڕێوەبەری کۆمپانیاکە بڕیاریدا لە وەرزی زستان نرخەکان 10%دابەزێنێت. نەخشەی نوێ بۆ هەژمارکردنی تێچوونەکان بنووسە.

ب بەڕێوەبەری کۆمپانیاکە بڕیارێکی تریدا، بۆهەر کەسێك بڕی 2000 دینار دابەشکێنێت، نەخشەی نوێ بۆ هەژمارکردنی تێچوونەکان بنووسە.

پۆلیس لەهەندێك لە شارەکان کامێرای وێنەگرتن دادەنێن، بۆدیاریکردنی ئەو ئۆتۆمبیلانەی سەرپێچی دەکەن و سزایان دەدات.

20 **ئارامی هاتوچۆ** شارەوانی پایتەخت ئەو ئۆتۆمبیلانەی ڕادەی خێرایی دیاریکراو تێدەپەڕینن سزادەدات، بەپێی ئەم خشتەی بەرامبەر

سزادانی تێپەڕاندنی خێرایی دیارکراو	
زیادە ڕۆیی (km / h)	سزادان (دینار)
10–1	30 000
15–11	50 000
20–16	100 000
25–21	150 000
26→	200 000

أ نەخشەیەك بۆ هەژمارکردنی نرخی سزادان بەپێی ماوەی تێپەڕاندن بنووسە

ب شارەوانی سزایەکی تر بڕەکەی 50 000 دینار دەسەپێنێت، ئەگەر هاتوو ڕادەی خێرایی لەو شوێنانەی قوتابخانەی تێدایە تێدەپەڕێنێت. نەخشەیەك بنوسە کە نرخی سزادان لەو شوێنانەی قوتابخانەی تێدایە دیاریبکات.

ج **چی دەبێت ئەگەر ...؟** شارەوانی بڕیاریدا سزادان لەسەر ڕادەی خێرایی بە 15% زیادبکات نەخشەی نوێ بۆ دیارکردنی سزادان بنووسە.

21 **بیری ڕەخنەگر** وادابنێ ڕوونکردنەوەی نەخشەی $f(x)$ تەوەری x، n جار دەبڕێت.

أ چەندجار ڕوونکردنەوەی نەخشەی $bf(ax)$ تەوەری x دەبڕێت؟ ئەمە ڕوونبکەوە.

ب ڕوونیبکەوە بۆچی ناتوانیت ژمارەی ئەو خاڵانە دیاربکەیت کە ڕوونکردنەوەی نەخشەکە $f(x-h)+k$ تەوەرەی x دەبڕێت.

22 **پارە** یەکێك لە بانکەکان ڕێگە بە هەڵگرانی ئەو کارتە بانکییەی دەریکردووە دەدات قەرز لە ئامێری ڕاکێشانی بانك گوژمەی 6000 دینار وەردەگرێت، ئەگەر نرخی گوژمەی ڕاکێشراو 200 000 تێپەڕنەکات،و 3% نرخی گوژمەی ڕاکێشراو کاتێك لە 200 000 دینار زیاتربوو.

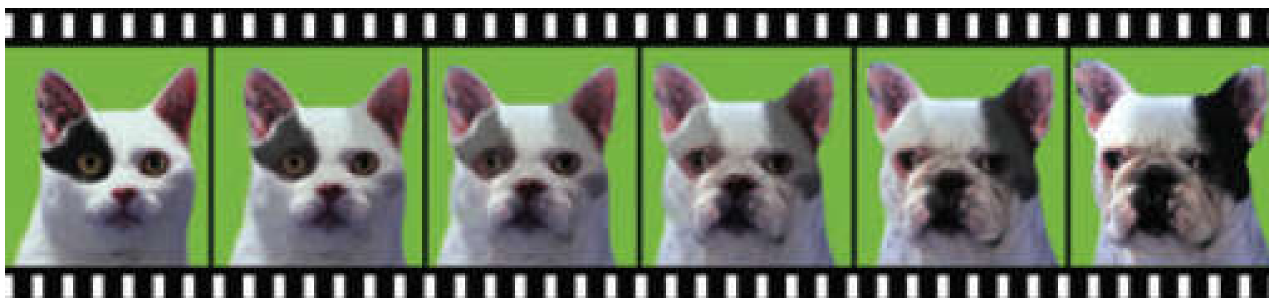
أ نەخشەیەك بنووسە، ئەو بڕە پارەی بانکەکە بەپێی گوژمەی ڕاکێشراو وەریدەگرێت بنوێنێت.

ب وادابنێ بانکەکە بڕیاریدا ئەوەی وەریدەگرێت 15% زیادبکات. نەخشەیەك بۆ ئەمە بنووسە.

23 خوێندکارەکان لە ئاهەنگی لەدایکبوونی یەکێك لە هاورێکەیان بە ڕیزێکی درێژ وەستابوون، خوێندکاری خانەخوێ ڕستەیەکی بەگوێی خوێندکاری یەکەم چپاند، و داوایلێکرد بە چپە بۆ خوێندکاری پاش خۆی بیگوازێتەوە، ئەویش ڕستەکەی بە گوێی پاش خۆیدا چپاند و داوایلێکرد بۆ خوێندکاری پاش خۆی بگوازێتەوە و بەم شێوەیە ... هەتا ڕستەکە گەیشتە خوێندکاری کۆتایی، بەدەنگی بیستراو بەرامبەر هەموو هاورێکانی ڕستەکەی گوتەوە. نەخشەی $T(n)=\begin{cases}3.5n & n\le 8\\ 5.4n-8 & n>8\end{cases}$ ڕێسایەکە بۆ هەژمارکردنی کاتی خەیانراو بە چرکە بۆ گواستنەوەی ڕستەکە لە یەکەم خوێندکار تا دوا خوێندکار لە ڕیزەکەدا (n ژمارەی خوێندکارەکانە لە ڕیزەکەدا).

أ) یارییەکە جارێکی تر دووبارەکرایەوە خوێندکارەکان لە یاریکردندا بە ڕێژەی 20% لە یەکەم جار خێراتربوون.

ب) کاریگەری باشبوونی توانای خوێندکاران لەسەر ڕوونکردنەوەی نەخشەی $T(n)$ باسبکە.



24 **تەکنەلۆژیا** مۆرفینگ Morphing تەکنەلۆژیای بزمێریە. ڕێگای بە گۆڕینی وێنەیەك بۆ وێنەیەکی تر دەدات وەك لە زنجیرە وێنەی سەرەوەدا دیارە. ئەم تەکنەلۆژیایە بەچەند خاڵێك لە وێنەکەوە بۆ وێنەیەکی تر دەگۆڕێت

أ) وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشەکانی $f(x)=\left\{\frac{1}{2}x+4\right.$ کاتێك $1\le x\le 2$ و $g(x)=\left\{-x^2+6x-7\right.$ کاتێك $2\le x\le 4$ و $h(x)=\left\{-\frac{1}{2}x+7\right.$ کاتێك $4\le x\le 5$ لەهەمان ڕووتەختی پۆوتان بکێشە.

ب) وێنەی ڕوونکردنەوەیی ئەمانە بکێشە $f_1(x)=-f(x)+8$ و $g_1(x)=-5g(x)+3$ و $h_1(x)=-h(x)+8$

بۆهەر نەخشەیەك نەخشەیەکی پەیدابوو لەئەنجامی جیگۆڕکێیەکەی بە جێگۆڕکێی دیاریکراو بنووسە.

25 $f(x)=\begin{cases}2^x-1 & x\le -3\\ -5x+3 & x>-3\end{cases}$ ، ڕاکێشانی 7 یەکە بۆ خوارەوە.

26 $f(x)=\begin{cases}3x^2 & x<1\\ -2x+4 & x\ge 1\end{cases}$ ، کشانی ستوونی هاوکۆلکەکەی 5 بێت.



27 **بەروبوومەکان** یەکێك لە جوتیارەکان بەر و بوومەکانی بە نرخیکی قایلکەر (مغرية) خستەڕوو.

أ) وێنەیەکی ڕونکردنەوەیی بکێشە تێچوونی کڕینی هەندێك لەنێوان $0\ kg$ و $10\ kg$ بنوێنێت.

ب) نەخشەی ڕێسا پەلدار بنووسە کەبتوانرێت لەهەژمارکردنی نرخی $x\ kg$ بەروبوومی کشتوکاڵی بەکاربهێنرێت.

ج) **چی دەبێت ئەگەر...؟** لە کۆتایی ڕۆژ خستنە ڕوویەکی تری نیشاندا بۆ کڕیار بەرامبەر هەر کیلۆگرامێك دەیکڕێت یەك کیلۆگرام بەخۆڕایی بێت، وێنەیەکی ڕوونکردنەوەیی نەخشە نوێیەکە بکێشە ئەو جێگۆڕکێیەی نەخشەی بنەڕەتی پەیدای دەکات، باسیبکە.

28 **کار** یەکێك لە کۆمپانیاکانی فرۆشتنی بژمێر پشت بە نەخشەی $P(n)=-0.002n^2+19n-9000$ دەبەستێت بۆ دیاریکردنی قازانجەکانی فرۆشتنی n بژمێردا، کۆمپانیاکە بۆ ساڵی داهاتوو پشت بە نەخشەی $R(n)=P(0.8n)$ دەبەستێت.

أ) کاریگەری ئەم گۆڕانکارییانە لەسەر ژمارەی ئەو بژمێرانەی کۆمپانیاکە پێویستە بیفرۆشێت چییە بۆ ئەوەی زۆرترین قازانجی دەستکەوێت؟

ب) ژمارەی بژمێرەکانی پێویستە بیفرۆشێت بۆ هێنانەدی بەرزترین ڕادەی قازانج بدۆزەوە.

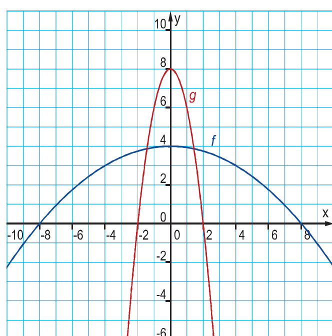
29 **بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە** نەخشەیەکی هێڵی، یەکتربڕینە ئاسۆییەکەی یەکسانە بە 2 و یەکتربڕینە ستوونییەکەی یەکسانە بە 3 نەخشەکە بە شێوەی ستوونی فراوان بکرێت هاوکۆلکەی 2 بێت، پاشان 3 یەکە بۆ خوارەوە ڕابکێشرێت، وە بەشێوەی ئاسۆیی فراوانبکرێت هاوکۆلکەی 2 بێت، یەکتربڕینە نوێیەکانی نەخشە پاش جێگۆڕکێ چەندە؟

30 **بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە** بۆچی لە ڕاکێشانی ستوونیدا بواری نەخشەکە ناگۆڕێت بەڵام لە ڕاکێشانی ئاسۆییدا بوارەکەی دەگۆڕێت؟ ئەمە ڕوونبکەوە.

31 **بنووسە** ئایا دەتوانرێت ڕوونکردنەوەیەکی پساو (بەیەکەوە نەبەستراو) بۆ ڕونکردنەوەیەکی نەپساو جێگۆڕکێ پێبکرێت، تەنها کشان و چوونەوەیەك بەکاربهێنرێت؟

ئامادەکردن بۆ تاقیکردنەوە

32 کام لەمانەی خوارەوە بریتییە لە نەخشەی $g(x)$ لە وێنەی ڕونکردنەوەیی بەرامبەردا؟



أ) $g(x)=2f\left(\frac{1}{4}x\right)$ ج) $g(x)=2f(4x)$

ب) $g(x)=\frac{1}{2}f\left(\frac{1}{4}x\right)$ د) $g(x)=\frac{1}{2}f(4x)$

33 کام لەمانە نەخشەی $g(x)=f(4x)$یە کاتێ $f(x)=\begin{cases}2x & x>8\\ x^2 & x\le 8\end{cases}$

أ) $g(x)=\begin{cases}\frac{x}{2} & x>2\\ \frac{x^2}{16} & x\le 2\end{cases}$ ج) $g(x)=\begin{cases}8x & x>32\\ 4x^2 & x\le 32\end{cases}$

ب) $g(x)=\begin{cases}\frac{x}{2} & x>8\\ \frac{x^2}{16} & x\le 8\end{cases}$ د) $g(x)=\begin{cases}8x & x>2\\ 16x^2 & x\le 2\end{cases}$

34 یەکتربڕینی ستوونی نەخشەی $g(x)=\frac{3}{5}f(5x)$ بریتییە لە 15. یەکتربڕینی ستوونی بۆ نەخشەی $f(x)$ چەندە؟

أ) 3 ب) 9 ج) 25 د) 75

بەرەنگاری و فراوانکردن

35 **ئەندازە** نەخشەی $f(x)=\begin{cases}\frac{2}{3}x+4 & x<0\\ -\frac{1}{2}x+4 & x\ge 0\end{cases}$ بەکاربهێنە.

أ) وێنەی ڕوونکردنەوەی نەخشەی $f(x)$ بکێشە و یەکتربڕینەکانی دیاربکە. پاشان ڕووبەری ناوچەی دیاریکراو بە ڕوونکردنەوەی نەخشەکە و تەوەرەی یەکەم هەژماربکە.

ب) وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشەی $g(x)=4f(2x)$ بکێشە. پاشان ڕووبەری ناوچەی دیاریکراو بە ڕوونکردنەوەکە و تەوەرەی یەکەم هەژمار بکە.

36 نەخشەی $f(x)=2x^3-3x^2-11x+6$ بەکاربهێنە.

أ) یەکتربڕینی نەخشەی $g(x)=3f\left(\frac{1}{2}x\right)$ دیاربکە ب) یەکتربڕینی نەخشەی $h(x)=-g\left(\frac{1}{2}x\right)$ دیاربکە

پێداچوونەوەی لوولپێچی

37 **زەویناسی** لەنێوان ساڵی 1999 و 2002 دا 973 بومەلەرزە لە وڵاتە یەکگرتووەکانی ئەمریکای داوە. 43% ئەو بومەلەرزانە لە کالیفۆڕنیای داوە. بە نزیکی چەند بومەلەرزە لەو ماوەیە لە کالیفۆڕنیای داوە. (پۆلەکانی پێشوو)

گەورەترین و بچووکترین بەها بۆهەر نەخشەیەك بدۆزەوە، پاشان بوار و مەودای نەخشەکە دیاریبکە. (پۆلەکانی پێشوو)

38 $f(x) = 4x^2 - 2x + 8$

39 $g(x) = -3x^2 + 6x - 9$

بەهای هەر نەخشەیەکی ڕێسا پەلداری خوارەوە کاتێك $x = -4$ و $x = 0$ و $x = 5$ هەژماربکە. (وانەی 5− 2)

40 $f(x) = \begin{cases} 3 & x < 1 \\ x^2 - 4 & x \geq 1 \end{cases}$

41 $g(x) = \begin{cases} 5 - 2x & x < -3 \\ 4 + x & x \geq -3 \end{cases}$

بەشی 5

تاقیکردنەوەی نیوەی بەش

1-5 نەخشە ڕێسا پەلدارەکان

وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشەکە بکێشە.

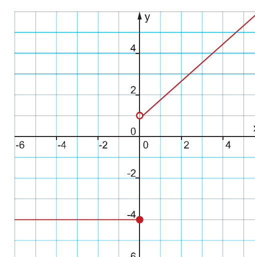
1 $f(x)=\begin{cases} 3 & x<0 \\ 2x+3 & x\geq 0 \end{cases}$

2 $h(x)=\begin{cases} -x+1 & x<-3 \\ -x & -3\leq x<1 \\ -x-1 & x\geq 1 \end{cases}$

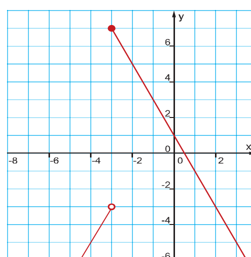
3 بەکرێ گرتنی پاسکیل بۆ گواستنەوە لە شاخ بۆ سێ کاتژمێری یەکەم 000 25 دیناری تێدەچێت، و 5000 دینار بۆهەر کاتژمێرێکی زیادە. وێنەیەکی ڕوونکردنەوەیی بکێشە بۆ بەکرێگرتنی پاسکیل بۆ کاتێکی دیاریکراو لە 0 تا 8 کاتژمێر.

نەخشەیەکی ڕێسا پەلدار بۆهەر یەکێك لەم وێنە ڕوونکردنەوەییانە بنووسە.

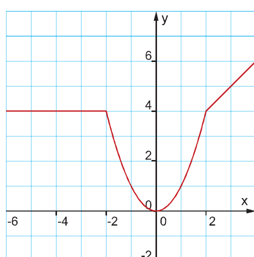
4



5



6



2-5 جێگۆڕکێی نەخشەکان

یەکتربڕینەکانی ئاسۆیی و ستوونی بۆ نەخشەی $f(x)$ دیاریبکە، و دەرئەنجامی یەکتربڕینەکانی ئاسۆیی و ستوونی بۆ نەخشەی $g(x)$ بەبێ وێنەکێشانی ڕوونکردنەوەیی دیاریبکە.

7 $f(x)=2x-2$ ، $g(x)=-f\left(\frac{1}{2}x\right)$

8 $f(x)=x^2-4$ ، $g(x)=2f(x)$

وێنەی ڕوونکردنەوەیی $g(x)$ بکێشە بە زانینی $f(x)$

9 $f(x)=|x|-3$ ، $g(x)=2f(x)+3$

10 $f(x)=x^2+1$ ، $g(x)=-3f(x)$

3-5 کردارەکان لەسەر نەخشەکان

Operations with Functions



ئامانجەکان

- کۆکردنەوە و لێدەرکردنی نەخشەکان و لێکدان و دابەشکردنیان.
- ئاوێتەکردنی نەخشەکان و هەژمارکردنی بەهای نەخشەی ئاوێتە.

کێ ئەمە بەکاردەهێنێت؟

کالاهێنەرەکان دەتوانن کردارەکان لەسەر نەخشە بەکاربهێنن بۆ دیاریکردنی تێچوونی ئەوەی بە دراوی بیانی دەیکرن (نموونە 5)

دەتوانیت کردارەکان لەسەر نەخشەکان ئەنجامبدەیت، وەك چۆن کردارەکان لەسەر ژمارەکان و برەکان ئەنجام دەدەیت. دەتوانیت نەخشەکان کۆبکەیتەوە و لە یەکتریان دەربکەیت و لێکیان بدەیت. ئەو کردارانەش لەسەر ڕێساکانیان ئەنجامدەدرێت.



کردارەکان لەسەر نەخشەکان	
کردارەکە	نووسینەوە
کۆکردنەوە	$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$
لێدەرکردن	$(f-g)(x)=f(x)-g(x)$
لێکدان	$(fg)(x)=f(x)\text{x}g(x)$
دابەشکردن	$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$ کاتێك $g(x)\neq 0$

نموونە 1 کۆکردنەوە و لێدەرکردنی نەخشەکان

$f(x)=2x^2+4x-6$ ؛ $g(x)=2x-2$ هەر نەخشەیەك بدۆزەوە.

أ $(f+g)(x)$

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$$
$$=(2x^2+4x-6)+(2x-2)$$ لەجیاتی هەرنەخشەیەك ڕیساکەی دابنێ.
$$=2x^2+6x-8$$ سادەبکە

ب $(f-g)(x)$

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)$$
$$=(2x^2+4x-6)-(2x-2)$$ لەجیاتی هەر نەخشەیەك ڕێساکەی دابنێ
$$=2x^2+4x-6-2x+2$$ سیفەتی بەشینەوە بەکاربهێنە
$$=2x^2+2x-4$$ سادەبکە



1. $f(x)=5x-6$ ؛ $g(x)=x^2-5x+6$ ئەمانە بدۆزەوە.

أ $(f+g)(x)$ **ب** $(f-g)(x)$

کاتێك نەخشەیەك دابەشی نەخشەیەکی تر دەکەیت دڵنیابە لەهەر بوارێك لە ئەنجامی دابەشکردنەکە پەیدادەبێت.

نموونــــه 2 لێکدان و دابەشکردنی نەخشەکان

$f(x)=2x^2+4x-6$ ؛ $g(x)=2x-2$ هەر نەخشەیەك بدۆزەوە.

أ $(gf)(x)$

$(gf)(x)=g(x)\times f(x)$

$=(2x-2)(2x^2+4x-6)$ لەجیاتی هەرنەخشەیەك ڕێساکەی دابنێ

$=2x(2x^2+4x-6)-2(2x^2+4x-6)$ سیفەتی بەشینەوە بەکاربهێنە

$=4x^3+8x^2-12x-4x^2-8x+12$ لێکدانبکە

$=4x^3+4x^2-20x+12$ سادەبکە

ب $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$

$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$

$=\frac{2x^2+4x-6}{2x-2}$ ئەنجامی دابەشکردنەکە بەشێوەی کەرت بنووسە

$=\frac{2(x-1)(x+3)}{2(x-1)}$ بەتەواوتی شیتەڵبکە سەرنجبدە $x\neq 1$

$=\frac{\cancel{2}\cancel{(x-1)}(x+3)}{\cancel{2}\cancel{(x-1)}}$ کورتبکەوە

$=x+3 \quad (x\neq 1)$ سادەبکە



2. $f(x)=x+2$ ؛ $g(x)=x^2-4$ هەر نەخشەیەك بدۆزەوە.

أ $(fg)(x)$ **ب** $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$

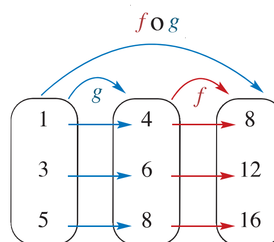


ئاوێتەکردنی نەخشەکان

ئاوێتەکردنی نەخشەی f لەگەڵ نەخشەی g ، بریتییە لەو نەخشەی یەکەم بەم شێوە دەنووسرێت

$$(f \circ g)(x)=f\big(g(x)\big)$$

بواری نەخشەی ئاوێتە $(f \circ g)(x)$ بریتییە لە کۆمەڵە بەهای x لەبواری g دا. وادەکات لە $g(x)$ سەربە بواری f بێت.



بۆ هەژمارکردنی $f \circ g\ (1)$ یەکەمجار هەژماری $g\ (1)$ بکە؛

$g(1)=4$

پاش ئەوە هەژماری $f\ (4)$ بکە

$f(4)=8$

کەواتە $(f \circ g)\ (1)=f\,(g\,(1))=f\,(4)=8$

خوێندنەوەی بیرکاری

نەخشەی ئاوێتە $(f \circ g)x$ یان $(f \circ g)$ بە f of g of x یان g of f of x دەخوێندرێتەوە

ڕێسای ڕیزبەندی کردارەکان لەسەر نەخشە هەمان ڕێسای ڕیزبەندی کردارەکانە لەسەر ژمارەکان و برەکان بۆ هەژماری $(f\circ g)(3)$ یەکەمجار $g\ (3)$ هەژماربکە، پاشان هەژماری بەهای f بکە، کاتێك بەهای بۆ ناوی $g\ (3)$ بێت.

نموونـــــه 3 هەژمارکردنی بەهای نەخشە ئاوێتەکان

$f(x)=3x+1$ و $g(x)=x^3$ هەژماری هەر بەهایەك بکە.

أ $f(g(2))$

هەنگاوی 1 هەژماری $g(2)$ بکە

$g(x)=x^3$ $\quad g(2)=2^3=8$

هەنگاوی 2 هەژماری $f(8)$ بکە

$f(x)=3x+1$ $\quad f(8)=3\times 8+1=25$

کەواتە $f(g(2))=25$

ب $g(f(2))$

هەنگاوی 1 هەژماری $f(2)$ بکە

$f(x)=3x+1$ $\quad f(2)=3\times 2+1=7$

هەنگاوی 2 هەژماری $g(7)$ بکە

$g(x)=x^3$ $\quad g(7)=7^3=343$

کەواتە $g(f(2))=343$

ئاگاداربە!

هێمای ئاوێتەکردنی نەخشەی (o) و هێمای لێکدان (•) تێکەڵاو مەکە.

$(fg)\ x \neq f(g(x))$



3. $f(x)=2x-3$ و $g(x)=x^2$ هەژماری هەر بەهایەك بکە.

أ $f(g(3))$ ب $g(f(3))$

دەتوانیت برە جەبریەکان وەك بەهای بۆناو نەخشە بەکاربیهێنیت، وەك چۆن ژمارەکان بەکاردەهێنیت بۆ دۆزینەوەی ڕیسای نەخشەی ئاوێتە $f(g(x))$ لەنەخشەی $f(x)$ لەجیاتی x برەی $g(x)$ دابنێ. پاشان ئەو برەی دەردەچێت بەسادەترین شێوەی بنووسە.

نموونـــــه 4 نووسینی نەخشەی ئاوێتە

$f(x)=5x+2$ و $g(x)=\frac{2}{x-1}$ هەر نەخشەیەکی ئاوێتە بنووسە و بوارەکەی دیاریبکە.

أ $f(g(x))$

$f(g(x))=f\left(\frac{2}{x-1}\right)$ لەجیاتی x ڕێسای نەخشەی g دابنێ

$=5\left(\frac{2}{x-1}\right)+2$ ڕێسای f بەکاربهێنە. سەرنجبدە $x\neq1$

$=\frac{10}{x-1}+2 \quad ; \ x\neq1$ سادەبکە

بواری نەخشەی $f(g(x))$ بریتییە لە کۆمەڵەی ژمارە ڕاستییەکان جگەلە 1 یان $\{x|x\neq1\}$

چونکە $g(1)$ پێناسە نەکراوە.

ب $g(f(x))$

$g(f(x))=g(5x+2)$ لەجیاتی x ڕێسای نەخشەی f دابنێ

$=\frac{2}{(5x+2)-1}$ ڕێسای نەخشەی g بەکاربهێنە، سەرنجبدە $x\neq1$

$=\frac{2}{5x+1} \quad , \quad x\neq-\frac{1}{5}$ سادەبکە

بواری نەخشەی $g(f(x))$ بریتییە لە کۆمەڵەی ژمارە ڕاستییەکان جگەلە $-\frac{1}{5}$ یان $\{x|x\neq-\frac{1}{5}\}$

چونکە $f\left(-\frac{1}{5}\right)=1$ و $g(1)$ پێناسە نەکراوە.



4. $f(x)=3x-4$ و $g(x)=\sqrt{x}+2$ نەخشەی ئاوێتە بنووسە و بوارەکەی دیاریبکە.

أ $f(g(x))$ ب $g(f(x))$

دەتوانیت ئاوێتەکردنی نەخشەکان بەکاربهێنیت بۆ سادەکردنی زنجیرەیەك لە نەخشەکان.

نموونـــــه 5 جیێبەجیکردن لەسەر کارگێڕی کار

دڵسۆز ماتۆڕسکیلێکی (سکوتر) کەنرخی بەیۆرۆ بۆ دانراوە لە ئیتاڵیاوە دەهێنێت. تێچوونی گشتی هەر ماتۆڕسکیلێک**10%**باجی گومرگی و 75 یۆرۆ بارکردنی دەچێتەسەر.



نرخی دراوەکان

بۆهەر 1000 دیناری عیراقی

0.84	دۆلاری ئەمریکی
3.09	ڕیالی سعودی
1260	لیرەی لوبنانی
0.52	یۆرۆی ئەوروپی

أ نەخشەیەکی ئاوێتە بنووسە، نموونەیەك بنوێنێت، بۆ تێچوونی هەر ماتۆڕسکیلێك بەدینار بەپێی نرخەکەی یۆرۆ(c)هەژماربکات.

هەنگاوی 1 نەخشەیەك بۆهەژمارکردنی تێچونی ماتۆڕسکیلێك بەیۆرۆ بنوسە

$$E(c) = c + 0.1c + 75$$
$$= 1.1c + 75$$

هەنگاوی 2 نەخشەیەك بۆهەژمارکردنی تێچونی بە دینار بەپێی تێچونی بەیۆرۆ بنووسە $R(c) = 1920c$

1 یۆرۆ = 1920 دینار بەکاربهێنە

هەنگاوی 3 نەخشەی ئاوێتەی $R(E(c))$ بدۆزەوە

$$R(E(c)) = 1920E(c) = 1920(1.1c + 75) = 2112c + 144\ 000$$ لەجیاتی دابنێ

ب هەژماری تێچونی ماتۆڕسکیلێك بەدینار بکە نرخەکەی **1200** یۆرۆ بێت.

هەژماری بەهای نەخشەی ئاوێتەی$R(E(c))$ بکە کاتێك $c = 1200$

$$R(E(1200)) = 2112 \times 1200 + 144\ 000 = 2\ 678\ 000$$

تێچونی گشتی ئەم ماتۆڕسکیلە 000 678 2 دینارە



5. یەکێك لە دوکانەکانی ئامێری مۆسیقی ئاشکرایکرد ئامێری عود بە ڕێژەی 20% دادەشکێنێت بۆئەو کریارانەی بەرگی عود دەکرن لە دوکانەکەدا، داشکانێکی تری بۆ زیادکرا ڕێژەکەی 15% بۆهەر ئامێرێکی عود کە دەیکرن.

أ نەخشەیەکی ئاوێتە بنووسە بۆهەژمارکردنی نرخی کۆتایی بۆئەو کریارەی بەرگی عود دەکرێت لەکاتی کرینی ئامێرێکی عود دا نرخەکەی x دینارە.

ب ئالان یەکێکە لەو کریارانەی لەدوکانەکە زۆرترین شت دەکرێت. عودێکی کری نرخەکەی 000 248 دیناربوو، ئالان ئەو بەرگەی لەو دوکانە بەچەند کریوە؟

بیربکەوە و تاوتوێبکە

1. ئەو هۆیەی وادەکات لە $(f+g)(x) = (g+f)(x)$ڕوونبکەوە.

2. هەردوو نەخشەی$f(x)$ و $g(x)$ بدۆزەوە بەجۆرێك کە $f(g(x)) = g(f(x)$



3. ڕێکخەربە ئەم خشتەیە دروستبکەوە و تەواوبکە، پاشان هەرکردارێك لەسەر دوو نەخشەکە بەڕێگای ڕاست بنووسە.

کردار	نووسین
کۆکردنەوەی دوو نەخشە	
لێدەکردنی دوو نەخشە	
لێکدانی دوو نەخشە	
دابەشکردنی دوو نەخشە	
ئاوێتەکردنی دوو نەخشە	

3-5 ڕاهێنانەکان

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

1 **زاراوەکان** ئاوێتەکردنی نەخشەکان بەچی لە کردارەکانی تر جیاوازە؟

پروانە نموونە 1

$f(x)=8x+13$ ؛ $g(x)=x^2-5x$ هەر نەخشەیەك بدۆزەوە.

2 $(f+g)(x)$ **3** $(f-g)(x)$ **4** $(g-f)(x)$

پروانە نموونە 2

$f(x)=2x^2+2x$ ؛ $g(x)=x+1$ هەر نەخشەیەك بدۆزەوە.

5 $(fg)(x)$ **6** $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ **7** $\left(\frac{g}{f}\right)(x)$

پروانە نموونە 3

$f(x)=3x^2$ ؛ $g(x)=7-x$ هەر بەهایەك بدۆزەوە.

8 $f(g(5))$ **9** $g(f(5))$ **10** $f(g(-2))$

پروانە نموونە 4

$f(x)=x^2$ ؛ $g(x)=2x-3$ ؛ $h(x)=\sqrt{x+1}$ هەر نەخشەیەك بدۆزەوە و بوارەکەی دیاریبکە.

11 $f(g(x))$ **12** $g(f(x))$ **13** $f(h(x))$

پروانە نموونە 5

14 **ئابووری بەکاربەر** بۆ خوێندن لە زانکۆ، کرێکار ئەو پارەی وەریدەگرێت 10%ی پاشەکەوت دەکات و 50 000 دیناری تری دەخاتەسەر، پوختەی مانگانەی کرێکار وەریدەگرت لە پاش داشکانی باج و سەرانە 80% ی موچە بنەڕەتی یەکەی پێکدەهێنێت.

أ نەخشەیەکی ئاوێتە بنووسە بۆ هەژمارکردنی ئەوەی کرێکار مانگانە پاشەکەوتی دەکات بەپێی مووچە بنەڕەتیەکی g .

ب ئەوەی کرێکار پاشەکەوتی دەکات هەژماربکە، ئەگەر بزانی مووچەی بنەڕەتی مانگانە 2 400 000 دینارە.

ڕاهێنان و شیکارکردنی پرسیارەکان

$f(x)=2x^2-8$ ؛ $g(x)=x^2+5x+6$ ؛ $h(x)=2x+4$ هەر نەخشەیەك بدۆزەوە.

15 $(f+g)(x)$ **16** $(f-g)(x)$ **17** $(f+h)(x)$ **18** $(g-h)(x)$

19 $(fg)(x)$ **20** $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ **21** $\left(\frac{h}{f}\right)(x)$ **22** $(gh)(x)$ **23** $\left(\frac{g}{h}\right)(x)$

$f(x)=2\sqrt{x+3}$ ؛ $g(x)=-3x+1$ هەر بەهایەك بدۆزەوە.

24 $f(g(1))$ **25** $g(f(1))$ **26** $f(g(4))$

27 $g(f(6))$ **28** $f\left(g\left(\frac{4}{3}\right)\right)$ **29** $g(f(97))$

$f(x)=4x+3$ ؛ $g(x)=\frac{x}{x+3}$ ؛ $h(x)=x^2-2$ هەر نەخشەیەکی ئاوێتە بدۆزەوە و بوارەکەی دیاریبکە.

30 $f(g(x))$ **31** $g(f(x))$ **32** $f(h(x))$

33 **کارەکان** بڕی تێچوونی کاشی کردنی ژورێك 100 000 دینارە، بۆهەریەك یاردی دووجا 4000 دینار زیاد دەدات، بزانە (یارد یەکەیەکی ئینگلیزیە بۆ پێوانی درێژی و هەر یاردەیەك یەکسانە بە 3 پێ و پێ یەکەیەکی تری ئینگلیزیە بۆ پێوانی درێژی بەکاردێت دەکاتە 30.48 cm

أ نەخشەیەکی ئاوێتە بنووسە بۆ هەژمارکردنی تێچوونی کاشی کردنی ژوورێك ڕووبەرەکەی x پێ چوارگۆشە بێت.

ب ڕووبەری ژوورەکە بە پێ دووجا بدۆزەوە ئەگەر زانیت تێچوونی کاشی کردنەکە 380 000 دینارە.

ڕاهێنانی ئازاد

شیکارکردنی پرسیارەکان	تەماشای نموونە بکە
18-15	1
23-19	2
29-24	3
32-30	4
33	5

34 لەکاتی گەرمکردنی هەوای ناو باڵۆن؛ تا 83^o بۆهەریەك پێ سێجا لەهەوا توانای بەرزکردنەوەی $25\ ^og$ بەنزیکی هەیە

أ نەخشەیەك بنووسە بۆ باڵۆنێك و ژمارەی ئەو گرامانەی کە دەتوانێت هەڵیبگرێت کاتێك xm^3 هەوای گەرمی تێدابێت.

ب چەند مەتر سێجا لە هەوای گەرم پێویستە بۆ هەڵگرتنی کەسێکە بارستەکەی 75kg بێت.

ج نەخشەی $g(x)=\frac{x}{453.6}$ ڕێسایەکە بۆ گۆڕینی گرام بۆ (پاوەند لە یەکەیەکی ئینگلیزیە بۆ پێوانی بارستایی)، نەخشەیەك بنوسە ژمارەی ئەو پاوەندانەی باڵۆنەکە دەتوانێت هەڵیبگرێت کاتێك x پێ سێجا هەوای گەرمی تێدابێت، بنوێنێت.

د ژمارەی پێ سێجاکان لەهەوای گەرم بۆ بەرزکردنەوەی 1000 پاوەند بخەمڵێنە.

35 **ئابوری بەکاربەر** کۆڕین دوو بلیتی کرینی پێیە، دەتوانێ بۆکرینی پێڵاو لەدوکانێکی پێڵاو بەکاریبهێنێت. بلیتی یەکەم داشکانی 10 000 دینار بۆ دابین دەکات بەڵام بلیتی دووەم داشکانی ڕێژەی15%دابین دەکات.

أ نەخشەی $f(p)$ بنووسە، بۆئەو پارانەی کۆڕین بۆ کرینی پێڵاو دەیدات نرخەکەی p دینار بێت، ئەگەر تەنها بلیتی یەکەم بەکاربهێنێت.

ب نەخشەی $g(p)$بنووسە، بۆئەو پارەی کۆڕین بۆ کرینی پێڵاو دەیدات نرخەکەی p دینار بێت، ئەگەر تەنها بلیتی دووەم بەکاربهێنێت.

ج $f(g(p))$ و $g(f(p))$ بدۆزەوە.

د ئامۆژگاری کۆڕین دەکەیت، کام بلیتیان یەکەم جار بەکاربهێنێت؟ ئەمە ڕوونبکەوە.

هـ کەمترین نرخ کۆڕین دەیدات بۆ کرینی جووتە پێڵاوێك نرخەکەی 49 000 دینار بێت بدۆزەوە.

دەروازەیەك

بوومەلەرزە

بوومەلەرزە لە ئەنجامی جووڵەی چینەکانی زەوی نزیك شوێنی قڵیشبردوو پەیدادەبێت. قڵیشەکان شکانی توێکڵی زەویە و دەکەوێتە سنووری چینە تەکتۆنیەکان.

36 **بوومەلەرزە** ئەو شەپۆڵەی بوومەلەرزە دروستی دەکات بەخێرایی 9km/s بڵاودەبێتەوە، زیانەکانی زۆر زۆردەبێت لەو ناوچانەی دەوری شوێنی بومەلەرزەکەیان داوە.

أ نەخشەیەك بۆ هەژمارکردنی ڕووبەری ناوچەیەكkm^2 بومەلەرزە کاریتێدەکات پاش t چرکە بدۆزەوە.

ب زەویناسان خەملاندیان کاریگەری بوومەلەرزە کۆتایی دێت پاش ئەوەی ڕووبەری ناوچەی کارتێکراو دەگاتە $35000\ km^2$، کاریگەری بوومەلەرزەکە چەند دەخایەنێت.

37 **دانیشتوان** نەخشەی $p(t)=160\ 000\times1.05^t$ ڕێسایەکە بۆ دیاریکردنی ژمارەی دانیشتوانی یەکێك لە شارەکان، کاتێك t ژمارەی ساڵەکان بێت، کە لە ساڵی 1980 دا ئەنجامدراوە. و نەخشەی $d(p)=0.0044\,p$ ژمارەی پزیشکەکانی ئەم شارە بەپێی ژمارەی دانیشتوان بێت کاتێك p ژمارەی دانیشتوانی شارەکە بێت.

أ نەخشەییەك بنووسە بۆهەژمارکردنی ژمارەی پزیشکەکانی ئەم شارە بەپێی ژمارەی ساڵەکان، لە ساڵی 1980 وە.

ب **خەملاندن** ژمارەی پزیشکەکانی ئەم شارە بۆ ساڵی 2010 بخەمڵێنە.

ج کەی ژمارەی پزیشکەکانی ئەم شارە لە 5000 پزیشك زیاتر دەبێت؟

38 **بیری ڕەخنەگر** ئەگەر$f(x)=x$ئایا هەموو کات نەخشەی$f(g(x))$ یەکسانە بە نەخشەی $g(f(x))$ ڕوونبکەوە

ئەم دوو خشتەی بەرامبەر بەکاربهێنە بۆ دۆزینەوەی هەر بەهایەك.

39 $g(f(5))$ **40** $f(g(3))$ **41** $g(f(4))$ **42** $f(g(2))$

x	2	3	4	5
$f(x)$	0	1	2	3

x	1	2	3	4
$g(x)$	1	2	4	8

43 **بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە** ئایا دەتوانیت ئەم دوو خشتە بەکاربهێنیت بۆ دۆزینەوەی $f(g(4))$ ؟ وەڵامەکەت ڕوونبکەوە.

44 **بنووسە** ئایا سەرجەمی دوو نەخشەی هێڵی دەبێتە نەخشەی هێڵی؟ ئایا ئەنجامی لێکدانی دوو نەخشەی هێڵی دەبێتە نەخشەی هێڵی؟ ئەمە ڕوونبکەوە.

45 کام لەم دوو نەخشە خوارەوە پاسەدانی ئەمە دەکەن، $f(x)$ و $g(x)$ کاتێك $(f \circ g)(x)=(3x+4)^2$

أ) $f(x)=3x+4$ ؛ $g(x)=x^2$ ج) $f(x)=(3x)^2$ ؛ $g(x)=4^2$

ب) $f(x)=x^2$ ؛ $g(x)=3x+4$ د) $f(x)=3x+4$ ؛ $g(x)=\sqrt{x}$

46 کام نەخشە بریتییە لە $(fg)(5)$ ئەگەر $f(x)=2x+1$ و $g(x)=5x-2$

أ) 253   ب) 53   ج) 47   د) 13

47 کام لەمانەی خوارەوە نەخشەی $(f \circ g)(x)$ کاتێك $f(x)=4-x^2$ ، $g(x)=\frac{1}{2}x-2$ ؟

أ) $(f \circ g)(x)=-\frac{1}{2}x^2$ ج) $(f \circ g)(x)=-\frac{1}{2}x^3+2x^2+2x-8$

ب) $(f \circ g)(x)=-\frac{1}{4}x^2+2x$ د) $(f \circ g)(x)=-x^2+\frac{1}{2}x+2$

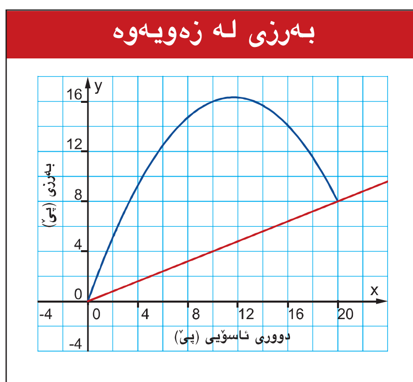
48 **تەنها وەڵام** $(f+g)(2)$ بدۆزەوە کاتێك $f(x)=(x+1)^2$ و $g(x)=3x$

بەرەنگاری و فراوانکردن

49 $g(x)$ بدۆزەوە ئەگەر بزانیت $f(x)=2x-6$ و $f(g(x))=3x^2+4$

50 $g(f(x))$ بدۆزەوە کاتێك $f(x)=3x+8$ و $g(x)=\begin{cases} x^2 & x<0 \\ 5x+2 & x\geq 0 \end{cases}$

51 **فیزیا** نەخشەی $y=-0.12x^2+2.8x$ ڕێسایەکە بۆ هەژمارکردنی بەرزی تۆپی پێ y دەنوێنێت. کە بە ئاراستەی گردەکە لێدەدرێت، بەپێی دووری ئاسۆیی x لەخاڵی لێدانەوە. هەروەها نەخشەی $y=\frac{2}{5}x$ دۆزینەوەی بەرزی خاڵێك لەسەر گردەکە بەپێی دووری لە خاڵی لێدانی تۆپەکە دەنوێنێت.



أ) بەرزی لە ئاستی خاڵی لێدان بۆ بەرزترین خاڵ تۆپەکە دەیگاتێ بدۆزەوە.

ب) بەرزی لە ئاستی خاڵی لێدان بۆ خاڵی کەوتنە خوارەوەی تۆپەکە لەسەر گردەکە بدۆزەوە.

پێداچوونەوەی لووپێچی

52 **کار** ساڵانە بەهای بزمێرێك نرخەکەی 2 500 000 دینارە بە ڕێژەی 20% دادەبەزێت. (وانەی 4-1)

أ) نەخشەیەك بۆ دۆزینەوەی بەهای بزمێر پاش t ساڵ بنووسە.

ب) بەهای بزمێر پاش 10 ساڵ دەبێتە چەند؟

بنووسە ئەگەر زانیت $f(x)=\begin{cases} 8x & x\geq 0 \\ x-9 & x<0 \end{cases}$ ڕێسایەك بۆ هەر نەخشەیەك بنووسە. (وانەی 5-2)

53 $g(x)$ بریتییە لە نەخشەی پەیدابوو لە جێگۆڕکێی نەخشەی $f(x)$ بە ڕاکێشانی 5 یەکە بۆلای چەپ.

54 $h(x)$ بریتییە لە نەخشەی پەیدابوو لە جێگۆڕکێی نەخشەی $f(x)$ بە کشانی ئاسۆیی هاوکۆلکەی 3 بێت.

4-5 نموونە بیرکارییەکان

Mathematical Models



ئامانجەکان

بۆ نواندنی باری ژیانی ڕۆژانە بەهۆی نەخشەکان نموونەی بیرکاری بەکاردەهێنرێت بۆ بەجێهێنانی پێشبینییەکان.

کێ ئەمە بەکاردەهێنێت؟

دەتوانیت نموونە بیرکارییەکان بۆ شیکردنەوە و پێشبینی کردنی ژمارەی ئامێرەکانی پارەپێدان (صرف الآلي) کە ئیش دەکەن بەکاربێنێت. (نموونە 3)

زۆر لەو پێدراوانەی لەسەربارەکانی ژیان کۆدەکرێنەوە شێوەیەك پێکدەهێنێت دەتوانیت بە بەکارهێنانی نەخشەیەك لەو نەخشانەی خوێندوتە بنوێنیت ئەو کاتە دەتوانیت ئەم نەخشانە بۆ شیکردنەوە و دارشتنی پێشبینییەکان بەکاربهێنیت. هەندێك لەو نەخشە بنەڕەتیانەی تا ئێستا خوێندوتە وەبیر خۆت بێنەوە.

فێربە
بەسەرنج بدە

نەخشە بنەڕەتییەکان				
جۆر	هێڵی	دووجا	توانی	ڕەگی
هاوکێشە	$f(x)=x$	$f(x)=x^2$	$f(x)=b^x , b>0$	$f(x)=\sqrt{x}$
ڕوونکردنەوە				
نەگۆڕی جیاوازییەکان یان ڕێژەکان	نەگۆڕی جیاوازییەکانی یەکەم بۆ بەهایەکانی y کە بە بەهایەکانی x وە بەستراوە لە دووریدا یەکسانن	نەگۆڕی جیاوازییەکانی دووەم بۆ بەهایەکانی y کە بە بەهایەکانی x وە بەستراوە لەدووریدا یەکسانن	نەگۆڕی ڕێژەی بەهایەکانی y کە بە بەهایەکانی x وە بەستراوە لە دووریدا یەکسانن	نەگۆڕی جیاوازییەکانی دووەم بۆ بەهایەکانی x کە بە بەهایەکانی y بەستراوە لەدووریدا یەکسانن

یارمەتی

لەبەرئەوەی نەخشەی ڕەگی دووجای نەخشەی هەڵگەڕاوەیە بۆ نەخشەی دووجا ئەوا بەهای x و بەهای y ئاڵوگۆڕ دەبن.

نموونـــــە 1 جیاکردنەوەی نموونەکان بە بەکارهێنانی نەگۆڕی جیاوازییەکان یان ڕێژەکان

نەگۆڕی جیاوازییەکان یان ڕێژەکان بەکاربهێنە بۆ دۆزینەوەی نەخشەی بنەڕەتی گونجاوتر بۆ نواندنی ئەم کۆمەڵە پێدراوانە.

أ درێژی سپرینگەکە پشت بەو بارستاییە دەبەستێت کە پێوەی هەڵواسراوە

بارستایی (kg)	4	5	6	7	8	9	10
درێژی (cm)	30.6	32	33.4	34.8	36.2	37.6	39

سەرنجبدە جیاوازی نێوان هەردوو بەهای هاوسێ بۆ بارستاییەکە نەگۆڕە. ساغبکەوە ئەگەر جیاوازی نێوان هەردوو بەهای هاوسێ بۆ درێژی نەگۆڕە.

درێژی (cm)	30.6	32	33.4	34.8	36.2	37.6	39
جیاوازییەکانی یەکەم	1.4	1.4	1.4	1.4	1.4	1.4	

لەبەرئەوەی جیاوازی یەکەم نەگۆڕە ئەوا نەخشەی هێڵی گونجاوترە بۆ نواندنی پێدراوەکانی خشتەکە.

ب **تەمەنی دار بە تیرەکەی دیاری دەکرێت.**

تیرەکەی (cm)	1.6	3.6	6.4	10.0	14.4	19.6	25.6
تەمەن (ساڵ)	2	3	4	5	6	7	8

سەرنجبدە جیاوازی نێوان هەردوو بەهای هاوسێ لە خشتەکەدا بۆ تەمەن نەگۆڕە.
ساغبکەوە ئەگەر جیاوازی نێوان دوو بەهای تەنیشت بۆ تیرە نەگۆڕ بێت.

تیرەکەی (cm)	1.6	3.6	6.4	10.0	14.4	19.6	25.6

جیاوازییەکانی یەکەم 2.0 2.8 3.6 4.4 5.2 6.0

جیاوازییەکانی دووەم 0.8 0.8 0.8 0.8 0.8

لەبەرئەوەی جیاوازییەکانی دووەم بۆ گۆڕاوی ئازاد x نەگۆڕن، کە بە بەهاکانی گۆڕاوی بەستراو y وە بەستراوە لەدووریدا یەکسانن.

ئەوا نەخشەی ڕەگی دووجا گونجاوترین نموونەیە بۆ نواندنی ئەم پێدراوانە پاسەدان خاڵەکانی خشتەکە ئەوە دەردەخەن گونجاوترین نەخشە بریتییە لە $f(x)=\sqrt{x}$

ج **قەبارەی بڕی ئاوی ماوە پاش بەهەڵمبوون بەکات دیاریدەکرێت.**

کات (کاتژمێر)	1	2	3	4	5	6
قەبارە (mL)	512	384	288	216	162	121.5

لەبەرئەوەی جیاوازییەکانی نێوان دوو بەهای هاوسێ لەخشتەکەدا بۆ کات نەگۆڕە. تۆش ئەوە پاسەدان بکە جیاوازییەکانی نێوان دوو بەهای هاوسێ بۆ قەبارە نەگۆڕە.

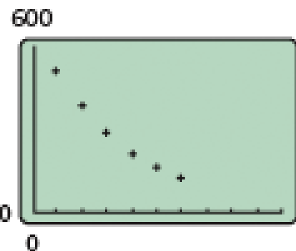
قەبارە (mL)	512	384	288	216	162	121.5

جیاوازییەکانی یەکەم −128 −96 −72 −54 −40.5

جیاوازییەکانی دووەم 32 24 18 13.5

جیاوازییەکانی یەکەم نەگۆڕ نییە. هەروەها جیاوازییەکانی دووەم. ساغبکەوە ئایا ڕێژەی هەر بەهایەك لە قەبارە بۆ بەهای پێش خۆی نەگۆڕە یان نا.

$\frac{384}{512}=0.75$ $\frac{288}{384}=0.75$ $\frac{216}{288}=0.75$ $\frac{162}{216}=0.75$ $\frac{121.5}{162}=0.75$



لەبەرئەوەی ڕێژەی هەربەهایەکی قەبارە بۆ بەهای پێش خۆی نەگۆڕە. ئەوا نەخشەی توانی گونجاوترە بۆ نواندنی پێدراوەکانی خشتەکە.

ساغبکەوە لەم خاڵە ڕوونکردنەوەییانەدا دیارە کە پێدراوەکانی خشتەکە دەنوێنێت کە نەخشەی گونجاو بۆ نواندنی ئەم پێدراوانە بریتییە لە نەخشەی کەمبووە توانی (دالة تراجع أسّي)



1. **نەگۆڕی جیاوازییەکان یان ڕێژەکان بەکاربهێنە بۆ دۆزینەوەی نەخشەی بنەڕەتی گونجاو کە کۆمەڵە پێدراوەکان بنوێنێت.**

أ

x	12	48	108	192	300
y	10	20	30	40	50

ب

x	21	22	23	24
y	243	324	432	576

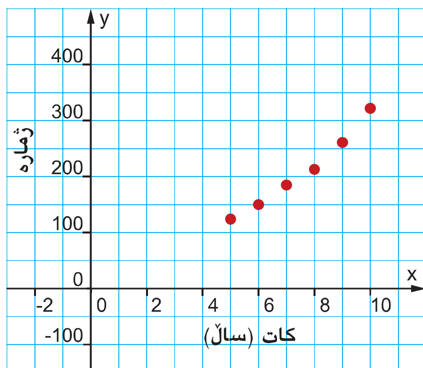
دەگمەنە جیاوازی نێوان پێدراوە ڕاستییەکان یان ڕێژەکەیان نەگۆڕبێت بەواتای بیرکارییانە، بەڵام دەتوانیت جیاوازییەکان یان ڕێژەکانیان شیبکەیتەوە بۆ ئەوەی بزانیت نزیکە لەوەی ببێتە نەگۆڕ. هەروەها دەتوانیت پێدراوە ڕاستییەکان بەخاڵی ڕوونکردنەوەیی بنوێنێت، جۆری نەخشەی گونجاو بۆ نواندنی بناسیتەوە پاشان فەرمانی لێژبوونەوە Regression لە بژمێری ڕونکردنەوەیی بەکاربهێنە بۆ دۆزینەوەی ئەو نەخشەی پێدراوەکان بە باشترین شێوە دەنوێنێت.

نموونـــــە 2 جێبەجێکردن لەسەر پارێزگاریکردنی ڕەگەز



یەکێك لە زانایەکانی بواری ئاژەڵ پێدراوەکانی لەسەر پەرەپێدانی ژمارەیەك لە گامێشی بوفالو کۆکردوە لە گەڵە گامێشێك کە لە کێڵگەیەکی سروشتی بەرەڵاکرابوون نەخشەیەك بنووسە ئەم کۆمەڵە پێدراوانە بنوێنێت.

کات (ساڵ)	5	6	7	8	9	10
ژمارە	124	150	185	213	261	322



هەنگاوی 1 خاڵی ڕوونکردنەوەیی دروستبکە کە پێدراوەکانی ناو خشتەکە بنوێنێت خاڵە ڕوونکردنەوەییەکان دەریدەخات کە شێوەیەکی دووجا یان شێوەیەکی توانی هەیە

هەنگاوی 2 لە جیاوازییەکان بکۆڵەوە.

ژمارە	124	150	185	213	261	322
جیاوازی یەکەم	26	35	28	48	61	
جیاوازی دووەم	9	−7	20	13		

وادیارە نە جیاوازییەکانی یەکەم و نە جیاوازییەکانی دووەم نەگۆڕنییە.

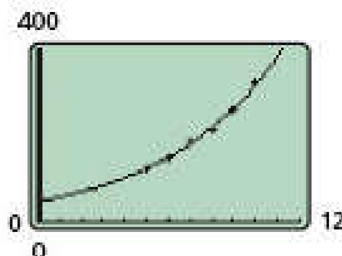
هەنگاوی 3 لە ڕێژەکان بکۆڵەوە.

$\frac{150}{124}=1.210$ $\frac{185}{150}=1.233$ $\frac{213}{185}=1.151$ $\frac{261}{213}=1.225$ $\frac{322}{261}=1.234$

هەموو ڕێژەکان نزیکە لە 1.2 ، ئەمەش هانمان دەدات لەدوای نموونەیەکی توانی بگەڕێین.

هەنگاوی 4 بژمێری ڕوونکردنەوەیی بەکاربهێنە بۆ دۆزینەوەی نموونەی توانی





نەخشەی توانی $f(x)=48.581(1.207^x)$ ڕێسایەکە بۆ پێدراوەکانی خشتەکە.

یارمەتی

بۆئەوەی هاوکۆلکەی پەیوەستی r لە شاشەکە دەرکەوێ دوگمەی CATALOG 2nd پاشان 0 دابگرە پاشان **Diagnostic On** هەڵبژێرە.



2. نەخشەیەك بنوسە پێدراوەکانی خشتەی خوارەوە بنوێنێت.

x	12	14	16	18	20	22	24
y	110	141	176	215	258	305	356

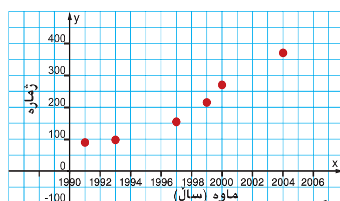
کاتێك پێدراوەکان ڕیزنەکرابن یان جیاوازی نێوانیان نەگۆڕنەبێت. پێویستە چەند نموونەیەك تاقیبکەیتەوە بۆ دۆزینەوەی ئەوەی باشتر پێدراوەکان دەنوێنێت. لە بژمێری ڕونکردنەوەییدا بەهایەك دەردەکەوێت پێیدەوترێت هاوکۆلکەی دیاریکردن «معامل التحديد» بە r^2 هێما کراوە یان هێمای R^2 بۆ دانراوە. هەتاکو هاوکۆلکەکە لە 1 نزیکبێتەوە، ئەوا نموونەی باشترین نواندنی کۆمەڵە پێدراوەکان.

نموونە 3 جێبەجێکردن لەسەر کردارەکانی بانك

ساڵ	ژمارەی ئامێر
1999	90
1993	98
1997	159
1999	227
2000	270
2004	370

لە ژێر بەکارهێناندایە

لە پێدراوەکانی بەرامبەرت ژمارەکانی ئامێری پارەپێدان (صراف الالي) لە یەکێك لە وڵاتەکان ساڵ بەدوای ساڵ پیشاندەدات. نەخشەیەك بنووسە ئەم کۆمەڵە پێدراوانە بنوێنێت بە پشتبەستن بە ساڵی 1990 ساڵی سفر بێت.



لەبەرئەوەی جیاوازییەکانی بەهای گۆڕاوی ئازاد نەگۆڕنییە و هەروەها جیاوازییەکانی بەهای گۆڕاوی پەیوەست نەگۆڕنییە، ئەوا ناتوانیت لێکۆڵینەوەی جیاوازییەکان بکەیت. خاڵی ڕوونکردنەوەیی دروستبکە بۆ نواندنی پێدراوەکان بە پشتبەستن بە 1990 بە ساڵی سفرە. لە خاڵە ڕونکردنەوەییەکانەوە دەردەکەوێت کە شێوەیەکی دووجا یان سێجا و یان توانی هەیە. بژمێری ڕوونکردنەوەیی بەکاربهێنە بۆ ئەنجامدانی گەڕانەوەی هەر جۆرێك.

QuadReg
y=ax²+bx+c
a=1.013528963
b=7.485785061
c=73.78780488
R²=.9852725622

CubicReg
y=ax³+bx²+cx+d
a=-.2039388224
b=5.76094085
c=-22.13219416
d=110.0729981
R²=.9960739431

ExpReg
y=a*b^x
a=75.09459234
b=1.124887799
r²=.9796795196
r=.9897876134

بەراوردبکە لەنێوان بەهاکانی r^2. دیارە نموونەی سێجا باشترینە. دەتوانیت ئەم نەخشە بەکاربهێنیت.

$$f(x)=0.2x^3+5.44x^2-22.13x+110.07$$

نموونەیەکە بۆ دیاریکردنی ژمارەی ئامێرەکان بەپێی ساڵەکانی پاش ساڵی 1990

خاڵی چاودێری

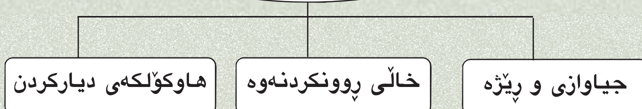
3. ئەو نەخشە بنووسە کە پێدراوەکانی ئەم نەخشەی خوارەوە دەنوێنێت.

x	11	14	25	31	40	50
y	245	302	480	557	645	705

بیربکەوە و تاوتوێبکە

1. بۆچی بەکارهێنانی جیاوازییەکان و ڕێژەکان لەکاتی ئیش کردن بە پێدراوە راستیەکان بەسنووردار دادەنرێن.
2. ڕێکخەرە ئەم خشتەی خوارەوە دروستبکە و تەواویکە. ڕوونیبکەوە چۆن هەر ڕێگایەك یارمەتیت دەدات نموونەی گونجاو بۆ نواندنی پێدراوەکان دیاریبکەیت.

فێربە و سەرنج بدە



4-5 ڕاهێنانەکان

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

بڕوانە نموونە 1

جیاوازییەکان و ڕێژەکان بەکاربهێنە بۆ دۆزینەوەی ئەو نەخشە بنەڕەتییەی کە باشترین نموونە بۆ ناوندنی پێدراوەکان پێکدەهێنێت

1

x	y
6	69.6
13	51.4
20	33.2
27	15
34	−3.2
41	−21.4

2

x	y
11	2
47	6
99	10
167	14
251	18
351	22

3

x	y
0	125
1	150
2	180
3	216
4	259.2
5	311.04

بڕوانە نموونە 2

4 خشتەی خوارەوە ڕوونیدەکاتەوە کە بڕی ماوە ماددەی ئایۆدین – 131 بەگرام پاش t ڕۆژ لەدەستکردن بە تاقیکردنەوە.

کات t بەڕۆژەکان	0	1	2	3	4	5	6
بڕکە m بەگرام	1000	917.40	841.62	772.10	708.33	649.82	596.14

أ نەخشەیەك بنووسە پێدراوەکانی خشتەکە بنوێنێت.

ب نەخشەکە بەکاربهێنە بۆ دۆزینەوەی ژمارەی ڕۆژەکان بۆ ئەوەی بڕی ئایۆدینی – 131 ماوە لە 50 g کەمترە.

بڕوانە نموونە 3

5 لەم خشتەی خوارەوە ژمارەی باسکیلەکان لە شوێنی فرۆشتنی پاسکیل لە بیست و چوار مانگی پێشوو دەردەکەوێت.

کات t بەمانگەکان	0	4	9	12	15	20	24
ژمارە	62	54	45	48	55	53	60

أ نەخشەیەك بنووسە پێدراوەکانی خشتەکە بنوێنێت.

ب نەخشەکە بەکاربهێنە بۆ دۆزینەوەی ژمارەی پاسکیلەکان لە مانگی شەشەم.

ج ئایا ئامۆژگاری خاوەن دوکانەکە دەکەیت پشت بەم نەخشەیە ببەستێت بۆ پێشبینی کردنی ژمارەی پاسکیلەکانی ناو دوکانەکە پاش ساڵێك لە ئیستاوە؟

ڕاهێنان و شیکارکردنی پرسیارەکان

ڕاهێنانی ئازاد	
شیکارکردنی ڕاهێنان	تەماشای نموونەکە
8-6	1
9	2
10	3

جیاوازییەکان و ڕێژەکان بەکاربهێنە بۆدیاریکردنی نەخشەی بنەڕەتی کە باشترین نموونە بۆ پێدراوەکان پێکدەهێنێت.

6

x	y
1	380
3	343
5	310
7	279
9	252
11	228

7

x	y
2	97
8	202
14	253
20	250
26	193
32	82

8

x	y
4	4
9	6
16	8
25	10
36	12

9 **كشتوكاڵ** یەكێك لە جوتیارەكان تاقیكردنەوەیەكی ئەنجامدا لەسەر بڕی ئەو پەینەی پێویستە لە دۆنمە زەویەكدا بكرێت، بۆ دەستكەوتنی باشترین بەرهەم بۆ ئەم مەبەستە چەند كێڵگەیەكی بەكارهێنا، ئەنجامی تاقیكردنەوەكەی لەم خشتەی خوارەوە تۆماركرد، نەخشەیەك بنووسە پێدراوەكانی ناو خشتەكە بنوێنێت.

بڕی پەین بۆیەك دۆنم (kg)	45	70	90	115	125	135	150
بڕی بەرهەم بۆیەك دۆنم (ڕبە)	29	60	70	88	84	86	76

10 **زیندەزانی** ئەم خشتەی خوارەوە ژمارەی خەمڵێنراوی جۆرێك لە بەكتریای (إبریشیا كولی) لە دەفرێكی تاقیكردنەوەدا دەنوێنێت پاش 6 خولەك لە دەستپێكردن بە تاقیكردنەوە.

كات t بەخولەك	0	10	20	30	40	50	60
ژمارەی بەكتریاكان	300	423	596	842	1188	1686	2354

أ ڕێسایەك بنووسە كە ژمارەی بەكتریاكان بەپێی كات بنوێنێت. باشترین نواندن بێت.

ب ڕێسایەكە بۆ دۆزینەوەی ژمارەی بەكتریاكان پاش 3 كاتژمێر بەكاربهێنە.

ج چەند كاتی دەوێت بۆئەوەی ژمارەی بەكتریاكان 3 ئەوەندەی ژمارەی سەرەتاكەی لێبێت؟

11 **موڵكایەتی** ئەم خشتەیە نرخەكانی ژمارەیەك خانووی فرۆشراو بەپێی ڕووبەرەكەی دەنوێنێت

ڕووبەر (m^2)	248	109	138	233	227	276
نرخ (ملیۆن دینار)	179	125.9	136.75	172.5	169.9	187



أ ڕێسایەك بۆ هەژماركردنی نرخی خانوو بەپێی ڕووبەرەكەی بدۆزەوە. (ڕووبەر وەك گۆڕاوی ئازاد بەكاربهێنە)

ب ڕێسایەكە بەكاربهێنە بۆ دۆزینەوەی ڕووبەری نزیكراوەی خانوویەك نرخەكەی 175 ملیۆن دینار بێت.

ج ئایا باوەڕدەكەیت وەڵامەكەت بۆ لقی (ب) ورد بێت؟ ئەمە ڕوونبكەوە.

12 **ئابووری** یەكێك لە زانایانی ئابوری لێكۆڵینەوەیەكی لەسەر ناوەندی كرێی ڕۆژانەی تاكەكانی كۆمەڵە كرێكارێكی كەرتی تایبەت كرد، بەپێی تەمەن ئەنجامدا پێدراوەكانی بەم شێوەی خوارەوە تۆماركرد.

تەمەن (ساڵ)	18	28	38	48	58	68
ناوەندی كرێ (دینار)	17 480	30 650	37 440	41 230	37 570	21 390

أ نموونەیەكی گونجاو بۆ نواندنی پێدراوەكانی خشتەكە بدۆزەوە.

ب نموونەیەك بەكاربهێنە بۆ دۆزینەوەی ناوەندی كرێی ڕۆژانەی كرێكارێك لەم چەشنە، تەمەنی 43 ساڵ بێت.

13 **تەندروستی** ئەم خشتەی خوارەوە تەمەنی ژنان لە یەكێك لە كۆمەڵگاكان دەنوێنێت كاتێك یەكەم منداڵیان دەبێت.

ساڵ	1980	1985	1990	1995	2000
ناوەندی تەمەنی ژن كاتێك منداڵی یەكەمی دەبێت	22.7	23.7	24.2	24.5	24.9

أ ساڵی 1980 بە ساڵی سفر دابنێ بژمێری ڕوونكردنەوەیی بەكاربهێنە بۆ دۆزینەوەی نموونەیەكی دووجا و یەكێكیتر سێجا بۆ نواندنی پێدراوەكانی خشتەكە.

ب هەردوو نموونەكە بەكاربێنە بۆ خەملاندنی تەمەنی یەكەم منداڵبوونی ژن لەم كۆمەڵگایەدا لە ساڵی 2010 بخەمڵێنێت.

ج كام خەملاندن بەلای تۆ لە ڕاست نزیكە؟ ئەمە ڕونبكەوە.

دەروازەیەك

مێژووی بیركاری



زانای بیركاری فرەنسی لۆجندەر Legendre (1752 – 1833) لە ساڵی 1806 ڕێڕەوی یەكێك لە كلكدارەكانی دۆزییەوە، بەڕێگای وێنە كێشانی چەماوەیەك بەنزیكترین شوێن لە توانادا بێت بڕوات، لە هەندێك لەو شوێنانەی كلكدارەكەی تێدابینراوە.

14 ئەم خشتەیە خوارەوە قەبارەی هەوای گەرم v لە باڵۆن بەپێی پلەی گەرمی بەرگە هەوا t دەنوێنێت.

پلەی گەرمی	37	41	44	47
قەبارە (m^3)	850	934	1027	1130

أ نەخشەیەکی توانی بدۆزەوە پێدراوەکانی خشتەکە بنوێنێت.

ب نەخشەیەك بۆ دیاریکردنی قەبارەی هەوای گەرم لەناو باڵۆنەکە بەکاربهێنە ئەگەر پلەی گەرمی بەرگەهەوا $42^\circ C$ بێت.

ج ئایا نەخشەکە گونجاو دەبێت کاتێك پلەی گەرمی لە 47 پلە زیاتربێت؟ هۆیەکەی بڵێ.

15 **کشتوکاڵ** ئەم خشتەی خوارەوە ژمارەی کێڵگەکان لە یەکێك لە وڵاتە گەورەکان و ناوەندە ڕوبەری کێڵگە کە لەسەدەی بیستەم دەنوێنێت.

ساڵ	1910	1930	1950	1969	1987	1997
ژمارەی کێڵگەکان	6.4	6.3	5.4	2.7	2.1	1.9
ناوەندە ڕووبەر (دۆنم)	139	157	216	390	462	487

أ ژمارەی کێڵگەکان وەك گۆڕاوی ئازاد بەکاربێنە بۆ دۆزینەوەی نەخشەیەك بۆ ناوەندە ڕووبەری کێڵگەکە

ب نەخشەکە بەکاربهێنە بۆ خەملاندنی ناوەندە ڕووبەری کێڵگەکە. کاتێك ژمارەی کێڵگەکان دەگاتە 1 ملیۆن

ج نەخشەکە بەکاربێنە بۆ خەملاندنی ناوەندە ڕووبەری کێڵگەکە. کاتێ ژمارەی کێڵگەکان دەبێتە4.5 ملیۆن

16 **بازاڕی دراو** ساڵی 1990 کۆمپانیای هەڵۆی پیشەسازی دامەزرا. ئەم خشتەی خوارەوە هەندێك لە نرخی پشکی (سهم) ئەم کۆمپانیایە دەنوێنێت.

ساڵ	1991	1994	1997	2000	2003
نرخی پشك بە دینار	79 410	96 410	107 260	132 440	151 190

أ نەخشەیەك بۆ نواندنی پێدراوەکانی خشتەکە بدۆزەوە.

ب ڕێژەی سەدی نرخی بەرزبوونەی پشکی کۆمپانیای هەڵۆ لە ساڵێکدا چەندە؟

ج ئەگەر پشکی کۆمپانیای هەڵۆ لە ساڵی 2004 ، 155 520 دینار بێت. ئایا ئەم نرخە دەگونجێت لەگەڵ ئەو نرخەی نەخشەکە دیاردەکات؟ ئەمە ڕوونبکەوە.

د نەخشەکە کە بۆ خەملاندنی ئەو ساڵەی نرخی پشکی کۆمپانیای هەڵۆ دەگاتە 200 000 بەکاربهێنە.

ﻫ بەهۆی هەڵئاوسان ساڵی 1991 ئەوەی نرخی یەك دیناربوو 1.34بەرز بوو ساڵی 2003 بەراورد بکە لەنێوان بەرزبونەوەی نرخی پشکی کۆمپانیای هەڵۆ و ڕێژەی هەڵئاوسان.

17 **زیندەزانی** ئەم خشتەی خوارەوە ژمارەی جۆرەکانی خشۆکە، لەهەندێك لە دوورگەکانی کاریبی و ڕووبەری ئەو دوورگانە بە میل دووجایە.

ژمارە	11	16	53	45	108	100
ڕووبەر	5	32	3 435	4 244	29 371	44 218



أ نموونەیەك بۆ نواندنی پێدراوەکانی خشتەکە بدۆزەوە، دوای ئەوەی ژمارە بەگۆڕاوی سەربەست دابنرێت

ب هەمان نموونە بەکاربهێنە بۆ خەملاندنی ڕووبەری دوورگەیەك کە 75 جۆر خشۆکی تێدابێت.

ج وردی خەملاندنەکە لە لقی (ب)دا چۆن دەبینیت؟ ئەمە ڕوونبکەوە.

18 **بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە** هەندێك جار وادەردەکەوێت نەخشەی دووجا باشترە لە نەخشەی هێڵی بۆ پێدراوەکان، دەربارەی هاوکۆلکەی a لەڕێسا دووجاکەدا چی دەڵێیت؟

19 **بنووسە** وا دابنێ ڕێسایەکی گونجاوت دۆزییەوە پێدراوەکانی دوو گۆڕاو بنوێنێت. ئایا گەیشتیتە ئەو ئەنجامەی کە پەیوەندییەکی هۆکاری باش هەیە لەنێوان دوو گۆڕاوەکە؟ پشتگیری وەڵامەکەت بەنموونە بکە.

ئامادەکردن بۆ تاقیکردنەوە

20 کام لەمانەی خوارەوە لەسەر پێدراوەکانی خشتەی بەرامبەر جێبەجێ دەبێت؟

x	y
3	2
4	23
5	50
6	93
7	122
8	167

(أ) جیاوازییەکانی یەکەم بۆ گۆڕاوی بەستراو نەگۆڕە.

(ب) جیاوازییەکانی دووەم بۆ گۆڕاوی بەستراو نەگۆڕە.

(ج) ڕێژەی بەهای گۆڕاوی پەیوەست نەگۆڕە

(د) ڕێژەی گۆڕاوی ئازاد نەگۆڕە

21 بەهای n چەندە کە ڕێگە بەنواندنی پێدراوەکانی خشتەی بەرامبەر بە ڕێسایەکی توانی ورد دەبێت؟

x	5	6	7
y	16	28	n

(أ) 40 (ج) 45

(ب) 49 (د) 52

22 بەهای n چەندە کە ڕێگە بەنواندنی پێدراوەکانی خشتەی بەرامبەر بە ڕێسایەکی دووجای ورد دەبێت؟

x	5	6	7	8
y	12	32	58	n

(أ) 60 (ج) 80

(ب) 70 (د) 90

بەرەنگاری و فراوانکردن

23 نەخشەی $p(t)=\dfrac{a}{1+be^{-kt}}$ پێی دەوترێت نەخشەی بازاڕی (دالة السوق) لەو بارانەی تێیدا خۆراك یان ڕووبەری زەوی لە بەرامبەر گەشەی کۆمەڵەکان ڕێگرە. دەتوانیت نەخشەی $F(t)=\dfrac{4000}{1+5.7e^{-0.2t}}$ بەکاربهێنیت بۆ دیاریکردنی ژمارەی ماسییەکان لە کێڵگەیەکی بەخێوکردنی ماسی بەپێی ژمارەی ئەو مانگانەی بەسەرچاندنی هێلکە ماسییەکاندا تێدەپەڕێت، کاتێك t ژمارەی مانگەکان بێت.

أ ژمارەی ماسیەکانی ناوکێڵگە کە پاش 10 مانگ لە چاندنی بخەمڵێنە.

ب بۆئەوەی ژمارەی ماسییەکان بگاتە 3000 ماسی چەند مانگ دەخایەنێت؟

ج زۆرترین ژمارەی ماسییەکانی کێڵگەکە بدۆزەوە، ئەگەر نەخشەکە گونجاوبێت بۆ بەکارهێنان.

24 **بژمێری ڕوونکردنەوەیی** دەتوانیت جۆرێکی تر لە شێوەکانی لێژبوونەوە، بە بەکارهێنانی بژمێری ڕوونکردنەوەیی بدۆزیتەوە، ئەویش لێژبوونەوەی هێزە Power Regression. فەرمانی PwrReg لە بژمێری ڕوونکردنەوەییدا بەکاربهێنە بۆ دۆزینەوەی نموونەی هێز کە پێدراوەکانی خشتەی بەرامبەر بنوێنێت.

x	1	24	41	74
y	1	4.9	6.4	8.6

پێداچوونەوەی لوولپێچی

هەر سستەمێك لەم لاسەنگانە بەشێوەی ڕوونكردنەوەیی بنوێنە (وانەی 3-2)

25 $\begin{cases} y \geq 3x+1 \\ y \leq x-3 \end{cases}$

26 $\begin{cases} y \geq x-8 \\ y \leq -\frac{4}{3}x+\frac{1}{3} \end{cases}$

27 $\begin{cases} y \leq 5x \\ y \geq x+2 \end{cases}$

28 **كار** نەخشەی $p(x) = -x^3 + 12x^2 - 12x - 80$ ڕێسایەكە، قازانجی یەكێك لە كۆمپانیاكانی بە ملیۆنەها دینار پێ هەژماردەكرێت، كاتێك x ژمارەی یەكە بەرهەمهێنراوەكان بێت (پۆلەكانی پێشوو)

أ سفرەكانی ئەم نەخشەیە بدۆزەوە.

ب كام لە سفرەكانی نەخشەكە ژمارەی یەكە بەرهەمهێنراوەكان دەنوێنێت، كە وا لە كۆمپانیاكە بكات لە زەرەرەوە بۆ قازانج بچێت.

ئاوێتەكردنی نەخشەكان بەكاربهێنە بۆ بڕیاردان لەسەرئەوەی نەخشەی g پێچەوانەی نەخشەی f دەبێت. (وانەی 5-4)

29 $f(x) = x^2 + 1$ ؛ $g(x) = \sqrt{x} + 1$

30 $f(x) = -4 + 5x$ ؛ $g(x) = \frac{1}{5}x + \frac{4}{5}$

بەشی 5

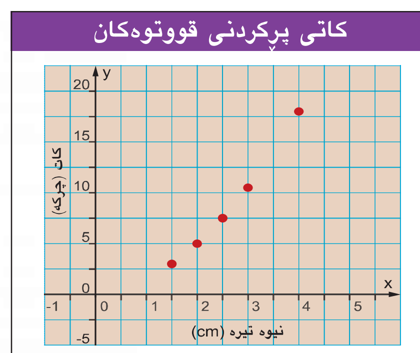
ڕێبەری خوێندن: پێداچوونەوە

1 سەرۆکی شارەوانی پاش بارینی بەفرێکی زۆر گرنگی بە پاککردنەوەی شەقامەکان دەدات. ئەم خشتە تێچوونی پاککردنەوە ڕووبەری جیاوازی شەقامەکان دەنوێنێت. وێنەی ڕوونکردنەوەیی بەکاربهێنە و هاوکێشەیەک بنووسە بۆ هەژمارکردنی تێچوونی پاککردنەوەی شەقامێك درێژییەکەی 2400 m بێت.

درێژی شەقام بەمەتر	تێچوون بەدینار
300	6950
600	8900
900	10 850
1200	12 800

2 یانەی ڕۆشنبیری سلێمانی نەخشە دادەڕێژێت ئاهەنگی ڕێزلێنان بۆ دامەزرێنەرانی ئەنجام بدات ڕێکخەری ئاهەنگەکە بڕیاریدا بۆ میوانەکان بە 4 دەفر پێشکەش بکات و هەریەکەیان 30 پارچە شیرینی تێدابوو، دوای ئەوە 4 پارچە شیرینی بۆ هەر میوانێك زیادکرا، خشتەیەك دروستبکە و وێنەی ڕوونکردنەوەیی بکێشە و هاوکێشەیەك بۆ نواندنی ئەم بارە بنووسە ژمارەی میوانەکان بە گۆڕاوی ئازاد دابنێ.

3 ئەم خاڵە ڕوونکردنەوەییانە پێدراوەکانی کاتی پێویست بۆ پڕکردنی ژمارەیەك قووتو لوولەکی بەپێی نیوە تیرەی بنکەکە بوێنێت.



أ خشتەیەك دروستبکە و هاوکێشەیەك بنووسە پێدراوەکان بنوێنێت.

ب ئەو هاوکێشەی پێشوو بۆ خەملاندنی کات بەکاربهێنە، کە پێویستە بۆ پڕکردنی قووتویەك نیوە تیرەی بنکەکەی $12cm$ بێت.

4 بەهای نەخشەکە بدۆزەوە $f(x)=\begin{cases}5x+2 & x\le 1\\ x^2-6 & x>1\end{cases}$ کاتێك $x=-2$ و $x=5$

5 وێنەی ڕوونکردنەوەی ئەم نەخشە بکێشە.

$$f(x)=\begin{cases}2x+4 & x<-2\\ -3x+2 & x\ge -2\end{cases}$$

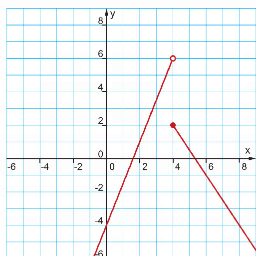
6 بەهای نەخشەکە بدۆزەوە $f(x)=\begin{cases}\sqrt{5x+9} & x\ge 4\\ 9-7x & x<4\end{cases}$ کاتێك $x=-6$ و $x=10$

وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشەکە بکێشە.

7 $f(x)=\begin{cases}2x-4 & x<0\\ 5 & x\ge 0\end{cases}$

8 $f(x)=\begin{cases}\frac{3}{2}x-1 & x\le 2\\ \sqrt{x+2} & x>2\end{cases}$

9 نەخشەیەکی پەلدار بۆئەم ڕوونکردنەوە بنووسە.



10 کۆمپانیایەکی پۆست و گواستنەوە 6000 دینار بۆهەر نێرراوێك وەردەگرێت کە بارستایی لە 8 kg زیاتر نەبێت، و بۆهەر کیلۆگرامێکی زیادە 1500 دینار وەردەگرێت. نەخشەیەکی پەلدار بنووسە بۆ ئەو پارەی وەریدگرێت بۆ نێرراوێك بارستایی لە 18 kg زیاتر نەبێت.

11 $g(x)$ نەخشەی پەیدابوو لە جیگۆرکێی نەخشەی $f(x)=\begin{cases}2x-2 & x\le 3\\ -4x+16 & x>3\end{cases}$ بە ڕاکێشانی دوو یەکە بۆلای چەپ. هاوکێشەی نەخشەی $g(x)$ بنووسە.

12 نەخشەی $h(x)$ بنووسە کە پەیدابووە لە ڕاکێشانی $f(x)=\begin{cases}2x-2 & x\le 3\\ -4x+16 & x>3\end{cases}$ دوو یەکە بۆ سەرەوە

13 نەخشەی $g(x)$ بنووسە پەیدابووە لە ڕاکێشانی $f(x)=\begin{cases}3x+2 & x\le 0\\ x^2 & x>0\end{cases}$ 7 یەکە بۆ لای ڕاست.

14 وێنەی ڕوونکردنەوەیی $g(x)=f\left(\frac{1}{2}x\right)+1$ بکێشە ئەگەر بزانیت $f(x)=2x^2+1$

15 $\left(\frac{g}{f}\right)(x)$ بدۆزەوە، ئەگەر زانیت $f(x)=x+3$ و $g(x)=x^2-9$

16 $\left(\frac{g}{f}\right)(x)$ بدۆزەوە، ئەگەر زانیت $f(x)=x+6$ و $g(x)=\frac{18}{x+4}$ بواری $\left(\frac{g}{f}\right)(x)$ دیاریبکە.

نەخشەیەك بنووسە کاتێك $f(x)=x^2-5x-14$ ، $g(x)=x-7$

17 $(f+g)(x)$

18 $(f-g)(x)$

19 $(g-f)(x)$

20 $(f\,g)(x)$

21 $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$

22 $\left(\frac{g}{f}\right)(x)$

هەریەکە لەمانەی خوارەوە بدۆزەوە ئەگەر زانیت $f(x)=x-2$ و $g(x)=\frac{8}{x+1}$

23 $f(g(-2))$ وَ $g(f(-2))$

24 $f(g(1))$ وَ $g(f(1))$

25 $g(f(x))$ و بوارەکەی

26 $f(g(x))$ و بوارەکەی

27 یەکێك لە کۆمپانیاکانی فڕۆکەوانی بڕیاری زیادکردنی 30 000 دیناریدا، بۆنرخی هەربلیتێك بە لەبەرچاوگرتنی بەرزبوونەوەی نرخی سووتەمەنییەکان لەسەر کۆمپانیاکە پێویستە 9% باجی فڕۆکەخانە بخاتە سەر نرخی بلیتەکە، نەخشەیەکی ئاوێتە بنووسە، نرخی نوێ بۆ بلیتێك بنوێنێت، کاتێك نرخەکەی x دینار بێت، پێش ئەوەی نرخی سووتەمەنی و باج زیادبکرێت.

28 ئەم خشتەیە زیادبوونی نرخی بلیتی چوونە ژورەوەی باخچەی ئاژەڵان و پەیوەندی لەگەڵساڵانی پێشوو لە دامەزراندنیەوە دەنوێنێت. لە جیاوازییەکان و ڕێژەکان بکۆڵەوە بۆ دیاریکردنی کام پەیوەندی گونجاوترە بۆ نواندنی پێدراوەکانی خشتەکە. بژمێرە ڕوونکردنەوەیی بۆ دۆزینەوەی پەیوەندییەکە بەکاربهێنە.

نرخی بلیتی باخچەی ئاژەڵان	
ژمارەی ساڵەکان	نرخ (بەدینار)
1	9500
2	10 250
3	11 100
4	12 000
5	12 920

29 ئەم خشتەیە بەکارهێنانی ئاو بۆ دانیشتوانی یەکێك لە شارەکان بەپێی پلەی گەرمی نیشان دەدات.

پلەی گەرمی (سەدی)	بەکارهێنانی ئاو (m^3)
12	269 899
15	297 912
18	328 952
21	363 110
24	401 122
27	442 893

أ پەیوەندییەك بدۆزەوە ئەم پێدراوانە بەنزیکەیی بنوێنێت

ب پەیوەندییەکە بۆ خەملاندنی بەکارهێنانی ئاو بەکاربهێنە، کاتێك پلەی گەرمی $30\ ^\circ C$ بێت.

ج ئەگەر بەکارهێنانی ئاو لە یەکێك لە ڕۆژەکاندا $189\ 270\ m^3$ بێت، پلەی گەرمی لەو ڕۆژەدا چەندە؟

بەشی 5

تاقیکردنەوەی بەش

1 ژیار لە یەکێك لە سوپەر مارکێتەکاندا بە فرۆشیار دامەزرا، مانگی 300 000 دینار وەردەگرێت، و 3% کۆی ئەو شتانەی دەیفرۆشێت دەخرێتە سەر مانگانەکەی، ئەوەی ژیار وەریدەگرێت بە خشتە و وێنەی روونکردنەوەیی و هاوکێشە بنوێنە، ئەگەر بزانیت فرۆشراوەکانی لەنێوان 0 و 10 000 000 دینار بێت

2 زانا لەسەر تاشە بەردێکی بەرز ڕاوەستابوو، بەشەق لە بەردێکی هەڵدا بۆ خوارەوە. ئەم خشتە بێدراوەکانی بەرزی بەردەکە پاش چەند چرکەیەك لە هەڵدانی دەنوێنێت.

أ وێنەی روونکردنەوەیی و هاوکێشەکەی دروستبکە، بەرزی بەردەکە بەپێی کات وەك گۆڕاوێکی ئازاد بنوێنێت.

ب بەرزی گاشەبەردەکە چەندە؟

ج بەرزی بەردەکە پاش 10 چرکە چەندە؟

د پاش چەند چرکە بەردەکە بەرزەوی دەکەوێت؟

کات (s)	بەرزی (m)
1	615.1
2	600.4
3	575.9
4	541.6
5	497.5
6	443.6

وێنەی روونکردنەوەیی نەخشەکە بکێشە.

3 $f(x)=\begin{cases}-x-3 & x<1\\ 2x-6 & x\geq 1\end{cases}$

4 $f(x)=\begin{cases}5 & x<-2\\ -x^2-4x & x\geq -2\end{cases}$

بە زانینی $f(x)$ وێنەی روونکردنەوەیی $g(x)$ بکێشە.

5 $f(x)=2x-4$ و $g(x)=-\frac{1}{2}f(x)-1$

6 $f(x)=x^2-2$ و $g(x)=-f(x+2)$

هەر نەخشەیەك یان بەهایەك بدۆزەوە، ئەگەر بزانیت کە $f(x)=4x^2-9$ و $g(x)=2x+3$

7 $(f-g)(4)$

8 $g(f(3))$

9 $(fg)(5)$

10 $\left(\frac{g}{f}\right)(x)$

11 زێرینگەرێك 10% باجی هەر پارچە خشڵێك دەدات، وەك باجی زامنکردن و نرخی 150%ی تێچوونی گشتی دەیفرۆشێت. نەخشەیەکی ئاوێتە بنووسە نرخی تێچوونی بنەڕەتی بە c دینار بنوێنێت.

12 ئەم خشتەی خوارەوە پێدراوەکانی نرخی ژمارەیەك لە خانوو دوورییەکانیان لە ناوەڕاستی شارەوە دەنوێنێت.

أ نەخشەیەك بدۆزەوە پەیوەندییەك بێت بۆ لێکۆڵینەوەی نرخی خانوو p بە پێی دووری d لە ناوەڕاستی شار بنوێنێت.

ب ئەو نەخشەی دۆزیتەوە بەکاریبهێنە بۆ خەمڵاندنی تێکڕای نرخی خانوویەك، کە 20 km لە ناوەڕاستی شارەوە دوورە.

نرخی خانووەکان	
دووری لە ناوەڕاستی شار (km)	تێکڕای نرخ (دینار)
2	118 496 000
4	109 016 000
6	100 295 000
8	92 271 000
10	84 890 000
12	78 098 000

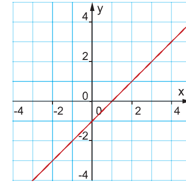
بەشی 5

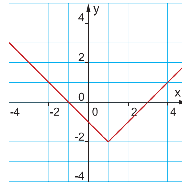


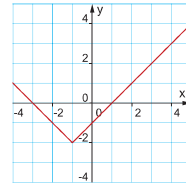
تاقیکردنەوەی کەڵەکەبوو

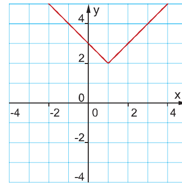
هەڵبژاردن لە زۆر

1 کام ڕوونکردنەوە نەخشە $f(x)=|x+1|-2$ دەنوێنێت

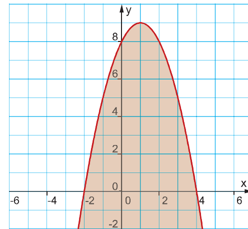
أ


ج


ب


د


2 کام وێنە ڕوونکردنەوەییە بۆ کام نەخشە یان لاسەنگە لەمانەی خوارەوە باشترین نواندنە



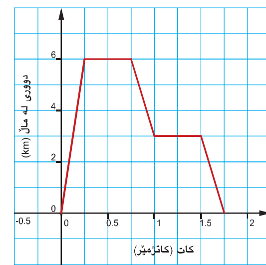
أ $y=x^2+2x+8$

ب $y=-x^2+2x+8$

ج $y\le x^2+2x+8$

د $y\le -x^2+2x+8$

3 ئەم وینە ڕوونکردنەوەییە بۆ کام لەمانەی خوارەوە باشترین نواندنە.



أ شێرکۆ بەسواری پاسکیل تا گەیشتە کتێبخانە 6 km ی بڕی، کاتژمێرێکی لە کتێبخانە بەسەر برد، پاشان بۆ ماڵ گەڕایەوە.

ب شێرکۆ بە سواری پاسکیل تا گەیشتە کتێبخانە 6 km بڕی، نیو کاتژمێر لە کتێبخانە مایەوە، پاش ئەوە بۆ دوکانی فرۆشتنی کاسێتی ڤیدیۆ چوو و نیو کاتژمێری پێچوو، پاش ئەوە بۆ ماڵ گەڕایەوە.

ج شێرکۆ بە سواری پاسکیل تا گەیشتە کتێبخانە 3 kmی بڕی، لەوێ نیوکاتژمێری خایاند، پاش ئەوە 3 km بڕی بۆ چوونی بۆ دوکانی فرۆشتنی کاسێتی ڤیدیۆ، دوای ئەوە گەڕایەوە ماڵ.

د شێرکۆ بە سواری پاسکیل تا گەیشتە کتێبخانە 6 kmی بڕی، لەوێ نیوکاتژمێری خایاند، پاش ئەوە 3 km ی بڕی بۆ چوونی بۆ دوکانی فرۆشتنی کاسێتی ڤیدیۆ لەوێ کاتژمێرێکی خایاند.

4 بەهای $f(x)=\begin{cases} x^2+4x-8 & x<-1 \\ x^3-x^2+5 & x\ge -1 \end{cases}$ چەندە؟ کاتێك $x=-1$

أ -13 ب -11 ج 3 د 5

5 کام لەمانە کۆمەڵە شیکاری $\sqrt{2x-4}=x-6$ ـە؟

أ $\{10\}$ ج $\{2, 20\}$

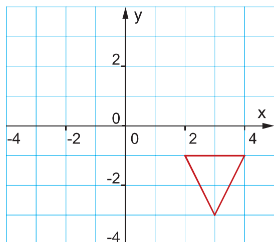
ب $\{4, 10\}$ د $\{2, 12\}$

6 کام لەمانە بریتییە لە نەخشەی $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ کاتێك $f(x)=2x^2-7x-30$ و $g(x)=x-6$ ؟

أ $2x-5$ ج $\frac{(2x-5)(x+6)}{x-6}$

ب $2x+5$ د $\frac{(2x-10)(9x+3)}{x-6}$

7 کام جێگۆڕکێ لەمانە وێنەیە بۆ سێگۆشەیەك یەکێك لە سەرەکانی $(-2, 1)$ بێت؟



أ وێنەدانەوە بەدەوری تەوەری یەکەم

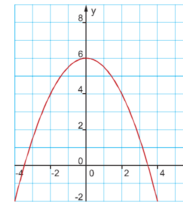
ب وێنەدانەوە بەدەوری تەوەری دووەم

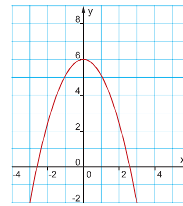
ج ڕاکێشانی 3 یەکە بۆلای چەپ، 3 یەکە بۆ سەرەوە.

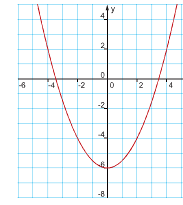
د خولانەوە بەدەوری خاڵی بنەڕت بە گۆشەی 180°

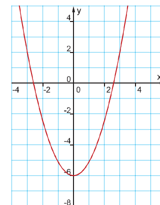
8 كام لەمانە هێڵكاری ڕوونكردنەوەی نەخشەی

$f(x)=-\frac{1}{2}x^2+6$

أ


ج


ب


د


كورتە وەڵام

9 بەهای بڕی $\log_4 256^3$ چەندە؟

10 بەهای c لە $4(5i-2)+3=2(10i+c)-7$ چەندە؟

11 بەهای بدۆزەوە كاتێك $x=5$

$$\left(\frac{x^2+5x-36}{2x^2-10x+8}\right)\left(\frac{x^2+x-2}{x^2+11x+18}\right)$$

كورتە وەڵام

12 $f(x)=x^2+1$

أ پێچەوانەی نەخشەكە بدۆزەوە.

ب وێنەی ڕوونكردنەوەیی $f(x)=x^2+1$ و پێچەوانەكەی بكێشە.

ج ڕوونبكەوە ئایا پێچەوانەی نەخشەكە، نەخشەیە یان نا.

13 ئەم خاڵانە بەكاربهێنە $(0, 6)$، $(2, 2)$ ، $(5, 11)$.

أ نەخشەیەكی دووجا بنووسە كە ڕونكردنەوەكەی بەو سێ خاڵەدا بڕوات.

ب بەشێوەی جەبری ساغبكەوە كە ڕوونكردنەوەیی نەخشەی نووسیوتە بەهەریەكە لەو خاڵانەدا دەڕوات.

ج وێنەی ڕوونكردنەوەیی نەخشەكە بكێشە.

د $f(7)$ و $f(-7)$ بدۆزەوە.

14 $f(x)=x^2-4$

أ دوو جیگۆڕكێ بدۆزەوە، نەخشەكە دەگۆڕن بە شێوەیەك سەری نەخشەی $(1, 4)$ دابێت.

ب دوو جیگۆڕكێ بدۆزەوە نەخشەكە دەگۆڕن بە شێوەیەك وێنەی ڕوونكردنەوەی نەخشەی پەیدابوو بە $(0, 2)$ و $(-4, 2)$ دا دەڕوات.

درێژە وەڵام

15 ئاوات تانكی ئۆتۆمبیلەكەی بەسوتەمەنی پڕكرد بۆ گەشتێك ڕۆیشت. ئەم خشتە پێدراوەكانی بڕی سوتەمەنی ماوە لە تانكی ئۆتۆمبیلەكە بەپێی ئەو ماوەی ئۆتۆمبیلەكە دەیبڕێت دەردەخات.

دووری (بەمیل)	0	50	100	150	200
بڕی سوتەمەنی (بەگالۆن)	10	8	6	4	2

أ نەگۆڕی جیاوازییەكان یان ڕێژەكان بەكاربهێنە بۆ دۆزینەوەی نەخشەی بنەڕەتی، بڕی سوتەمەنی ماوە لە تانكی ئۆتۆمبیلەكەدا.

ب نموونەیەكی بیركای بنووسە كە پێدراوەكانی خشتەكە بنوێنێت.

ج دوای بڕینی 75 میل چەند گالۆن سوتەمەنی پێ ماوە؟

د ئایا ئۆتۆمبیلەكە دەتوانێت 300 میل بڕوات بەبێ وەرگرتنی سوتەمەنی نوێ؟

هـ پێچەوانەی نەخشەكە بدۆزەوە. ڕونیبكەوە چی دەنوێنێت.

بەشی

6

یەکبەدوای یەکەکان و زنجیرەکان
Sequences and Series

بەشی شەشەم

وانەکان

لاکێشەی زێرین

یەکبەدوای یەکی فیبوناتشی پەیوەندی بە ئەندازە و هونەر و تەلارسازییەوە هەیە ئەو پەیوەندییانە بە بەکارهێنانی لاکێشە زێرینەکان دۆزرایەوە.

ئایا تۆ ئامادەیت؟

زاراوەکان

زاراوەکە بەو پێناسەیەی لەلای چەپەوە هاتووە ببەستەوە.

1 نەخشەی توانی

2 نەخشە

3 نەخشەی هێڵی

4 نەخشەی دووجا

أ پەیوەندی نێوان دوو گۆڕاوە بە جۆرێك هەر بەهایەك لە گۆڕاوی یەکەم بەرامبەر تاکە بەهایەکی گۆڕاوی دووەمە.

ب نەخشەیەکە روونکردنەوەکەی ڕاستەهێڵە.

ج نەخشەیەکە ڕێسایەکەی ڕێژەی دوو ڕادەییە.

د نەخشەیەکە هاوکێشەکەی بریتییە $f(x)=ax^2+bx+c$ کاتێك $a\neq 0$

هـ نەخشەیەکە هاوکێشەکەی بریتییە لە $f(x)=ab^x$ و $a\neq 0$ و $b\neq 1$ و $b>0$

نووسینی برە ڕەگەکییەکان بەسادەترین شێوە.

برەکە بەسادەترین شێوە بنووسە.

5 $\sqrt{25}\times\sqrt{36}$ **6** $\sqrt{121}-\sqrt{81}$ **7** $\sqrt{\frac{1}{49}}$ **8** $\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{64}}$

هەژمارکردنی هێزەکان

بەهای هەر برێك هەژماربکە.

9 $(-3)^3$ **10** $(-5)^4$ **11** $1-(-2^3)^3$ **12** $\frac{2^2\times 2^7}{(2^2)^5}$

شیکارکردنی هاوکێشە بەپێی گۆڕاوێك

x بەپێی گۆڕاوەکانی تر هەژماربکە.

13 $y=12x-5$ **14** $y=-\frac{x}{3}+1$ **15** $y=-9+x^2$ **16** $y=-4(x^2-9)$

هەژمارکردنی بەهای برەکان

بەهای برەکە هەژماربکە کاتێك $x=2$ و $y=12$ و $z=24$

17 $\frac{y(y+1)}{3x}$ **18** $z+(y-1)x$ **19** $y\left(\frac{x+z}{2}\right)$ **20** $z\left(\frac{1-y}{1-x}\right)$

دژە نموونەکان

دژە نموونەیەك بدۆزەوە کە ناڕاستی دەستەواژەکە پیشان بدات.

21 $n^2=n$ کاتێك n ژمارەیەکی ڕاستییە.

22 $n^3\geq n^2\geq n$، n ژمارەیەکی ڕاستییە.

23 $\frac{1}{n}>\frac{1}{n^2}$ کاتێك n ژمارەیەکی ڕاستییە.

24 $\frac{2}{n}\neq\frac{n}{2}$ کاتێك n ژمارەیەکی ڕاستییە.

بەشی 6
ڕێبەری خوێندن: تێڕوانین لەسەر بەشەکە

لە ڕابردوودا

خوێندووتە

- کۆمەڵەکانی ژمارەکان لەوانە ژمارە سروشتییەکان و ژمارە دووجاکان.
- بەکارهێنانی شێوازەکانی جیاوازی و ڕێژە بۆ پۆلێنکردنی پێدراوەکان.
- کێشانی وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشە هێڵییەکان و نەخشە توانییەکان و هەژمارکردنی بەهایەکانیان.

لەم بەشەدا

لەمەودوا فێردەبیت

- چەند شێوازێك لە ژمارەکان کە پێیان دەوترێت یەکبەدوای یەکەکان و سەرجەمەکانیان و پێیان دەگوترێت زنجیرەکان.
- جیاکردنەوەی یەکبەدوای یەك کە ژمارەییە یان ئەندازەییە.
- چۆنیەتی نووسین و هەژمارکردنی بەهایەکانی یەکبەدوای یەکەکان و زنجیرەکان.

لە داهاتوودا

دەتوانیت کارامەییەکانی ئەم بەشە بەکاربێنیت

- لە قۆناغی بەرزتردا و لەکاتی خوێندنی جیاکاری و تەواوکارییدا.
- لە وانەکانی فیزیا. بۆ دۆزینەوەی ڕێسای وەك بەرزبوونەوە یەکبەدوای یەکەکانی تۆپێك کە بەر زەوی دەکەوێت.
- لەژیانی ڕۆژانەدا بۆ هەژمارکردنی بەکارخستنی گەشەی دارایی.

زاراوەکان — *Vocabulary*

زاراوەکان	Vocabulary
یەکبەدوای یەکەکان	Sequence (Progressions)
یەکبەدوای یەکی لێکنزیکبوو	Convergent sequence
یەکبەدوای یەکی لێك دوورکەوتوو	Divergent sequence
پێناسەی ڕاگەیناراو	Explicit definition
یەکبەدوای یەکی دوا هاتوو	Finite sequence
یەکبەدوای یەکی دوا نەهاتوو	Infinite sequence
دووبارەبوونەوە	Iteration
ئامانج	Limit
پێناسەی نادیار	Recursive definition
زنجیرە	Series
ڕادەی زنجیرەکە	Term of a sequence

ڕۆشنایییەك لەسەر زاراوەکان

بۆئەوەی لەگەڵ زاراوەکانی ئەم بەشەدا ڕابێی. ئەم هەنگاوانەی خوارەوە پەیرەو بکە:

1. لە ژیانی ڕۆژانەتدا وشەی **یەکبەدوای یەك** چی دەگەیەنێت؟ یەکبەدوای یەکی ژمارەیی چی دەگەیەنێت؟

2. وشەی دوا هاتوو مانای کۆتایی بوون دەگەیەنێت. چەند نموونەیەك بهێنەوە وشەی **دوا هاتووی** تێدا بەکارهاتبێت. یەکبەدوای یەکی دوا هاتوو چ مانایەك دەبەخشێت ڕونبیکەوە.

3. پاڵپشت بەمانای وشەی کۆتایی چەند نموونەیەك بێنەوە لە ڕستەدا کە وشەی دوانەهاتوو تێدا بەکارهاتبێت. ئەوەندەی لەتوانادایە **یەکبەدوای یەکی دوا نەهاتوو** ڕوونبکاتەوە.

4. وشەی زنجیرە لە تەلەفزیۆندا چی دەگەیەنێت؟ هەروەها وشەی **زنجیرە** لە بیرکاریدا چی دەگەیەنێت؟

5. ڕادە لە ڕادەدارەکاندا چی دەگەیەنێت پاشان باسی **ڕادەی یەکبەدوای یەك** بکە.

بەشی
6



بیرکاری
بە خوێندنەوە و نووسین



ستراتیژی خوێندنەوە: بەڵگەیەکی باوەڕپێکراو بەکاربهێنە

بۆئەوەی بتوانیت بەڵگەیەکی باوەڕپێکراو بنووسی پەیوەندی بە چەمکێك لە چەمکەکانی بیرکارییەوە هەبێت، واتە تۆ باش لەوە تێگەیشتوویت کە باسی دەکەیت. دەتوانیت بۆ نووسین ئەم بەڵگەیە ڕێگایەك لە چوار هەنگاو پێکهاتبێت بەکاربێنیت بۆ نووسینی ئەم بەڵگەیە. هەروەك لە شیکارکردنی نموونەکەی خوارەوەدا ڕوونکراوەتەوە.

لە کتێبی پۆلی دەیەمەوە

بنووسە جیاوازی نێوان ئەگەری تیۆری و ئەگەری پراکتیکی ڕوونبکەوە، نموونەیەك بینەوە کە تێیدا جیاوازبن.

هەنگاوی 1 ئامانجەکە دیاربیکە

ئامانج ڕوونکردنەوەی جیاوازییە لەنێوان ئەگەری تیۆری و ئەگەری پراکتیکیدا.

هەنگاوی 2 ڕستەیەك بنووسە پاسادانی ئامانجەکە بکات

ئەگەری تیۆری پشت بەبیرکاری دەبەستێت بەڵام پراکتیکی پشت بە ئەنجامی تاقیکردنەوە دەبەستێت

هەنگاوی 3 نموونە بهێنەوە پاڵپشتی وەڵامەکەت بکات

کاتێك پارچە پارەیەکی کانزایی هەڵدەدەیت ئەگەری دەستکەوتنی خەت دەکاتە $\frac{\text{ژمارەی ئەو جارانەی پاسادانی ڕووداوەکە دەکەن}}{\text{ژمارەی هەموو ئەنجامەکان}}$ واتە $\frac{1}{2}$

بەڵام ئەگەری پراکتیکی بۆ دەستکەوتنی خەت دەکاتە $\frac{\text{ژمارەی ئەو جارانەی خەتی تێدا دەرکەوتووە}}{\text{ژمارەی ئەو جارانەی پارچە پارەکەی تێداهەڵدراوە}}$

ئەگەر تەنها یەکجار پارەیەکمان هەڵدا ئەوا شێر یان خەتمان دەستدەکەوێت. ئەگەری پراکتیکی بۆ دەستکەوتنی خەت دەکاتە 1 (کاتێك خەتمان دەستدەکەوێت) یان 0 (کاتێك شێرمان دەستدەکەوێت)، بەڵام ئەگەری تیۆری بۆ دەستکەوتنی خەت هەر $\frac{1}{2}$ دەمێنێتەوە.

هەنگاوی 4 بەڵگەکەت پوختەبکە

لەبەرئەوەی ئەگەری تیۆری تەنها پشت بە ژمارەی ئەنجامە تیۆرییەکان دەبەستێت. بۆیە هەرگیز ناگۆڕێت. بەڵام ئەگەری پراکتیکی پشت بە ئەنجامە تاقیکردنەوەییەکان دەبەستێت. ئەوەش وای لێدەکات لەهەر هەڵدانێکدا بگۆڕێت.

هەوڵبدە

بۆ وەڵامدانەوەی ئەم دوو پرسیارە چوار هەنگاوەکان بەکاربهێنە.

1. بەردە زارێك 20 جار هەڵدرا و ژمارە 3 دووجار دەرکەوت. دەبێت بەلایەنی کەمەوە چەندجار زارەکە هەڵبدرێت بۆئەوەی ئەگەری تیۆری و پراکتیکی یەکسانبن لە ڕووداوی دەستکەوتنی ژمارە 3 دا؟ ڕوونیبکەوە چۆن گەیشتیتە ئەو وەڵامە.

2. باوکی هۆشیار دەیەوێت کوڕەکەی بۆ خوێندنگایەکی نوێ ببات، 9 خوێندنگای دیاریکرد تا سەردانیان بکات بڕیاریدا لە هەفتەی داهاتوودا سەردانی 3 یان 4 خوێندنگا بکات. ژمارەی ڕێگاکانی سەردانی 4 خوێندنگاکە. چەندی زیاترە لە ژمارەی ڕێگاکانی سەردانی 3 خوێندنگاکە. وەڵامەکەت ڕوونبکەوە.

1-6 یەکبەدواییەکەکان و زنجیرەکان
Sequences and Series



کێ ئەمە بەکاردەهێنێت؟

یەکبەدوای یەکەکان بۆ دانانی ئەو نموونانەی ئامانجیان خوێندنی زۆربەی ڕووداوە سروشتییەکانە بەکاردێت. وەك گۆڕان لە ژمارەی کۆمەڵێك کەروێشك بە تێپەڕبوونی کات.

ئامانجەکان

ڕادەی n لەیەکبەدوای یەکدا دەدۆزێتەوە.

- ڕێسای یەکبەدوای یەك دەنووسێت.
- سەرجەم دەدۆزێتەوەو دەنووسێت بەبەکارهێنانی هێمای بەیەکتربەستن (التجمیع)

زاراوەکان
Vocabulary

یەکبەدوای یەك (متتالیة) Sequence

ڕادەی یەکبەدوای یەك Term of a sequence

یەکبەدوای یەکی دوانەهاتوو Infinite sequence

یەکبەدوای یەکی دوا هاتوو Finite sequence

پێناسەی دیار Explicit definition

دووبارەبوونەوە Iteration

پێناسەی نادیار Recursive definition

زنجیرە Series

بەشە سەرجەمی partid sum

هێمای بەیەکبەستن Summation Symbol

زانای بیرکاری ئیتاڵی لیۆناردۆ فیبۆناتشی ساڵی1201 ز، ئەو زاوزێ خێرایەی لە ژمارەیەك کەروێشکدا کە لە بارێکی نموونەییدا دەژیان باسکرد. فیبۆناتشی ژمارەی جووتە کەروێشکەکانی مانگ بە مانگ تۆمارکرد. بۆی دەرکەوت ئەو ژمارانە پەیڕەوی شێوازێك دەکەن لەدواییدا بە **یەکبەدوای یەکی فیبۆناتشی** ناونرا.

یەکبەدواییەکە Sequence کۆمەڵە ژمارەیەکی ڕیزکراوە، هەریەکە لەو ژمارانە **ڕادەیەکە Term** لە ڕادەکانی یەکبەدوای یەکەکە. دەگونجێت یەکبەدوای یەکەکە **دوا نەهاتوو Infinite** بێت، واتە لە ژمارەیەکی دوا نەهاتوو ڕادە پێکبێت، هەروەك یەکبەدوای یەکی ژمارە سروشتییەکان. یان **یەکبەدوای یەکی دوا هاتوو Finite sequence** بێت، واتە لە ژمارەیەکی کۆتایی هاتوو ڕادە پێکبێت وەك 4، 3، 2، 1 . ئەمەش ئەوە دەردەخات کە یەکبەدوای یەك نەخشەیەکە بوارەکەی ژمارە سروشتییە یەك لەدوای یەکەکانە. و مەوداکەی بریتییە لە کۆمەڵەی ئەو ژمارانەی ڕادەکان پێکدەهێنێت.

بیرکاری زانەکان a_n لەجیاتی نووسینی شێوە نەخشەیی $a(n)$ بەکاردێنن ژمارەی سروشتی n پێی دەوترێت خانەی ڕادەکە، ڕادەی یەکەم بریتییە لە a_1 ڕادەی دووەم بریتییە لە a_2 بەڵام ئەو ڕادەیەی خانەکەی n بێت بریتییە لە a_n (ڕادەی nی **nth term**). لەبەرئەوەی یەکبەدوای یەك نەخشەیەکە بۆیە هەرخانەیەکی n بەرامبەر تەنها ڕادەیەکە بریتییە لە a_n .

بوار	5	4	3	2	1	n	خانەی ڕادەکە
مەودا	5	3	2	1	1	a_n	ڕادەکە

لە یەکبەدوای یەکی فیبۆناتشیدا، هەریەکە لە ڕادەی یەکەم و دووەم یەکسانە بە 1 بەڵام هەر ڕادەیەك لە ڕادەکانی تر یەکسانە بەکۆی ئەو دوو ڕادەیەی کە ڕاستەوخۆ پێش ئەو هاتوون بە واتایەکی تر $a_1=1$ ،$a_2=1$ ،$a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$ کاتێك $n\geq 3$. بەم جۆرە پێناسەیە دەوترێت **پێناسەی نادیار Recursive definition** لە پێناسەی نادیاردا ڕادەیەك یان چەند ڕادەیەکی پێشوو بۆ دروستکردنی ڕادەیەکی دوای ئەو بەکاردێت.

نموونــــە 1 دۆزینەوەی ڕادەکانی یەکبەدوای یەك بەبەکارهێنانی نەخشەی نادیار. (شاراوە)

پێنج ڕادەی یەکەمی ئەو یەکبەدوای یەکە بدۆزەوە کە بەپێناسەی نادیار ناسێنراوە $a_1=5$ ،$a_n=2a_{n-1}+1$

ڕادەی یەکەم دراوە

بۆ دۆزینەوەی a_2 بەهای a_1 دابنێوە، بەهەمان شێوە بەردەوام بە لەدانانی بەهای هەر ڕادەیەك بۆ دۆزینەوەی ڕادەی دوای خۆی.

n	$2a_{n-1}+1$	a_n
1	دراو	5
2	$2(5)+1$	11
3	$2(11)+1$	23
4	$2(23)+1$	47
5	$2(47)+1$	95

واتە پێنج ڕادەی یەکەمی یەکبەدوای یەکەکە بریتین لە 5, 11, 23, 47, 95



1. پێنج ڕادەی یەکەمی ئەم یەکبەدوای یەکانە بدۆزەوە.

أ $a_1=-5$ ، $a_n=a_{n-1}-8$ ب $a_1=2$ ، $a_n=-3a_{n-1}$

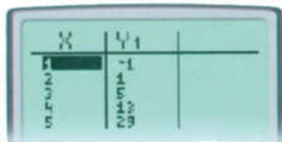
دەتوانیت پێناسەی هەندێك یەكبەدوای یەك بە **پێناسەیەكی دیار Explicit definition**
پێناسە بكەیت. بە جۆرێك كە دەتوانیت بەهای هەر ڕادەیەك بە زانینی خانەكەی بدۆزیتەوە.

نموونە 2 دۆزینەوەی ڕادەكانی یەكبەدوای یەك بەبەكارهێنانی نەخشەی دیار (ئاشكرا)

پێنج ڕادەی یەكەمی ئەو یەكبەدوای یەكە بدۆزەوە كە لە
خوارەوە پێناسەكراوە. $a_n = 2^n - 3$
خشتەیەك دروستبكە و بەهای a_n هەژماربكە بەجۆرێك n بەهاكانی 1 تا
5 وەربگرێت. پێنج ڕادەی یەكەم بریتین لە $-1, 1, 5, 13, 29$

n	$2^n - 3$	a_n
1	$2^1 - 3$	−1
2	$2^2 - 3$	1
3	$2^3 - 3$	5
4	$2^4 - 3$	13
5	$2^5 - 3$	29

پاسادان بكە بژمێری ڕونكردنەوەیی بەكاربێنە، نەخشەی $y = 2^x - 3$
تۆماربكە پاشان خشتەی بەهایەكانی بۆ دروستبكە





2. پێنج ڕادەی یەكەمی ئەم یەكبەدوای یەكانە بدۆزەوە.

أ $a_n = n^2 - 2n - 1$ ب $a_n = 3n - 5$

دەتوانیت زانیارییەكانت بەكاربێنیت بۆ نووسینی پێناسەی یەكبەدواییەك.

نموونە 3 نووسینی پێناسەی یەكبەودای یەك

پێناسەی ڕادەی n ی بۆ هەر یەكبەودای یەكێك بنووسە.

أ 3, 6, 12, 24, 48

جیاوازی نێوان هەر ڕادەیەك و ڕادەكەی پێش خۆی و ڕێژەی هەر ڕادەیەك و ڕادەكەی پێش خۆی بپشكنە.

ڕێژەكان		2	2	2	2
ڕادەكان	3	6	12	24	48
جیاوازی یەكەم		3	6	12	24
جیاوازی دووەم			3	6	12

ڕێژەكان نەگۆڕن، واتە $\frac{a_n}{a_{n-1}} = 2$ یان $a_n = 2a_{n-1}$ یەكبەدوای یەككە یەكبەودای یەكێكی
توانیە. بنچینەكەی دەكاتە 2 . تەماشای شێوازی هێزەكانی ژمارە 2 بكە.

$$a_1 = 3 = 3 \times 2^0 \text{ ، } a_2 = 6 = 3 \times 2^1 \text{ ، } a_3 = 12 = 3 \times 2^2 \ \ldots$$

شێوازی $3(2^{n-1})$ پێناسەیەكی گونجاوە بۆ یەكبەودای یەككە. كەواتە $a_n = 3 \times 2^{n-1}$

ب 2.5, 4, 5.5, 7, 8.5

ڕادەكان	2.5	4	5.5	7	8.5
جیاوازی یەكەم		1.5	1.5	1.5	1.5

لەبەرئەوەی جیاوازییەكانی یەكەم نەگۆڕن، كەواتە یەكبەودای یەككە هێڵییە. ڕادەی یەكەم بریتییە
لە 2.5 هەر ڕادەیەك لە ڕادەكانی بەدوایدا دێت 1.5زیاد دەكات. یاساكە بریتییە لە $a_n = 1.5\ n+1$

لەبیرت بێت

جێگیربوونی جیاوازیەكانی یەكەم. نموونەیەكی هێڵی دەگەیەنێ هەروەها جیاوازیەكانی دووەم نموونەیەكی دووجا دەگەیەنێ هەروەها جێگیربوونی ڕێژەكان نموونەی توانی دەگەیەنێ.



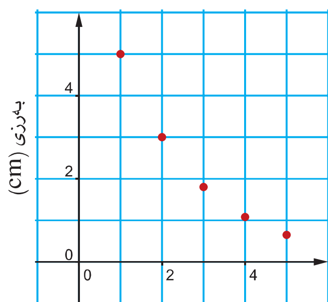
3. پێناسەیەكی گونجاو بۆ ڕادەی n ی بۆهەریەكە لەمانە بنووسە.

أ $7, 5, 3, 1, -1$ ب $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$

نموونـــــه 4 جێبەجێکردن لـەسەر فیزیا

تۆپێك لە بەرزییەکەوە بەردرایە خوارەوە، پاشان تا بەرزایی 155cm بەرزبۆوە. پاشان چەند جارێك تا بەرزایی 60%ی پێش خۆی بەرزدەبێتەوە. بە ڕوونکرنەوەیی یەکبەدوای یەکەکە بنوێنە. باسی شێوازەکەی بکە. لەهەڵبەزینەوەی نۆیەمدا تۆپەکە چەند بەرز دەبێتەوە؟

بەرزبوونەوە لە جاری یەکەم 155 cm بەرزبوونەوە لەهەر جارێکدا دەگاتە 60%ی جاری پێشوو. دەتوانین پێناسەی یەکبەدوای یەکەکە بەم شێوەیە بکەین $a_n = 0.6 \times a_{n-1}$ ، $a_1 = 155$ ئەم پێناسە نوێیە بۆ دۆزینەوەی هەندێك ڕادەی یەکبەدوای یەکەکە بەکاربێنە، پاشان بە ڕوونکردنەوەیی بیاننوێنە.



$$a_2 = 0.6 \times 155 \; = 93$$
$$a_3 = 0.6 \times 93 \; = 55.8$$
$$a_4 = 0.6 \times 55.8 \; = 33.48$$

وا دەردەکەوێت نواندنە ڕونکردنەوەییەکە توانی بێت. شێوازێك بۆ نووسینی پێناسەیەکی گونجاو بۆ یەکبەدوای یەکەکە بەکاربێنە. $a_n = 155 \times 0.6^{n-1}$ کاتێك n ژمارەی جارەکانی بەرزبوونەوەی تۆپەکە بێت. ئەم ڕێسایە بۆ هەژمارکردنی بەرزی تۆپەکە لەجاری نۆیەمدا بەکاربێنە $a_9 = 155 \times 0.6^{9-1} \approx 2.603$ تۆپەکە لەجاری نۆیەمدا 2.6cm بەنزیکەیی بەرز دەبێتەوە.

ئاگاداربە!

بە هێڵ نێوان خاڵەکان مەگەینە لەبەرئەوەی بواری نەخشەکە بەشێکە لە کۆمەڵەی ژمارە سروشتییەکان.



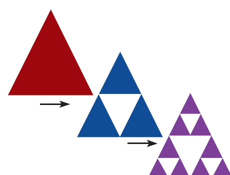
4. دەرماڵە گوڵێك لەهەر جارێکدا پێویستی بە 1.6 گالۆن ئاو هەیە. سەرجەمی ئەو گالۆنە ئاوانەی بۆ ئاودانی دەرماڵە گوڵەکە لەهەر ئاودانێك بەکارهاتووە بە ڕوونکردنەوەیی بنوێنە. باسی ئەو شێوازە بکە کە دەستتکەوتووە، سەرجەمی ئەو گالۆنە ئاوانەی لەپاش 10 جار ئاودان بەکارتهێناوە چەندە؟

فراکتال Fractals وێنەیەکە بە دووبارەبوونەوەی شێوە لێکچووەکانی هاوشێوەی شێوە بنەڕەتییەکە دەستدەکەوێت

نموونـــــه 5 سێگۆشەی سیرپنسکی Sierpinski

سێگۆشەیەکە بریتییە لە فراکتالێك لە سێگۆشەیەکی لایەکسان دەست دەکەوێت، بەبڕینی سێگۆشەیەکی لایەکسان لە ناوەڕاستی سێگۆشەی یەکەم. پاشان ئەمە لەسەر هەر سێگۆشەیەك دووبارەبکەوە. کە دەستت دەکەوێت. ژمارەی سێگۆشەکان لە پێنجەم جاردا چەندە؟

لەهەر دووبارەبوونەوەیەکدا ژمارەی سێگۆشەکان 3 ئەوەندە زیاددەکات هێمای N_n بۆ ژمارەی سێگۆشەکان لەجاری یەکەمدا بەکاربێنە. جاری یەکەم سێگۆشەیەکت هەیە. لە جاری دووەمدا 3 سێگۆشەت دەستت دەکەوێت، و هەروەها ...



$N_1 = 1$ ، $N_2 = 3$ ، $N_3 = 3^2$ دەتوانیت بنووسی $N_n = 3^{n-1}$

کەواتە $N_4 = 3^3 = 27$ ، $N_5 = 3^4 = 81$. لە جاری چوارەمدا ژمارەی سێگۆشەکان 81 سێگۆشە دەبێت.



5. کۆمەڵەی کانتۆر Cantor بریتییە لە شێوەیەکی فراکتال، بەلابردنی سێیەکی ناوەڕاستی پارچەڕاستەهێڵەکە، جێبەجێکردنی ئەم فەرمانە لەسەر هەر پارچە ڕاستەهێڵێکی ئەنجام دەستدەکەوێت. ژمارە ئەو پارچە ڕاستەهێڵانە لەدوای جێبەجیکردنی فەرمانەکە لەجاری پێنجەمدا چەندە؟

بیربکەوە و تاوتوێبکە

1. ڕوونبکەوە جیاوازی نێوان پێناسەی یەکبەدوای یەك بەشێوەی دیار و نادیار.
2. بدۆزەوە 3 ڕادە ئەم یەکبەدوای یەکە تەواوبکات ... 4، 2، 1
3. باسیبکە چۆن یەکبەدوای یەك وەك نەخشە دەبینیت؟ ئایا هەموو یەکبەدوای یەکەکان هەمان بواریان هەیە؟ ئەمە ڕوونبکەوە.
4. ڕێکخەربە وێنەی بەرامبەر دروستبکە و تەواوی بکە ئەوەی لە یەکبەدوای یەکدا فێری بوویت بەکورتی تێیدا بنووسە.

پێناسەی یەکبەدوای یەك	دووجۆری یەکبەدوای یەکەکە
نموونەکان	دوو ڕێسای گونجاوی پێناسە

(یەکبەدوای یەکەکان)



6-1 ڕاهێنانەکان

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

1 **زاراوەکان** پێناسەی ________ یەکبەدوای یەکێك پێناسەیەکە ڕێگا بە دروستبوونی ڕادەی n ی دەدات بە زانینی ڕادەی پێش خۆی یان ڕادەکانی پێش خۆی (نادیار یان دیار).

بڕوانە نموونە 1

پێنج ڕادەی یەکەم بۆهەریەك لەم یەکبەدوای یەکانە بدۆزەوە.

2 $a_n = 4a_{n-1} - 1$ ؛ $a_1 = 1$ **3** $a_n = a_{n-1} + 11$ ؛ $a_1 = 3$ **4** $a_n = \frac{a_{n-1}}{5}$ ؛ $a_1 = 500$

بڕوانە نموونە 2

5 $a_n = 12(n-2)$ **6** $a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ **7** $a_n = -3n^2$

8 $a_n = n(n-1)$ **9** $a_n = 4^{n-1}$ **10** $a_n = (n+1)^2$

بڕوانە نموونە 3

لەهەریەك لەم یەکبەدوای یەکانەدا پێناسەیەکی گونجاو بۆ ڕادەی n بنووسە.

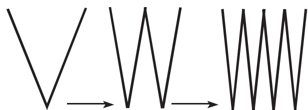
11 $6, 9, 12, 15, 18, \ldots$ **12** $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$ **13** $25, 15, 5, -5, -15, \ldots$

بڕوانە نموونە 4

14 **پاشەکەوت** داهاتی ئاوات لە ساڵی یەکەمدا 25 000 000 دیناربوو، لە ساڵەکانی دواییدا داهاتەکەی بەڕێژەی 5% ی ساڵی پێش خۆی زیاد دەکات. ئەم یەکبەدوای یەکە بە ڕونکردنەوەیی بنوێنە. باسی شێوازەکەی بکە. دوای 5 ساڵ داهاتەکەی چەند دەبێت؟ پاش 10 ساڵ چەند دەبێت؟

بڕوانە نموونە 5

15 **فراکتال** ژمارەی پارچە ڕاستەهێڵەکان لە دوو شێوەی چوارەم و پێنجەمدا چەند دەبێت؟



جێبەجێکردن

ڕاهێنانی ئازاد	
بۆشیکارکردنی پرسیارەکان	تەماشای نموونەبکە
18–16	1
21-19	2
24-22	3
25	4
26	5

پێنج ڕادەی یەکەم بۆهەریەك لەم یەکبەدوای یەکانە بدۆزەوە.

16 $a_n = a_{n-1} - 3$ ؛ $a_1 = 7$ **17** $a_n = \frac{1}{n^2}$ **18** $a_n = 1.5a_{n-1} - 2$ ؛ $a_1 = 4$

19 $a_n = (2)^{n-1} + 8$ **20** $a_n = 2n^2 - 12$ **21** $a_n = -3a_{n-1} - 1$ ؛ $a_1 = -2$

پێناسەیەکی گونجاو بۆ ڕادەی n ی هەریەك لەم یەکبەدوای یەکانە بدۆزەوە.

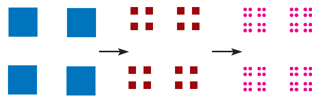
22 2, 8, 18, 32, 50, ...

23 9, 5, 1, −3, −7, ...

24 5, 0.5, 0.05, 0.005, ...

25 **نەخشەکێشان** کورسییەکانی ئەندامانی تیپی ئۆرکسترا لە هۆڵی میوزیکی کلاسیکی لەسەر شێوەی نیوە بازنەیەك ڕێکخرا، بەجۆرێك سەرۆکی ئۆرکستراکە لە چەقەکەیدا وەستابوو، ژمارەی کورسییەکانی ڕیزی یەکەم 16 کورسییە، ژمارەی کورسییەکانی ڕیزەکانی تر 4 کورسی لە ژمارەی کورسییەکانی ڕیزی پێش خۆی زیاتربوو. ئەم یەکبەدوای یەکە بە ڕوونکردنەوەیی بنوێنە، باسی شێوازەکەشی بکە، ژمارەی کورسییەکان لە ڕیزی شەشەم چەندە؟

26 **فراکتال** ژمارەی چوارگۆشەکان لەدوو شێوەی چوارەم و پێنجەمدا بدۆزەوە.



پێنج ڕادەی یەکەم لەهەر یەکبەدوای یەکێکدا بدۆزەوە.

27 $a_n = \frac{1}{2}a_{n-1} + 2$ ، $a_1 = 12$

28 $a_n = \frac{2}{a_{n-1}}$ ، $a_1 = 1$

29 $a_n = -a_{n-1} + 10$ ، $a_1 = -10$

30 $a_n = 2n^2 - 12$

31 $a_n = 8 - \frac{1}{10}n$

32 $a_n = 5(-1)^{n+1} \times 3^{n-1}$

33 **هەڵە لە شیکردنەوە** لە خوارەوە بە دوو شێوە پێنج ڕادەی یەکەمی ئەم یەکبەدوای یەکە نووسراوە $a_1 = 3$ ، $a_n = 2n + 1$ کامیان هەڵەیە، هەڵەکە دیاربکە.

أ: 3, 5, 7, 9, 11

ب: 3, 7, 15, 31, 65

پێناسەیەکی گونجاو بۆ ڕادەی n ی بۆهەریەك لەم یەکبەدوای یەکانە بنووسە. پاشان ڕادەی دەیەمی بدۆزەوە.

34 $16, 4, 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}, ...$

35 $\frac{15}{9}, \frac{14}{9}, \frac{13}{9}, \frac{12}{9}, \frac{11}{9}, ...$

36 −5.0, −2.5, 0, 2.5, 5.0, ...

37 $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, ...$

38 0.04, 0.4, 4, 40, 400, ...

39 24, 21, 16, 9, 0, ...

دەروازەیەك

لەسەر مێژووی بیرکاری

یەکبەدوای یەکی فیبۆناتشی بۆ دەرخستنی ڕێژەی زێڕین بەکاردێت. ڕێژەی هەر ڕادەیەك بۆ ڕادەکەی پێش خۆی لەڕێژەی زێڕینی $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ نزیکدەبێتەوە هەتاخانەی ڕادەکە زیاد بکات.

40 **فیبۆناتشی** بیرت بێتەوە یەکبەدوای یەکی فیبۆناتشی نموونەیەك بوو بۆ توێژینەوە لە ژمارەی جووتە کەروێشکەکان پاش چەند مانگێك. یەکبەدوای یەکەکە بە ژمارە 1 پاشان ژمارە 1 دەستپێدەکات. و هەر ڕادەیەك یەکسانە بە سەرجەمی دوو ڕادەکەی پێش خۆی.

أ دوازدە ڕادەی یەکەمی یەکبەدوای یەکەکە بدۆزەوە.

ب ژمارەی جووتە کەروێشکەکان لەکۆتایی ساڵێکی تەواو چەندە؟

41 **شەترەنج** سەنگەر قارەمانێتیەکی شەترەنجی ڕێکخست بەجۆرێك هەریاریکەرێك یەکجار لەگەڵ هەموو یاریکەرەکان یاری دەکات. خشتەیەکی دروستکرد و بۆی دەرکەوت کە زیادکردنی هەر یاریکەرێکی نوێ دەبێتە هۆی ئەوەی ژمارەی یارییەکان لەیەك یاری زیاتربێت.

پاڵەوانێتی شەترەنج

ژمارەی یاریکەر	ژمارەی گێمەکان
1	0
2	1
3	3
4	6
5	10



أ یەکبەدوای یەکەکە بە ڕوونکردنەوەیی بنوێنە و شێوازەکەی باسبکە، ڕادەکانی دواتر چین؟

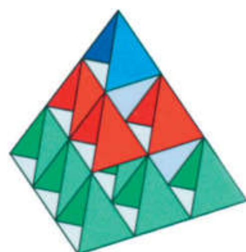
ب لادانی هێڵی بۆ دۆزینەوەی ڕێسایەك بۆئەو یەکبە دوای یەکە بەکاربێنە

ج **چی دەبێت ئەگەر...؟** خشتەکە چۆن دەگۆڕێت ئەگەر هەر یاریکەرێك دووجار لەگەڵ هەریەکێك لەیاریکەرەکانی تر یاریبکات؟ خشتەیەك دروستبکە. ڕوونبکەوە یەکبەدوای یەکەکە چۆن دەگۆڕێت؟

ژمارەی خاڵەکان لەدوو وێنەی خوارەوە، لەهەر یەکبەدوای یەکێکدا بدۆزەوە.

42 **43**





44 تەنی بەرامبەرت لە شێوەیەکی ئەندازەیی پێکدێت، هەریەکەیان لە 6 دنکە شقارتەی درێژی یەکسان دروستکراوە. شێوەیەك لە بەشی سەرەوەدا هەیە و 3 شێوە لە چینی دووەم و 6 شێوە لەچینی سێیەم و هەروەها ...

أ ڕێسای $a_n = a_{n-1} + 6n$ نموونەیەکە بۆ هەژمارکردنی ژمارەی دەنکە شقارتەکان لە چینی n دا. .پێنج ڕادەی یەکەمی یەکبەدوای یەکەکە بدۆزەوە کاتێك $a_1 = 6$.

ب لێژی هێڵی بۆ دۆزینەوەی ڕێسای ئەو یەکبەدوای یەکە بەکاربهێنە.

ج چەند دەنکە شقارتە بۆ دروستکردنی چینی دووەم پێویستە.

45 **ئەندازە** خشتەی خوارەوە کۆی پێوانەی گۆشەکانی ناوەوەی پێنج چەندلا ڕێکەی یەکەم دەنوێنێت

کۆی پێوانەی گۆشەکانی ناوەوە				
900°	720°	540°	360°	180°

أ پێناسەیەکی دیار بۆئەم یەکبەدوای یەکە بنووسە، کۆی پێوانەی گۆشەکانی ناوەوەی چەندلا ڕێکەیەك ژمارەی لایەکانی 12 بێت بدۆزەوە.
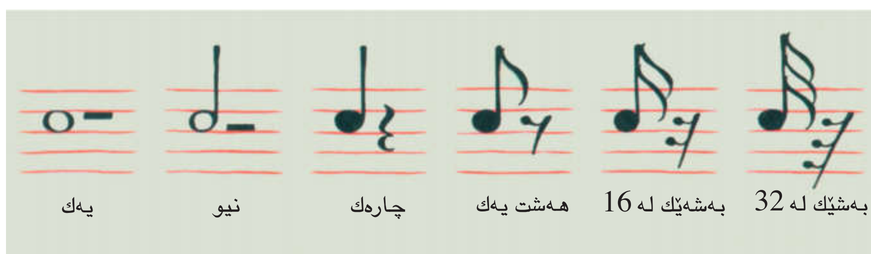
ب لەبیرت بێت گۆشەکانی ناوەوەی چەندلایەکی ڕێك هەمان پێوانەیان هەیە. خشتەیەك دروستبکە پێوانەی گۆشەی ناوەوەی هەرچەندلایەکی ڕێك دیاریبکات. پێدراوەکانی خشتەکە بەوێنەی ڕوونکردنەوەیی بنوێنە، باسی شێوازەکەی بکە.

ج پێناسەیەکی دیار بۆ یەکبەدوای یەکی لقی ب بنووسە.

د پێوانەی گۆشەیەکی ناوەوەی دەلایەکی ڕێك بدۆزەوە.

46 **خەملاندن** بەهای ڕادەی بیستەم لەم یەکبەدوای یەکە دیاریبکە... ,7.94, 8.935, 9.93, 10.925, 11.92

47 **میوزیك** وێنەکەی خوارەوە کاتی نۆتەی میوزیکە جیاوازەکان نیشان دەدات.



أ یەکبەدوای یەکێکی ژمارەیی بنووسە بەرەو پێشچوونی نۆتەی میوزیکەکان نیشانبدات. پێناسەیەکی دیار و یەکێکی نادیار بۆ ئەو یەکبەدوای یەکە بنووسە.

ب نۆتەیەکی تەواو 4 بیتە (Beats) و نیونۆتە 2 بیتە و چارەکە نۆتەیەك 1 بیتە و هەروەها ... یەکبەدوای یەکێك بنووسە. ژمارەی پیتەکانی نۆتەیەك لەدوای یەکەکانی سەرەوە بنوێنێت. پێناسەیەکی نادیار و پێناسەیەکی دیار لەسەر ئەم یەکبەدوای یەکە بنووسە. پەیوەندی نێوان ئەم یەکبەدوای یەکە و یەکبەدوای یەکی لقی أ چییە؟



48 **بنووسە** جیاوازی نێوان یەکبەدوای یەکی دوا هاتوو و دوا نەهاتوو ڕوونبکەوە.



ئامادەکردن بۆ تاقیکردنەوە

49 کام لەمانەی دێت ڕادەی داهاتووی ئەم یەکبەدوای یەکەیە. ... $-9, -6, -3, 0,$

أ) -3 ب) 0 ج) 3 د) 6

50 کام لەمانەی خوارەوە ڕێسای ئەم یەکبەدوای یەکەیە ... $4, 12, 36, 108,$

أ) $a_n = 4 + 3n$

ج) $a_1 = 4$ ؛ $a_n = 3a_{n-1}$ کاتێک $n \geq 2$

ب) $a_n = 3 + 4n$

د) $a_1 = 3$ ؛ $a_n = 4a_{n-1}$ کاتێک $n \geq 2$

51 کام لەم یەکبەدوای یەکانە ڕێساکەی بریتییە لە $a_n = \frac{2n}{n+1}$

أ) $\frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{6}{7}, \frac{8}{9}, \frac{10}{11}, \ldots$

ج) $1, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, \frac{8}{5}, \frac{5}{3}, \ldots$

ب) $0, 1, 2, \frac{3}{2}, \frac{8}{5}, \ldots$

د) $2, \frac{3}{2}, \frac{8}{5}, \frac{5}{3}, \frac{12}{7}, \ldots$

52 کام یەکبەدوای یەکە ڕێساکەی بریتییە لە $a_1 = 6$ ؛ $a_n = 12 - 2a_{n-1}$ کاتێک $n \geq 2$

أ) $6, 4, 2, 0, -2, -4, \ldots$

ج) $0, 12, -12, 36, -60, \ldots$

ب) $6, 0, 12, -12, 36, \ldots$

د) $6, 0, -6, -12, -18, \ldots$

53 **کورتە وەڵام** ڕادەی داهاتوو لەم یەکبەدوای یەکە بدۆزەوە. $-32, 16, -8, 4, -2,$

بەرەنگاری و فراوانکردن

پێناسەی دیار بۆئەم یەکبەدوای یەکانە بنووسە، پاشان ڕادەی دەیەم بدۆزەوە.

54 $-\frac{2}{3}, \frac{5}{3}, 8, \frac{61}{3}, \frac{122}{3}, \ldots$

55 $-2, 6, -12, 20, -30, \ldots$

56 $0.9, 0.8, 0.6, 0.3, -0.1, \ldots$

57 **ئەندازە** 5 بازنە بکێشە، خاڵێك لەسەر بازنەی یەکەم دابنێ و 2 خاڵ لەسەر بازنەی دووەم و 3 خاڵ لەسەر بازنەی سێیەم دابنێ و هەروەها ... پاشان هەموو دوو خاڵێك لە خاڵەکانی بازنەکان بگەیەنە، زۆرترین ناوچەی یەکتر نەبڕیوەکانی هەر بازنەیەك لەخۆ دەگرێت بژمێرە.

أ) ئەو یەکبەدوای یەکە بنووسە. کە دەستتکەوتووە.

ب) وا دەردەکەوێت هەر ڕادەیەك یەکسانە بە دووئەوەندەی ڕادەکەی پێش خۆی بەڵام وا دەردەکەوێت ڕادەی شەشەم لە 32 کەمترە. هەوڵبدە ئەم ناوچانە لەبازنەی شەشەمدا بە وردی دیاریبکەیت بە دروستکردنی وێنەیەکی ڕێکوپێك.

پێداچوونەوەی لوولپێچی

بڕەکە بە سادەترین شێوە بنووسە. وا دابنێ پێناسەکراوە (پۆلەکانی پێشوو)

58 $\frac{x^2-9}{x^2+5x+6}$

59 $\frac{4x^2-5x}{8x^2+18x-35}$

60 $\frac{4x-12}{x^2-25} \div \frac{8x-24}{2x-10}$

61 $\frac{x^2-5x-6}{x^2-3x-18} \times \frac{x^2+x-6}{x^2-x-2}$

کۆبکەوە یان لێدەربکە (پۆلەکانی پێشوو)

62 $\frac{2x-3}{x+1} + \frac{4x-9}{x-1}$

63 $\frac{9x}{8x-4} - \frac{10x+3}{12x-6}$

64 $\frac{x^2}{2x+7} - \frac{x}{x+2}$

65 **وێژە** کرمانج کتێبێك کە 854 لاپەڕەیە بەتیکڕای لاپەڕە و نیوێك لە خولەکێکدا دەخوێنێتەوە خشتەیەك دروستبکە و نەخشەیەك بنووسە ژمارەی ئەو لاپەڕانە بنوێنێت کە ماونەتەوە p بەپێی کات t . وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشەکە بکێشە.



2–6 زنجیرەکان Series

بۆچی ئەمە فێردەبین؟

دەتوانیت سەرجەمەکانی یەکبەدوای یەکەکان بەکاربێنیت بۆ دۆزینەوەی پێوانەکانی خانوویەك لە کارت دروستکرابێت (نموونە 4)

ئامانجەکان

- هەژمارکردنی سەرجەمی یەکبەدوای یەك و نووسینی بە بەکارهێنانی هێمای سەرجەم

زاراوەکان Vocabulary

زنجیرە (متسلسلة) Series

سەرجەمی بەش Partial sum

هێمای کۆکردنەوە Summation symbol

لە وانەی پێشوودا فێری دۆزینەوەی ڕادەی n ی یەکبەدوای یەك بوویت. هەندێك جار دەتوانیت سەرجەمی چەند ڕادەیەك لە یەکبەدوای یەکێکدا هەژماربکەیت بۆ دەربڕینی ئەو سەرجەمە **زنجیرە** **Series** بەکاردێت. خشتەکەی خوارەوە نموونە لەسەر ئەمە پیشان دەدات.

یەکبەدوای یەك	$1, 2, 3, 4$	$2, 4, 6, 8, \ldots$	$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}$
زنجیرە	$1+2+3+4$	$2+4+6+8+\ldots$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}$

لەبەرئەوەی زۆربەی یەکبەدوای یەکەکان ناکۆتان. بە زۆری سەرجەمە بەشییەکان بەکاردەهێنرێت. **سەرجەمی بەشی** هێمای S_n ی بۆ دادەنرێت. بریتییە لە سەرجەمی n ڕادەی یەکەمی یەکبەدوای یەککە

$S_1 = 2$ سەرجەمی ڕادەی یەکەم

$S_2 = 2 + 4 = 6$ سەرجەمی دوو ڕادەی یەکەمین

$S_3 = 2 + 4 + 6 = 12$ سەرجەمی سێ ڕادەی یەکەمین

$S_4 = 2 + 4 + 6 + 8 = 20$ سەرجەمی چوار ڕادەی یەکەمین

دەتوانیت هێمای سەرجەم Σ بۆ دەربڕینی زنجیرە بەم شێوەیە بەکاربێنیت.

$$\sum_{k=1}^{k=5} 2k$$

نموونە 1 بەکارهێنانی هێمای سەرجەم

بە بەکارهێنانی هێمای سەرجەم ئەم زنجیرانە بنووسە.

أ $3 + 6 + 9 + 12 + 15$

پێناسەی دیار بۆ یەکبەدوای یەککە بدۆزەوە $a_k = 3k$ پێناسەی دیار

سەرجەمی پێنج ڕادەی یەکەم بنووسە $\sum_{k=1}^{k=5} 3k$ هێمای سەرجەم بەکاربهێنە

ب $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32} - \frac{1}{64}$

پێناسەی دیار بۆ یەکبەدوای یەککە بدۆزەوە $a_k = (-1)^{k+1}\left(\frac{1}{2}\right)^k$ پێناسەی دیار

سەرجەمی پێنج ڕادەی یەکەم بنووسە $\sum_{k=1}^{k=6} (-1)^{k+1}\left(\frac{1}{2}\right)^k$ هێمای سەرجەم بەکاربهێنە

> **ئاگاداربە!**
> بۆ ئەو یەکبەدوای یەکانەی نیشانەی ڕادەکانی یەکبەدوای یەك دەگۆڕێن $(-1)^{k+1}$ بەکاربێنە ئەگەر نیشانەی a_1 $(+)$ بێت و $(-1)^k$ بەکاربێنە ئەگەر نیشانەی a_1 $(-)$ بێت.

خاڵی چاودێری

1. بە بەکارهێنانی یاسای سەرجەم ئەم زنجیرانە بنووسە.

أ $\frac{2}{4} + \frac{2}{9} + \frac{2}{16} + \frac{2}{25} + \frac{2}{36}$

ب $-2 + 4 - 6 + 8 - 10 + 12$

نموونــــــه 2 هەژمارکردنی بەهای زنجیرەکان

زنجیرەکە بکەوە و بەهاکەی هەژماربکە.

أ $\sum_{k=3}^{k=6} \frac{1}{2^k}$

بە دانانەوەی بەهاکانی k زنجیرەکە بکەوە $\sum_{k=3}^{k=6} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^6}$

هێزەکان هەژماربکە $= \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64}$

سادەبکە $= \frac{8}{64} + \frac{4}{64} + \frac{2}{64} + \frac{1}{64} = \frac{15}{64}$

ب $\sum_{k=1}^{k=4} (10 - k^2)$

بکەوە $\sum_{k=1}^{k=4} (10 - k^2) = (10 - 1^2) + (10 - 2^2) + (10 - 3^2) + (10 - 4^2) = 10$

ئاگاداربە!

هەندێك لە یەکبەدوای یەکەکان بەڕادەی a_k دەستپێدەکات کاتێك $k \neq 1$ هەروەك نموونەی 2 – أ

خاڵی چاودێری

2. زنجیرەکە بکەوە و بەهاکەی هەژماربکە.

أ $\sum_{k=1}^{k=4} (2k - 1)$ ب $\sum_{k=1}^{k=5} -5(2)^{k-1}$

دۆزینەوەی سەرجەمی ژمارەی ڕادەکانی یەکبەدوای یەك هەموو کاتێك ئاسان نییە. بەڵام دەتوانرێت ڕێسایەك بۆ هەژمارکردنی سەرجەمی ڕادەکانی یەکەم لەهەندێك لە یەکبەدوای یەکە تایبەتییەکاندا بدۆزیتەوە. **زنجیرەی نەگۆڕ** زنجیرەیەکە هەموو ڕادەکانی یەکسانن $3+3+3+3+3$

$$\sum_{k=1}^{k=5} 3 = \underbrace{3+3+3+3+3}_{\text{ژمارەی ڕادەکان } 5} = 5 \times 3 = 15$$

سەرجەمی ڕادەکانی یەکەمی زنجیرەی نەگۆڕ بریتییە لە $\sum_{k=1}^{k=n} c = nc$

$$\sum_{k=1}^{k=n} a = \underbrace{c+c+\ldots+c}_{\text{ژمارەی ڕادەکان } n} = c \times n$$

زنجیرەی هێڵی زنجیرەیەکە بۆ ژماردن. وەك سەرجەمی ژمارە سروشتییەکانی یەکەم تا خانەیەکی دیاریکراو. سەرجەمی 10 ژمارەی سروشتی یەکەم (جگەلە سفر) بریتییە لە

$$\sum_{k=1}^{10} k = 1+2+3+4+5+6+7+8+9+10$$

ڕیزکردنی ژمارەکان دووبارەبکەوە.

$$= (1+10)+(2+9)+(3+8)+(4+7)+(5+6)$$
$$= 11+11+11+11+11 = 5 \times 11 = 55$$

سەرنجبدە نیوەی ژمارەی ڕادەکان = 5 و $11 = 1 + 10$ بریتییە لە سەرجەمی ڕادەی یەکەم و دواڕادە. ئەم تێبینیەش وادەکات پێشبینی ئەوە بکەین سەرجەمی ژمارە سروشتییەکان تا خانەی n (جگەلە سفر) بریتییە لە $\sum_{k=1}^{k=n} k = \frac{n}{2}(n+1)$ یان $\sum_{k=1}^{k=n} k = \frac{n(n+1)}{2}$



یاساکانی سەرجەمی هەندێك لە زنجیرەکان

زنجیرەی نەگۆڕ	زنجیرەی هێڵی	زنجیرەی دووجا
$\sum_{k=1}^{k=n} a = na$	$\sum_{k=1}^{k=n} k = \frac{n(n+1)}{2}$	$\sum_{k=1}^{k=n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

نموونـــــه 3 بەکارهێنانی یاساکانی سەرجەمی هەندێك لە زنجیرەکان

بەهای زنجیرەکە هەژماربکە.

أ $\sum_{k=1}^{k=6} 8$ زنجیرەیەکی نەگۆڕە

ڕێگای یەکەم یاسای سەرجەم بەکاربێنە، زنجیرەکە 6 ڕادەی تێدایە.

$$\sum_{k=1}^{k=6} 8 = na = 6 \times 8 = 48$$

ڕێگای دووەم بکەوە سەرجەم هەژمارەکە.

$$\sum_{k=1}^{k=6} 8 = \underbrace{8+8+8+8+8+8}_{6\ \text{ڕادە}} = 48$$

ب $\sum_{k=1}^{k=5} k$ زنجیرەیەکی هێڵییە

ڕێگای یەکەم یاسای سەرجەم بەکاربێنە

$$\sum_{k=1}^{k=5} k = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{5 \times 6}{2} = 15$$

ڕێگای دووەم بکەوە سەرجەم هەژماربکە.

$$\sum_{k=1}^{k=5} k = 1+2+3+4+5 = 15$$

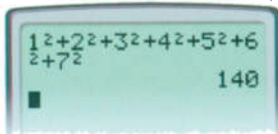
ج $\sum_{k=1}^{k=7} k^2$ زنجیرەیەکی دووجایە

ڕێگای یەکەم یاسای سەرجەم بەکاربێنە

$$\sum_{k=1}^{k=7} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{7(7+1)(2 \times 7+1)}{6} = \frac{56(15)}{6} = 140$$

ڕێگای دووەم بکەوە سەرجەم هەژمار بکە

بژمێری ڕوونکردنەوەیی بەکاربێنە



ئاگاداربە!

کاتێك ڕادەکانی زنجیرەیەك دەژمێری، پێویستە ژمارەدنەکە ڕادەی یەکەم و کۆتایی تێدابێت ژمارەی ڕادەکانی زنجیرەی $\sum_{k=5}^{k=10} 8$ دەکاتە 6 نەك 5 چونکە بەهاکانی k بریتین لە $k = 5,6,7,8,9,10$



3. بەهای زنجیرەکە هەژماربکە.

أ $\sum_{k=1}^{k=60} 4$ **ب** $\sum_{k=1}^{k=15} k$ **ج** $\sum_{k=1}^{k=10} k^2$

نموونـــــه 4 جیبەجیکردن لەسەر شیکارکردنی پرسیارەکان



سیڤان دەیەوێت خانوویەك لەکارتی یاریکردن دروست بکات کە ژمارەیان 52 دانەیە. هەروەك لە وێنەکەدا دیارە و دەیەوێت زۆرترین نهۆمی دەستبکەوێت. چەند نهۆم دەتوانێت دروستبکات.



1 پرسیارەکە تێبگە

داواکراو زانینی ژمارەی نهۆمەکانە

زانیارییە گرنگەکان دیاربکە:

- ژمارەی کارتەکان 52 دانەیە
- داواکراو زۆرترین نهۆم درست بکرێت.

2 پلاندانانی

هێڵکارییەك بۆ خانووەکە بکێشە بۆ باشتر تێگەیشتنی پرسیارەکە شیوازێك بۆ ژمارەی کارتەکان لەهەر نهۆمێك بدۆزەوە، زنجیرەکە بنووسە و بەهاکەی هەژماربکە.

3 شیکاربکە

خشتەکە و وێنەکە دروستبکە.

نەهۆم	1	2	3	4
وێنە	/\	/▽\	/▽▽\	/▽▽▽\
ژمارەی کارتەکان	2	5	8	11

ژمارەی کارتەکان لە نهۆمێکەوە بۆ نهۆمێکی تر 3 کارت زیاد دەکات، زنجیرەیەك بنووسە. ژمارەی کارتەکان لە n نهۆمدا نیشان بدات.

$\sum_{k=1}^{k=n}(3k-1)$ کاتێك k هێمای خانەی نهۆمەکە بێت و n ژمارەی نهۆمەکان بێت.

$$\sum_{k=1}^{k=4}(3k-1)=(3\times1-1)+(3\times2-1)+(3\times3-1)+(3\times4-1)=26$$

$$\sum_{k=1}^{k=5}(3k-1)=(3\times1-1)+(3\times2-1)+(3\times3-1)+(3\times4-1)+(3\times5-1)=40$$

$$\sum_{k=1}^{k=6}(3k-1)=(3\times1-1)+(3\times2-1)+(3\times3-1)+(3\times4-1)+(3\times5-1)+(3\times6-1)=57$$

لەبەرئەوەی ژمارەی کارتەکان 52 کارتە، بۆیە زۆرترین ژمارەی ئەو نهۆمانەی سیڤان دەستی دەکەوێت بریتییە لە 5 نهۆم.

4 ساغبکەوە

خشتەکە بەکاربهێنە بۆ تەواوکردنی شێوازەکە. نهۆمی پێنجەم 14 کارتی تێدا بەکاردێت $S_5=2+5+8+11+14=40$ ئەگەر سیڤان بیەوێت نهۆمێکی تر زیاد بکات ئەوا پێویستی بە ژمارەیەکی زیاتر لەو کارتانە دەبێت کە ماونەتەوە ژمارەیان 12 کارتە.



4. دوای تەواوبوونی ئاودانی باخەکەی هیوا سۆندەی ئاوەکەی پێچایەوە و لوولی کرد تا لە شوێنێکی باشدا دایبنێ. درێژی هەر پێچێك 6 cm لە پێچەکەی پێش خۆی زیاتربوو ئەگەر درێژی پێچی یەکەم 34 cm بێت. ئایا درێژی سۆندەکە چەندە ئەگەر زانێت ژمارەی پێچەکان 12 پێچە.

بیربکەوەو وتووێژبکە

1. جیاوازی نێوان یەکبەودای یەك و زنجیرە ڕوونبکەوە.
2. هێمای هەر گۆڕاوێك چییە لە $\sum_{k=1}^{k=n} k$
3. ڕێکخەربە خشتە دروستبکە و پاشان تەواوی بکە. شێوەیەکی گشتی بۆهەر زاراوەیەك بنووسە، نموونەیەکی بۆ بێنەوە.



	یەکبەودای یەك	زنجیرە
شێوگی گشتی		
نموونە		

2-6 ڕاهێنانەکان

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

1 **زاراوەکان** نموونەیەك بۆ بەکارهێنانی هێمای سەرجەم بنووسە.

پڕوانە نموونە 1

بە بەکارهێنانی هێمای سەرجەم زنجیرەکە بنووسە.

2 $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}$ **3** $-3+6-9+12-15$

4 $1+10+100+1000+10\ 000$ **5** $100+95+90+85+80$

پڕوانە نموونە 2

زنجیرەکە بکەوە و بەهاکەی هەژماربکە.

6 $\sum_{k=1}^{k=5} k^3$ **7** $\sum_{k=1}^{k=4} (-1)^{k+1}\frac{12}{k^2}$ **8** $\sum_{k=5}^{k=10} -5k$

پڕوانە نموونە 3

بەهای زنجیرەکە هەژماربکە.

9 $\sum_{k=1}^{k=21} k$ **10** $\sum_{k=1}^{k=20} k^2$ **11** $\sum_{k=15}^{k=35} 6$

پڕوانە نموونە 4

12 **پارەدان** کارزان مانگانە بڕی 500 142 دینار قیست دەدات لەبری نرخی ئەو ئۆتۆمبیلەی کڕیویەتی پاش دوو ساڵ چەند پارەی داوە؟ ئەی پاش 5 ساڵ چەند دەدات؟

جێبەجێکردن

بۆشیکارکردنی پرسیارەکان	تەماشای نموونە بکە
16–13	1
19–17	2
22–20	3
23	4

(ڕاهێنانی ئازاد)

بە بەکارهێنانی هێمای سەرجەم زنجیرەکە بنووسە.

13 $1.1+2.2+3.3+4.4+5.5$ **14** $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{4}{5}+\frac{5}{6}$

15 $11-12+13-14+15-16$ **16** $1+2+4+8+16+32$

زنجیرەکە بکەوە و هێماکەی هەژماربکە.

17 $\sum_{k=1}^{k=5} 8(k+1)$ **18** $\sum_{k=2}^{k=7} (-2)^k$ **19** $\sum_{k=1}^{k=4} \frac{k-1}{k+1}$

بەهای زنجیرەکە هەژماربکە.

20 $\sum_{k=1}^{k=99} k$ **21** $\sum_{k=11}^{k=88} 2.5$ **22** $\sum_{k=1}^{k=25} k^2$

23 کۆگایەکی گەورە قووتوە پەنیری بەچەند چینێك لەسەر یەك لە شوشە بەندەکەیدا داناوە، بەجۆرێك لەچینی سەرەوەیدا یەك قووتو دانراوە، هەر چینێك قووتویەکی لە چینەکەی ژێر خۆی زیاترە چەند قووتوی داناوە ئەگەر بزانیت ژمارەی چینەکان 20 چینە.

بە بەکارهێنانی هێمای سەرجەم یەکبەدوای یەکەکە بنووسە.

24 $-1+4-9+16-25+36$ **25** $25+24+23+...+2+1$

26 $\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\frac{1}{243}$ **27** $-800-80-8-0.8-0.08$

28 $10.8+10.5+10.2+9.9$ **29** $9-16+25-36+49-64$

30 $-3.9+4.4-4.9+5.4-5.9$ **31** $0+3.4+6.8+10.2+13.6$

32 $3+\frac{3}{2}+1+\frac{3}{4}+\frac{3}{5}$ **33** $1000+100+10+1+\frac{1}{10}$

34 **گەشت** دووری نێوان بەغداد و ئەو شارەی هاوکاری لێیە 596 km. هاوکار بڕیاریدا لە ڕۆژی یەکەم نیوەی ڕێگایەکە ببڕێت. نیوەی ماوەکە لە ڕۆژی دووەمدا و نیوەی ماوەکەی تر لەڕۆژی سێیەمدا و ... بەو شێوەیە. بە بەکارهێنانی هێمای سەرجەم زنجیرەیەك بنووسە کە سەرجەمەکەی ئەو دووریە بێت لە 5 ڕۆژدا بڕیویەتی. لەو پێنج ڕۆژەدا چەند کیلۆمەتر دەبڕێت؟

35 **دڵنیایی** بەڕێوەبەری گەنجینەیەك ڕێگای درەختی بەکاردێنی بۆ ئاگادار کردنەوەی کارمەندەکانی تا لە باری کتوپڕدا بڕیار لەسەر داخستنی گەنجینەکەیان بدەن. ئەو ڕێگایەش بە ئاگادار کردنەوەی سێ کارمەند لە لایەن بەڕێوەبەرەوە تا بڕیار لەسەر داخستنی قفڵەکان بدەن. و هەریەکێکیان 3 کارمەندی تر ئاگادار دەکات و هەروەها ...

أ) هێڵکارییەکی درەختی لە 3 ئاستدا دروستبکە ئەم ڕێگایە بنوێنێت.

ب) زنجیرەیەك بنووسە بەهایەکەی ژمارەی ئەو کارمەندانە بێت کە ئاگادار کراونەتەوە لە 5 ئاستدا و بەهای زنجیرەکە بدۆزەوە.

ج) **چی دەبێت ئەگەر؟** وایدابنێ بەڕێوەبەرەکە لەجیاتی 3 کارمەند لەهەر ئاستێکدا 5 کارمەند ئاگادار دەکاتەوە. ئایا ژمارەی ئەو کارمەندە زیادانەی لە 5 ئاستدا ئاگادار کراونەتەوە چەندە؟

زنجیرەکە بکەوە و هێماکەی هەژماربکە.

36 $\sum_{k=1}^{k=6}(k^2+1)$ **37** $\sum_{k=1}^{k=6}(-1)^k(5k)$ **38** $\sum_{k=3}^{k=6}\frac{1}{2k}$

39 $\sum_{k=1}^{k=6}(3k-2)$ **40** $\sum_{k=6}^{k=11}12(k-2)$ **41** $\sum_{k=1}^{k=5}\frac{k^2}{5k}$

42 **تەلار** شێوەکەی بەرامبەرت مۆدێلی ئوتێلێك پیشان دەدات کە بەشێوەی هەرەمێك کێشراوە. هەرنهۆمێك لەشێوەی خشتەکێکدایە، درێژی لایەکی 10 m ی لە درێژی لایەکی نهۆمەکەی کە ڕاستەوخۆ دەکەوێتە سەرەوەی زیاترە.

20m 20m

أ) زنجیرەیەك بنووسە کۆی ڕووبەرەکانی n نهۆم لەو ئوتێلە بنوێنێت.

ب) کەمترین ژمارەی نهۆمەکان چەند بێت تا سەرجەمی ڕووبەری هەموو نهۆمەکان لە $50\,000\ m^2$ کەمتر نەبێت.

خەملاندن **هەر سەرجەمێك بەهزری بخەمڵێنە پاشان بەراورد لەنێوان خەملاندنەکەت و ئەو سەرجەمەی کە بە بەکارهێنانی بژمێر دەستت دەکەوێت بکە.**

43 $10+11+12+...+29+30$ **44** $1+3+5+...+97+99$

45 $(-2)+(-4)+(-6)+...+(-98)+(-100)$

46 **فیزیا** خشتەی بەرامبەر ئەو دووریانە پیشان دەدات کە تەنێك دەیبڕێت کاتێك بەسەربەستی دەکەوێتە خوارەوە لەهەر ماوەیەك لەماوە یەکسانەکان (یەکەکانی دووری و کات فەرامۆش کراوە لەبەرئەوەی کاریگەری نابێت).

دووری کەوتنەخوارەوەی سەربەست لەهەر کاتێکی خایەنراو		
ماوەکان	نموونەی لیۆناردۆ	نموونەی گالیلۆ
1	1	1
2	2	3
3	3	5
4	4	7
5	5	9

أ) زنجیرەیەك لە 5 ماوەدا بۆهەر نموونەیەك بنووسە و بەهاکەی هەژماربکە. هەر سەرجەمێك چی دەنوێنێت.

ب) هەر زنجیرەیەك بە بەکارهێنانی هێمای سەرجەم بنووسە. سەرجەمی دە ڕادەی یەکەم لەهەر یەکێکیاندا هەژماربکە.

ج) ئەو دووریانەی تەنێك لە کەوتنە خوارەوەی سەربەستدا دەیبڕێت بەپێی ئەو نموونەی کە ئێستا کاری پێدەکەیت بریتییە لە .. ,25 ,16 ,9 ,4 ,1 بەراورد لەنێوان نموونەکەی لیۆناردۆ و گالیلۆ لەگەڵ ئەو نموونەیەی ئێستا کاری پێکراوە بکە.

دەروازەیەك

لەسەر مێژووی بیرکاری



بیرکاری زانی ئەڵمانی فروریك گاوس، لە تەمەنی دە ساڵیدا ڕێگایەکی خێرای بۆ هەژمارکردنی سەرجەمی ژمارە سروشتیەکانی لە 1 تا 100 دۆزیەوە ئەم ڕێگایەك بووە هۆی دۆزینەوەی یاسای هەژمارکردنی سەرجەمی ژمارە سروشتیەکان لە 1 تا n کاتێك n هەر ژمارەیەکی سروشتی بێت.

47 **بیركردنەوەی ڕەخنەگرانە** دەگونجێت هەندێك تایبەتمەندی بیركاری بەسەر زنجیرەكاندا جێبەجێبكرێت.

أ سەرجەمی هەریەك لە $\sum_{k=1}^{k=10} 3k$ و $3\sum_{k=1}^{10} k$ هەژمار بكە دەستەواژەیەك بنووسە پاڵپشت لەوە بكات كە پێیگەیشتووی.

ب هەریەكە لە $\sum_{k=1}^{k=10} k + \sum_{k=1}^{k=10} 2$ و $\sum_{k=1}^{k=10} (k+2)$ هەژماربكە. دەستەواژەیەك بنووسە پاڵپشت لەوە بكات كە پێی گەیشتووی .

48 زنجیرەی $\sum_{k=1}^{k=n} \left(3k^2+3k\right)$ بۆ دۆزینەوەی ژمارەی ئەو دەنكە شقارتە پێویستانەی لە دروستكردنی هەر ڕەفێك لە nچین پێكهاتبێت، هاوشێوەی ئەو هەرەمەی لە وێنەكەدا دیارە بەكاربێنە.

أ ئەو زنجیرەیەی سەربە هەرەمەكەیە و لە 5 چین پێكهاتووە بكەوە و هەژماری باهاكەی بكە تا بزانێت ژمارە دەنكە شقارتەكان چەندە؟

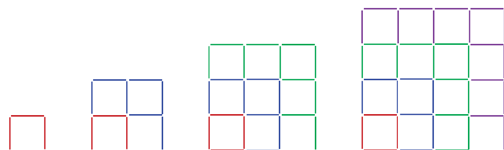
ب ئەم ڕێسایە

$\sum_{k=1}^{k=n} \left(a_k+b_k\right) = \sum_{k=1}^{k=n} a_k + \sum_{k=1}^{k=n} b_k$ و ڕیسای $\sum_{k=1}^{k=n} ax_k = a\sum_{k=1}^{k=n} x_k$ بەكاربێنە

بۆ نووسینی زنجیرەی $\sum_{k=1}^{k=n} \left(3k^2+3k\right)$ وەك سەرجەمی ئەنجامی لێكدانی زنجیرەیەكی دووجا لە ژمارەیەك، ئەنجامی لێكدانی زنجیرەیەكی هێڵی لە ژمارەیەك بەكاربێنە.

ج یاساكانی سەرجەمی زنجیرە هێڵییەكان و دووجاكان و ئەوەی لە لقی (ب) دا دەستت كەوتووە بۆ دۆزینەوەی ژمارەی ئەو دەنكە شقارتانەی پێویستە لە دروستكردنی هەرەمێك لە 17 چین پێكهاتبێت بەكاربێنە.

49 **فرە هەنگاو** شێوازەكەی خوارەوە بپشكنە تیایدا دەنكە شقارتە بۆ دروستكردنی چوارگۆشە بەكارهاتووە كەدرێژی لایەكانی لەهەر جارێكدا یەك زیاددەكات.



أ یەكبەدوای یەكێك بنووسە ژمارەی ئەو دەنكە شقارتە زیادكراوانە بنوێنێت كە بۆ دروستكردنی چوارگۆشەیەكی نوێ پێویستە.

ب بە بەكارهێنانی هێمای سەرجەم زنجیرەیەك بنووسە بۆنواندنی ژمارەی ئەودەنكە شقارتانەی بۆ دروست كردنی چوارگۆشەیەك درێژی لایەكی 6 دەنك بێت چەند دەنكت پێویستە بۆ دروستكردنی ئەو چوارگۆشە.

50 **بیركردنەوەی ڕەخنەگرانە** ئایا سەرجەمی $1+3+5+7+9$ یەكسانە بە سەرجەمی $9+7+5+3+1$ ؟ ئایا ئەم زنجیرەیە بە بەكارهێنانی هێمای سەرجەم بەهەمان شێوە دەنووسرێت.

51 **بنووسە** ئەو هۆیە ڕوونبكەوە كەوا لە S_n دەكات بەشە سەرجەمێك بێت، نەك سەرجەمی گشتی هەموو ڕادەكانی یەكبەدوای یەكەكە.

ئامادەكردن بۆ تاقیكردنەوە

52 كام لەمانەی خوارەوە كراوەیە بۆ زنجیرەی $\sum_{k=1}^{k=7} (-1)^k (3k)$ ؟

أ $3+6+9+12+15+18+21$

ج $3-6+9-12+15-18+21$

ب $-3+6-9+12-15+18-21$

د $-3-6-9-12-15-18-21$

53 كام لەمانەی خوارەوە نووسینی زنجیرەی $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}$ دەنوێنێت. بە بەكارهێنانی هێمای سەرجەم.

أ $\sum_{k=1}^{k=4} \frac{k}{2}$

ب $\sum_{k=1}^{k=4} \frac{1}{2^k}$

ج $\sum_{k=1}^{k=4} \frac{1}{2k}$

د $\sum_{k=1}^{k=4} \frac{1}{k+2}$

54 کام لەمانەی خوارەوە بەهای $\sum_{k=1}^{k=6} k^2$ پێکدەهێنێت.

أ) 36 ب) 55 ج) 91 د) 273

55 کام لەمانەی خوارەوە بەهای $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{24}$ پێکدەهێنێت.

أ) $\frac{1}{45}$ ب) $\frac{4}{45}$ ج) $\frac{7}{12}$ د) $\frac{5}{8}$

56 **کورتە وەڵام** سۆزان هەرەمێکی لە قوتوی شیرینی دروستکرد، بە جۆرێك لە چینی سەرەوەیدا یەك قوتو هەبێت چینەکەی دوای ئەو چینەی لە دوای دێت 4 قوتو بێت و چینی دوای ئەو 9 قوتو و چوارەمی 16 قوتو ... ئایا بۆ دۆزینەوەی ژمارەی قوتوەکانی چینی 20 یەکبەدوای یەك یان زنجیرە بەکاردەهێنرێت؟ ئەوە ڕونبکەوە.

بەرەنگاری و فراوانکردن

بە بەکارهێنانی هێمای سەرجەم زنجیرەیەك بنووسە پاشان بەهاکەی بدۆزەوە.

57 $1+2+3+...+1000$

58 $1^2+2^2+3^2+...+25^2$

سیفەتەکانی یەکبەدوای یەك بسەلمێنە.

59 $\sum_{k=1}^{k=n} ax_k = a\sum_{k=1}^{k=n} x_k$

60 $\sum_{k=1}^{k=n}\left(a_k+b_k\right)=\sum_{k=1}^{k=n} a_k+\sum_{k=1}^{k=n} b_k$

61 **بیری ڕەخنەگر** بەڕای تۆ بەهای زنجیرەی ... + 1 − 1 + 1 − 1 + 1 − 1 + 1 − 1 چەندە؟ ئەگەر لەسەر ئەم شێوانە بەردەوام بوویت؟ ڕوونبکەوە.

پێداچوونەوەی لووپێچی

یەکتربڕینە ستوونی و ئاسۆییەکانی هەر ڕاستەهێڵێك بدۆزەوە پاشان وێنەکەی بکێشە (پۆلەکانی پێشوو)

62 $3x-4y=12$

63 $-6x+3y=-18$

64 $10x+15y=-5$

65 **تەلار** نەخشەی $h(t)=8|t-6|+10$ ڕێسایەك بۆ هەژمارکردنی بەرزی سەرخەرێك (مصعد) لە زەوییەوە بە (پێ) پێکدێنی بەپێی کات t بەچرکە کەمترین بەرزی سەرخەرەکە چەندە؟ (پۆلەکانی پێشوو)

پێنج ڕادەی یەکەمی هەریەك لەم یەکبەدوای یەکانە بدۆزەوە. (وانەی 6 - 1)

66 $a_n=\left(\frac{1}{2}n+2\right)^2$

67 $a_n=\left(a_{n-1}\right)^2-1 \ ; \ a_1=2$

68 $a_n=\frac{4^n}{2}$

3-6

یەكبەدواییەك و زنجیرە ژمارەییەكان

Arithmetic Sequences and Series



ئامانجەكان

- دۆزینەوەی ڕادەیەكی داواكراو لە یەكبەدوای یەكی ژمارەییدا
- دۆزینەوەی بەهایەكانی زنجیرە ژمارەییەكان.

زاراوەكان

Vocabulary

یەكبەدوای یەكی ژمارەیی

Arithmetic Sequence (Progression)

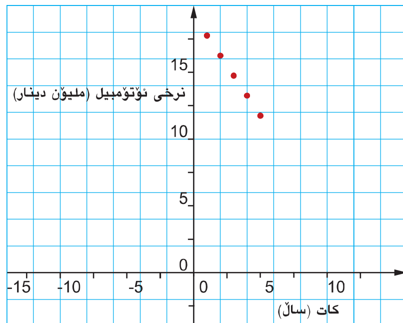
زنجیرەی ژمارەیی

Arithmetic Series

چی ئەمە بەكاردەهێنیت؟

دەتوانیت یەكبەدوای یەكی ژمارەیی بۆ خەملاندنی كرێی تێچوونی پۆستە بەكاربێنیت.

سمكۆ ئۆتۆمبیلێكی نوێی بە 000 750 16 دینار كڕی



بەڕێوەبەرایەتی باجی دەرامەت نرخی ئۆتۆمبیلەكەی ساڵ لەدوای ساڵ بەم شێوەیە خەملاند 000 750 17 ، 000 250 16 ، 000 750 14 ، 000 250 13 ، ... بەم یەكبەدوای یەكە دەوترێت **یەكبەدوای یەكی ژمارەیی Arithmetic sequence** چونكە جیاوازی d لەنێوان هەر ڕادەیەك و ڕادەكەی دوای خۆی نەگۆڕە ناكاتە سفر بەو جیاوازییە دەوترێت **بنچینە Common difference** بۆ یەكبەدوای یەكە ژمارەییەكەی سەرەوە دەكاتە 000 500 1 دینار.

ڕادە	a_1	a_2	a_3	a_4
بەها	17 750 000	16 250 000	14 750 000	13 250 000
جیاوازیەكان	−1500	−1500	−1500	

لەبیرت بێت جیاوازی نێوان ڕادە یەكەمەكان بۆ بەهاكانی نەخشەیەكی هێڵی جیاوازییەكی نەگۆڕە.
سەرنجی ئەمە بدە: ئەگەر جووتە ڕێكخراوی (n, a_n) بە ڕوونكردنەوەیی نوێنرا چەند خاڵێكت دەست دەكەوێت. كە هەموویان دەكەونە سەریەك ڕاستەهێڵ. بەم جۆرە دەتوانیت تەماشای یەكبەدوای یەكی ژمارەیی بكەیت. نەخشەیەكی هێڵییە و بوارەكەی كۆمەڵەی ژمارە سروشتییەكانە.

نموونــــە 1 جیاكردنەوەی یەكبەدوای یەكە ژمارەییەكان

دیاریبكە ئایا یەكبەودای یەكەكە ژمارەییە یان نا، ئەگەر ژمارەییە بنچینەكەی بدۆزەوە. ڕادەی دوای پاش ڕادەی دواپێدراو بدۆزەوە.

أ $-3, 2, 7, 12, 17, ...$

ڕادەكان	17	12	7	2	-3
جیاوازییەكان	5	5	5	5	

یەكبەدوای یەكەكە ژمارەییە، بنچینەكەی دەكاتە 5 ، ڕادەی دواتری پاش ڕادەی كۆتایی دراو $5 + 17 = 22$

ب $-4, -12, -24, -40, -60, ...$

ڕادەكان	−60	−40	−24	−12	−4
جیاوازییەكان	−20	−16	−12	−8	

یەكبەدوای یەكەكە ژمارەیی نییە، چونكە جیاوازی نێوان ڕادەكان یەكسان نییە.

خاڵی چاودێری

1. دیاربكە ئایا یەكبەدوای یەكەكە ژمارەییە یان نا. ئەگەر ژمارەییە بنچینەكە و ڕادەی دوای پاش ڕادەی كۆتایی دراو بدۆزەوە.

أ $1.9, 1.2, 0.5, -0.2, -0.9, ...$ ب $\frac{11}{2}, \frac{11}{3}, \frac{11}{4}, \frac{11}{5}, \frac{11}{6}, ...$

سەرنجی شێوازەکەی خشتەی بەرامبەر بدە هەر ڕادەیەك دەکاتە سەرجەمی ڕادەی یەکەم، چەندجارەی بنچینەکەی لەگەڵدا کۆکرابێتەوە.
دەتوانیت ئەم شێوازە بۆ دارشتنی یاسای یەکبەدوای یەکە ژمارەییەکان گشتگیر بکەیت.
ڕادەی دووەم = ڕادەی یەکەم + بنچینە
ڕادەی سێیەم = ڕادەی یەکەم + x2 بنچینە
وە هەروەها

بەهای ئۆتۆمبیل ساڵ لەدوای ساڵ	
n	a_n
1	$a_1 = 16\,750\,000 + 0(-1500\,000)$
2	$a_2 = 16\,750\,000 + 1(-1500\,000)$
3	$a_3 = 16\,750\,000 + 2(-1500\,000)$
4	$a_4 = 16\,750\,000 + 3(-1500\,000)$
5	$a_5 = 16\,750\,000 + 4(-1500\,000)$
n	a_n = 16 750 000 + (n-1)(-150 000)



یاسای ڕادەی گشتی یەکبەدوای یەکی ژمارەیی

ڕادەی nی بۆهەر یەکبەدوای یەکێکی ژمارەیی بەم شێوەیە دەدۆزیتەوە

$a_n = a_1 + (n-1)d$ کاتێك a_1 ڕادەی یەکەم و d بنچینە بێت.

نموونە 2 هەژمارکردنی ڕادەی nی یەکبەدوای یەکی ژمارەیی

ڕادەی دەیەم لەم یەکبەدوای یەکە ژمارەییە بدۆزەوە ... ,32, 25, 18, 11, 4

هەنگاوی 1 بنچینە بدۆزەوە $d = 25 - 32 = -7$

هەنگاوی 2 ڕادەی دەیەم بە بەکارهێنانی یاسایەکە بدۆزەوە

$a_n = a_1 + (n-1)d$ یاسا

$a_{10} = 32 + (10-1)(-7)$ لەجیاتی دابنێ

$= -31$ سادەبکە

ڕادەی دەیەمی یەکبەدوای یەکەکە بریتییە لە -31

پاسادان بکە یەکبەدوای یەکەکە تەواوبکە.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_n	32	25	18	11	4	−3	−10	−17	−24	−31



.2 ڕادەی یازدەیەم لەم یەکبەدوای یەکانەدا بدۆزەوە.

أ ... ,9− ,7− ,5− ,3−   ب ... ,9.2, 9.15, 9.1, 9.05

لە خوێندکارەوە بۆ خوێندکار

```
Plot1 Plot2 Plot3
\Y1■32+(X-1)(-7)
\Y2=
```

X	Y1
8	-17
9	-24
10	-31
11	-38

دەمەوێت پاسادانی بەهای هەر ڕادەیەك بە بەکارهێنانی بژمێری ڕوونکردنەوەیی بکەم. نەخشەی ڕادەی گشتی بخەرە ناو بژمێرەکەوە (لە نموونە 2) $y = 32 + (x-1)(-7)$
پاشان ئەرکی خشتەکردنی بەکاربێنە بە $(n=1)1$ دەستپێبکە هەنگاوێك بەکاربێنە برەکەی 1 بێت، پاشان بەهای ئەو ڕادەیە بخوێنەوە کە دەتەوێت. ئەو بەهای y یە. کە بەرامبەر خانەی ڕادەکەیە.

نموونــــــه 3 دۆزینەوەی ڕادە نادیارەکان

ڕادە نادیارەکان لەم یەکبەدوای یەکە ژمارەییە بدۆزەوە. **11,■ , ■ , ■ , –17**

هەنگاوی 1 بنچینە بدۆزەوە.

$a_n = a_1 + (n-1)d$ یاساکە

$-17 = 11 + (5-1)d$ لەجیاتی دابنێ

$-7 = d$ سادەبکە

هەنگاوی 2 ڕادە نادیارەکان بە بەکارهێنانی $a_1 = 11$ ، $d = -7$ بدۆزەوە.

$$a_2 = 11 + (2-1)(-7) = 4$$
$$a_3 = 11 + (3-1)(-7) = -3$$
$$a_4 = 11 + (4-1)(-7) = -10$$



3. ڕادە نادیارەکانی یەکبەدوای یەکی ژمارەیی **2,■ , ■ , ■ , 0** بدۆزەوە.

لەبەرئەوەی جیاوازی نێوان هەر ڕادەیەك و ڕادەکەی پێش خۆی لە یەکبەدوای یەکی ژمارەییدا جیاوازییەکی نەگۆڕ. بۆیە زانینی دوو ڕادە بەسە بۆ دۆزینەوەی بنچینە.

نموونــــــه 4 دۆزینەوەی ڕادەی nی لەیەکبەدوای یەکی ژمارەییدا کاتێك دووڕادە لە ڕادەکانی زانراوبێ

ڕادەی شەشەم لەم یەکبەدوای یەکە ژمارەییەدا بدۆزەوە ئەگەر بزانیت **$a_9 = 120$** ، **$a_{14} = 195$**

هەنگاوی 1 بنچینە بدۆزەوە.

$a_n = a_1 + (n-1)d$ یاساکە

$a_{14} = a_9 + (14-9)d$ وا دابنێ $a_n = a_{14}$ و $a_1 = a_9$ (لەجیاتی 1 ، 9 دابنێ)

$a_{14} = a_9 + 5d$ سادەبکە

$195 = 120 + 5d$ لەجیاتی دابنێ

$15 = d$ شیکاربکە

هەنگاوی 2 a_1 بدۆزەوە.

$a_n = a_1 + (n-1)d$ یاساکە

$120 = a_1 + (9-1)(15)$ لەجیاتی دابنێ

$120 = a_1 + 120$ سادەبکە

$0 = a_1$ شیکاربکە

هەنگاوی 3 یاسای یەکبەدوای یەکەکە بنووسە و بەکاریبهێنە بۆ دۆزینەوەی a_6

$a_n = a_1 + (n-1)d$ یاسا

$a_n = 0 + (n-1)(15)$ لەجیاتی دابنێ

$a_6 = 0 + (6-1)15$ سادەبکە

$= 75$

ڕادەی شەشەمی یەکبەدوای یەکەکە بریتییە لە 75



4. ڕادەی یازدەیەمی ئەم یەکبەدوای یەکە ژمارەییانە بدۆزەوە.

أ $a_2 = -133$ و $a_3 = -121$ ب $a_3 = 20.5$ و $a_8 = 13$

لەوانەکانی پێشوودا زنجیرە ژمارەییەکانت نووسینەوەو هەژماری بەهاکانیت کردووە. **زنجیرەی ژمارەیی** **Arithmetic Series** زنجیرەیەکە یەکبەدوای یەکەکەی ژمارەییە. دەتوانیت بە ئاسانی یاسایەك بدۆزیتەوە بۆ هەژمارکردنی بەهای زنجیرە ژمارەییەکە هەتا ڕادەیەکی دیاریکراو. وەك ئەمەی خوارەوە:

$$
\begin{array}{l}
S_n = a_1 \quad + (a_1+d) + (a_1+2d) + \ldots + a_n \\
\underline{S_n + a_n \quad + (a_n-d) + (a_n-2d) + \ldots + a_1} \\
2S_n = (a_1+a_n) + (a_1+a_n) + (a_1+a_n) \ldots + (a_1+a_n)
\end{array}
$$

سەرجەمی n بڕ کەهەریەکە یەکسانە بە $a_1 + a_n$

$$2S_n = n(a_1 + a_n)$$

$$S_n = n\left(\frac{a_1+a_n}{2}\right) \text{ یان } S_n = \frac{n(a_1+a_n)}{2}$$



سەرجەمی n ڕادەی یەکەم لە زنجیرە ژمارەییدا

بەنووسین	بەژمارە	بەجەبری
سەرجەمی n ڕادەی یەکەم لە زنجیرە ژمارەیی بریتییە لە ئەنجامی لێکدانی ژمارەی ڕادەکان لە ناوەندە ژمێرەیی ڕادەی یەکەم و دواڕادە.	سەرجەمی $2+4+6+8+10$ بریتییە لە $S_5 = 5\left(\frac{2+10}{2}\right) = 5(6) = 30$	$S_n = n\left(\frac{a_1+a_n}{2}\right)$ کاتێك n ژمارەی ڕادەکان و a_1 ڕادەی یەکەم و a_n دوا ڕادە بێت.

نموونــــە 5 دۆزینەوەی بەهای زنجیرە ژمارەیی

سەرجەمی داواکراو لەهەریەکە لەم زنجیرە ژمارەییانەدا بدۆزەوە.

أ S_{15} لە زنجیرەی

$$25 + 12 + (-1) + (-14) + \ldots$$

بنچینە بدۆزەوە.

$$d = 12 - 25 = -13$$

ڕادەی a_{15} بدۆزەوە.

$$a_{15} = 25 + (15-1)(-13)$$
$$= -157$$

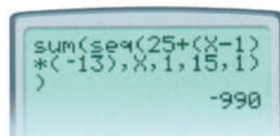
S_{15} بدۆزەوە.

$$S_n = n\left(\frac{a_1+a_n}{2}\right)$$

$$S_{15} = 15\left(\frac{25+(-157)}{2}\right)$$

$$= 15(-66) = -990$$

بۆ پاسادان بژمێری ڕوونکردنەوە بەکاربێنە.





ب $\sum_{k=1}^{k=12}(3+4k)$

هەردوو ڕادەی a_1 و a_{12} بدۆزەوە.

$$a_1 = 3 + 4(1) = 7$$

$$a_{12} = 3 + 4(12) = 51$$

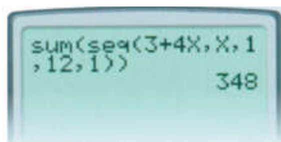
S_{12} بدۆزەوە.

$$S_n = n\left(\frac{a_1+a_n}{2}\right)$$

$$S_{12} = 12\left(\frac{7+51}{2}\right)$$

$$= 348$$

بۆ پاسادان بژمێری ڕوونکردنەوە بەکاربێنە.





ئاگاداربە!

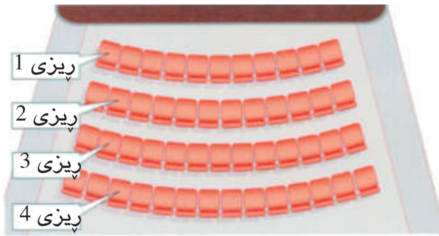
ئەم سەرجەمە بەشیانە ناتوانێت سەرجەمی زنجیرە ژمارەیی کۆتایی نەهاتوو بدۆزێتەوە لەبەرئەوەی بەهای ڕادەکان تا ناکۆتا زیاددەکات یان تا ناکۆتا کەمدەکات.



5. سەرجەمی داواکراو لەم یەکبەدوای یەکە ژمارەییانەدا بدۆزەوە.

أ S_{16} لە زنجیرەی $12 + 7 + 2 + (-3) + \ldots$ ب $\sum_{k=1}^{k=15}(50-20k)$

نموونـــــه 6 جێبەجێکردن لەشانۆکاندا



ژمارەی کورسییەکانی چواردە ڕیزی یەکەم لە ناوەڕاستی یەکێك لە شانۆ جیهانەکان یەکبەدوای یەکێکی ژمارەیی پێکدەهێنێت.

أ ژمارەی کورسییەکان لە ڕیزی **14** دا چەندە؟

یاساکە بنووسە. $a_1 = 11$ و $d = 1$

$a_n = a_1 + (n-1)d$	یاسای ڕادەی n بنووسە.
$a_{14} = 11 + (14-1)(1)$	لە جیاتی دابنێ
$= 11 + 13$	
$= 24$	سادەبکە

ژمارەی کورسییەکانی ڕیزی چواردەهەم دەکاتە 24 کورسی

ب ژمارەی کورسییەکان لەهەر **14** ڕیزەکەدا چەندە؟

S_{14} بدۆزەوە بە بەکارهێنانی یاسای سەرجەمی ڕادەکانی یەکەم لە زنجیرەی ژمارەییدا.

$S_n = n\left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right)$	یاساکە
$S_{14} = 14\left(\frac{11+24}{2}\right)$	لەجیاتی دابنێ
$= 14\left(\frac{35}{2}\right) = 245$	سادەبکە

ژمارەی کورسییەکانی هەر 14 ڕیزەکە دەکاتە 245 کورسی.



چی دەبێت ئەگەر... ؟ وا دابنێ ژمارەی کورسییەکان لەهەر ڕیزێك لەڕیزی دووەمەوە دوو کورسی زیاترە لەوەی پێش خۆی.

أ ژمارەی کورسییەکانی ڕیزی 14 چەندە؟

ب ژمارەی کورسییەکان لەهەر 14 ڕیز چەندە؟

بیربکەوە و تاوتوێبکە

1. بەراورد لەنێوان یەکبەدوای یەکی ژمارەیی و نەخشەی هێڵی بکە.
2. بنچینەی سالب چی دەگەیێنێت لەیەکبەدوای یەکی ژمارەییدا؟
3. چۆن ڕادەی شەشەم دەدۆزیتەوە لە یەکبەدوای یەکی ژمارەیی ئەگەر ڕادەی سێیەم و چوارەمت زانی
4. چۆن بنچینە دەدۆزیتەوە لە یەکبەدوای یەکێکی ژمارەیی کاتێك ڕادەی حەوتەم و دوازدەیەم زانراوبێت
5. ڕێکخەربە ئەم هێڵکارییە بنووسەوە و پاشان تەواوی بکە هەر چوار چێوەیەك پربکەوە بۆئەوەی تێگەیشتوی لەیەکبەدوای یەکی ژمارەییدا ڕونبکەیتەوە.

سیفەتەکان	پێناسە
یەکبەدوای یەکی ژمارەیی	
یاسایەکان	نموونەکان



3-6 ڕاهێنانەكان

ڕاهێنانی ئاڕاستەكراو

1 **زاراوەكان** بڕەی $50+40+30+20+10$ بریتییە لە (یەكبەدوای یەكێكی ژمارەیی یان زنجیرە ژمارەیی)

بڕوانە نموونە 1

دیاریبكە یەكبەدوای یەككە ژمارەییە یان نا، ئەگەر ژمارەییە بنچینە و ڕادەی دوای خۆی بدۆزەوە.

2 $46, 39, 32, 25, 18, \ldots$

3 $28, 21, 15, 10, 6, \ldots$

4 $\frac{12}{3}, \frac{10}{3}, \frac{8}{3}, \frac{6}{3}, \frac{4}{3}, \ldots$

بڕوانە نموونە 2

ڕادەی هەشتەم لەهەریەك لەم یەكبەدوای یەكە ژمارەییانە بدۆزەوە.

5 $3, 8, 13, 18, \ldots$

6 $10, 9\frac{3}{4}, 9\frac{1}{2}, 9\frac{1}{4}, \ldots$

7 $-3.2, -3.4, -3.6, -3.8, \ldots$

بڕوانە نموونە 3

ڕادەی نادیارەكان لەم یەكبەدوای یەكە ژمارەییانە بدۆزەوە.

8 $13, ▢, ▢, 25, \ldots$

9 $9, ▢, ▢, ▢, 37, \ldots$

10 $1.4, ▢, ▢, ▢, -1, \ldots$

بڕوانە نموونە 4

ڕادەی نۆیەم لەم یەكبەدوای یەكە ژمارەییانە بدۆزەوە.

11 $a_4=27$ ، $a_5=19$

12 $a_3=12.2$ ، $a_4=12.6$

13 $a_3=-5$ ، $a_6=-11$

14 $a_{10}=100$ ، $a_{20}=50$

15 $a_7=-42$ ، $a_{11}=-28$

16 $a_4=\frac{3}{4}$ ، $a_8=\frac{1}{2}$

بڕوانە نموونە 5

سەرجەمی داواكراو لەهەر زنجیرەیەك بدۆزەوە.

17 S_{15} لە زنجیرەی $5+9+13+17+\ldots$

18 $\sum_{k=1}^{k=12}(-2+6k)$

19 S_{18} لە زنجیرەی $3.2+2.9+2.6+2.3+\ldots$

بڕوانە نموونە 6

20 **كرێ** بلَند پەیوەندی بە كۆمپانیایەكی زانیارییەوە كرد، تا بە موچەیەكی سالآنە كە بڕەكەی 26 000 000 دینارە كاربكات. بە مەرجێك سالآنە مووچەكەی 1 250 000 دینار زیادبكات.

أ لە سالَی شەشەمدا مووچەكەی دەبێتە چەند؟

ب كۆی ئەو مووچەیەی لە شەش سالَی یەكەمدا وەریدەگرێت چەندە؟

ڕاهێنان و شیكاركردنی پرسیارەكان

بۆشیكاركردنی پرسیارەكان	تەماشای نموونەبكە
23-21	1
26-24	2
29-27	3
32-30	4
35-33	5
36	6

(ڕاهێنانی ئازاد)

دیاریبكە یەكبەدوای یەككە ژمارەییە یان نا، ئەگەر ژمارەییە، بنچینەكەی و ڕادەی دواتری بدۆزەوە.

21 $288, 144, 72, 36, 18, \ldots$

22 $-2, -12, -22, -32, -42, \ldots$

23 $0.99, 0.9, 0.81, 0.72, \ldots$

ڕادەی یازدەیەم لەهەر یەكبەدوای یەكێكی ژمارەییدا بدۆزەوە.

24 $12, 11.9, 11.8, 11.7, \ldots$

25 $\frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1, \ldots$

26 $-3.0, -2.5, -2.0, -1.5, \ldots$

ڕادەی نادیار لەهەریەك لەم یەكبەدوای یەكە ژمارەییە بدۆزەوە.

27 $77, ▢, ▢, ▢, 33, \ldots$

28 $-29, ▢, ▢, -2, \ldots$

29 $2.3, ▢, ▢, ▢, 1.5, \ldots$

ڕادەی دوازدەیەم لەهەر یەکبەدوای یەکێکی ژمارەیی بدۆزەوە.

30 $a_5=16.2$ ، $a_4=18.4$ **31** $a_8=46$ ، $a_4=-2$ **32** $a_{25}=-58$ ، $a_{22}=-49$

سەرجەمی داواکراو لەهەر زنجیرە ژمارەییەکدا بدۆزەوە.

33 S_{15} لە زنجیرەی $-18+(-16)+(-14)+\ldots$ **34** $\sum_{k=1}^{k=20}(88-3k)$ **35** $\sum_{k=1}^{k=14}\left(14-\frac{1}{2}k\right)$

36 **بەکاربردن** کاژین پۆشاکێکی بەقیست کڕی، لە هەفتەی یەکەمدا 15000 دینارێدا بەفرۆشیارەکە. وا ڕێککەوتن هەفتانە 5000 دینار بۆ قیستەکانی تر زیادبکات.

أ لە هەفتەی نۆیەمدا دەبێت چەند پارەبدات؟

ب سەرجەمی ئەو پارەیەی لە کۆتایی هەفتەی نۆیەمدا داویەتی چەندە؟

37 **کاتژمێرەکان** کاتژمێری گۆڕەپانێك لەکاتژمێر 1دا یەك زەنگ لێدەداو لەکاتژمێر 2دا دووجارو هەروەها...

أ کاژمێرەکە لە کاتژمێر 1 ی پاش نیوەڕۆوە تا نیوە شەو چەندجار لێدەدات وە بە درێژایی 24 کاتژمێر چەندجار لێدەدات؟

ب **چی دەبێت ئەگەر ...؟** کاتژمێری شارەوانی لەهەر نیو کاتژمێردا جارێك زەنگ لێبدات. ئەمەش سەرەڕای لێدانەکانی لەهەرسەری کاتژمێرێکدا کاریگەری لەسەر یەکبەدوای یەکەکە چی دەبێت؟ و ژمارەی لێدانەکانی ئەم کاژمێرە لە ماوەی 24 کاتژمێردا چەند دەبێت؟

دەروازەیەك

لەسەر کاتژمێر



لە گرنگترین شتە دیارەکانی شاری لەندەنی پایتەختی بەریتانیا کاتژمێرە بەناوبانگەکەی بیگ بنە کە دەکەوێتە گۆڕەپانی پەرلەمانی بەریتانیاوە. ناوی ئەو کاتژمێرە Big Ben بۆ زەنگە زەبەلاحەکەی دەگەڕێتەوە کە بارستاییەکەی 13.8تەنە بۆ ئاگاداری لە کات لێدەدات.

سەرجەمی داواکراو بۆهەر زنجیرەیەك بدۆزەوە.

38 $\sum_{k=1}^{k=16}(555-11k)$ **39** $\sum_{k=1}^{k=15}(4-0.5k)$ **40** $\sum_{k=1}^{k=18}\left(-33+\frac{5}{2}k\right)$

41 S_{16} لە زنجیرەی $7.5+7+6.5+\ldots$ **42** S_{18} لە زنجیرەی $2+9+16+23+\ldots$

43 **تەلار** هەرەمی لۆڤر لە پاریس لەبەردەم مۆزەخانەی لۆڤر لە هەشتایەکانی سەدەی بیستەمدا دروستکراوە. ئەو هەرەمە بە تابلۆی شووشەبەندکراوە. هەرەمەکە لەچەند ڕووتەختێك پێکهاتووە ڕووتەختەکەی سەرەوە 4 تابلۆی تێدایە ژمارەی تابلۆکان تا بەرەو خواربێت 4 زیاددەکات.



أ هێمای سەرجەم بۆ نووسینی زنجیرەکە و دیاریکردنی ژمارەی تابلۆکان بەگشتی لە n ڕووتەختدا بەکاربێنە.

ب ئەگەر هەرەمەکە لە 18 ڕووتەخت پێکهاتبێت. ژمارەی تابلۆ شوشەکان چەندە؟

ج لە ڕاستیدا ژمارەی تابلۆ بەکارهاتووەکان 11 تابلۆی کەمترە لەوەی هەژمارت کرد. ئەویش بۆ دروستکردنی دەروازەی هەرەمەکە. ژمارەی ئەو تابلۆیانەی لەهەرەمی لۆڤردا هەیە چەندە؟

44 **فیزیا** تانکی ئاو لە بەرزیدا دادەنرێت تا بە ئاسانی ئاو بگاتە هەرماڵێك، هەتا تانکی ئاوەکە مەترێك بەرزتر بێتەوە پەستانی ئاوەکە 9.73 کیلۆ باسکال زیاددەکات.

أ یەکبەدوای یەکێك بنووسە پەستانی ئاوەکە لەگەڵ بەرزبوونەوەی تانکییەکە مەتر بە مەتر پیشانبدات.

ب نزمترین بەرزی تانکییەکە چەندە تا پەستانی ئاوەکە دەکاتە 345 کیلۆ باسکال.

ج نزمترین بەرزی تانکییەکە چەندە تا پەستانی ئاوەکە دەکاتە 690 کیلۆ باسکال کە باشترین ئاستی ناسراوە بۆ پەستانی ئاو؟

د یەکبەدوای یەکەکە بە ڕوونکردنەوەیی بنوێنە. پەستانی ئاوەکە لەهەردوو لقی ب و ج شلۆڤە بکە.



45 **زەویناسی** کیشوەری ئەمریکای باکوور سالانە لە کیشوەری ئەوروپا دوور دەکەوێتەوە.

أ پاش 50 ساڵ کیشوەری ئەمریکای باکوور چەند لە ئەوروپا دوور دەکەوێتەوە.

ب پاش چەند ساڵ ئەو دوو کیشوەرە بە لایەنی کەم 1 کیلۆمەتر لە یەکتری دوور دەکەونەوە.

46 دەتوانیت نموونەی (سامپڵی) هەرەمی یەك سەر لەدوو چین پێکهاتبێت بە بەکارهێنانی 4 هەرەمی بنکە سێینە دروستبکەی بۆئەوەی سامپڵێکی چەند سەر لە دوو چین پێکهاتبێت دروستبکەیت پێویستە هەر جارێك 3 هەرەمی بۆ زیاد بکەیت، هەروەك لە وێنەی بەرامبەردا پیشاندراوە.

أ چەند هەرەمی بنکە سێینەت پێویستە بۆ دروستکردنی سامپڵێکی دوو چینی 20 سەری هەبێت؟

ب سۆلاف 20 سامپڵی لەدوو چین پێکهاتوو کە سەرەکانی لە 1 تا 20 سەر بوو یەك لەدوای یەك دروستکرد. چەند هەرەمی بنکە سێینەی بەکارهێناوە.

47 **کرێ** یانەیەکی تۆپی سەبەتە 395 000 دینار لەهەفتەی یەکەمدا دەدات بە ڕاهێنەرەکەی. و بۆ هاندانی ڕاهێنەرە باشەکان لەهەر هەفتەیەکدا 45 000 دیناری زیادکرد. ڕاهێنەرێك لەدوا هەفتەی وەرزەکەدا 755 000 دیناری وەرگرت. ئایا ئەم وەرزە چەند هەفتەی خایاندووە؟

48 **بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە** بۆ نوسینی ڕێسای یەکبەدوای یەکی ژمارەیی، کەمترین ڕادەکە پێویستە بزانیت چەندە؟ بۆ نووسینی هاوکێشەی ڕاستەهێڵێك پێویستە چەند خاڵت هەبێت؟ ئایا پەیوەندی لەنێوان ئەو دوو وەڵامەدا هەیە؟ ڕوونیبکەوە.

49 **بنووسە** بنچینەی یەکبەدوای یەکێکی ژمارەیی، ژمارەیەکی موجەبە. ڕادەی a_n چی بەسەردێت ئەگەر بەهای n بەردەوام زیادبکات؟ چی بەسەردێت ئەگەر بنچینەکە سالب بێت.



50 کام لەمانە یەکبەدوای یەکی ژمارەییە؟

أ $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$　　ج $2, 4, 8, 16, \ldots$

ب $2.2, 4.4, 6.6, 8.8, \ldots$　　د $2, 4, 7, 11, \ldots$

51 یەکێك لە ڕێکخەری ئاهەنگەکان 45 هەزار دینار وەردەگرێت. بۆ هەریەکێکی بەشدار بووی ئاهەنگەکە 12 هەزار دیناری بۆ زیاد دەکرێت. کام لەم یەکبەدوای یەکانەی خوارەوە بارەکە دەردەبڕێت؟

أ $a_n = 45 + 12(n-1)$　　ج $a_n = 57 + 12n$

ب $45, 57, 69, 81, 93, \ldots$　　د $57, 69, 81, 93, 105, \ldots$

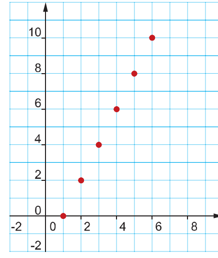
52 کام لەمانەی خوارەوە ڕادەی نادیاری یەکبەدوای یەکە ژمارەییەکەیە $4, \blacksquare, \blacksquare, \blacksquare, 40$

أ $11, 22, 33$　　ج $14, 24, 34$

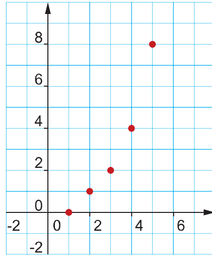
ب $13, 22, 31$　　د $16, 24, 36$

53 کام لەم هێڵکارییە ڕوونکردنەوەییانە یەکبەدوای یەکی ژمارەیی دەنوێنێت؟

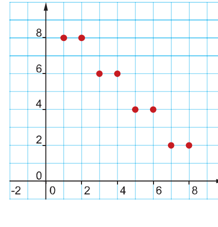
(أ)



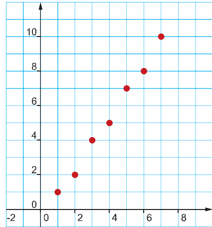
(ج)



(ب)



(د)



54 کام لەمانەی خوارەوە سەرجەمی زنجیرەی $4+7+10+13+16+19$ دەنوێنێت؟

أ $\sum_{k=1}^{k=6} 19-3k$ ب $\sum_{k=1}^{k=6}(22-3k)$

ج $\sum_{k=1}^{k=6} 19-4k$ د $\sum_{k=1}^{k=6}\left(22-3(k-1)\right)$

55 **کورتە وەڵام** ڕادەی سیزدەهەم لەیەکبەدوای یەکی ژمارەیی ... ,42 ,46 ,50 ,54 دا چەندە؟

بەرەنگاری و فراوانکردن

56 دوو ڕادەی a_n و a_m ت لە ڕادەکانی یەکبەدوای یەکی ژمارەییدا هەیە.

أ ڕوونیبکەوە بنچینەی ئەم یەکبەدوای یەکە ژمارەییە دەکاتە $d=\frac{a_n-a_m}{n-m}$.

ب ڕێسا نوێیەکە بۆ دۆزینەوەی بنچینە لەو یەکبەدوای یەکە ژمارەییە بەکاربێنە کە $a_{12}=88$ و $a_{36}=304$

57 ڕێسایەك بنووسە جگە لە ڕادەی یەکەم ڕادەی تری تێدانەبێت بۆ هەژمارکردنی سەرجەمی یەکبەدوای یەکی ژمارەیی، کەی بەکارهێنانی ئەو ڕێسایە گونجاو دەبێت؟

58 سەرجەمی 3 ڕادەی یەکەمی یەکبەدوای یەکی ژمارەیی یەکسانە بە 60 و ئەنجامی لێکدانیان یەکسانە بە 7 500 ئەو سێ ڕادەیە کامانەن.

59 **بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە** مەبەست لە یەکسان بوونی $a_{2n}=2a_n$ چییە؟

پێداچوونەوەی لولپێچی

دیاریبکە ئایا ئەم نەخشە توانییانە نەخشەیەکی گەشەبوونە یان پووکانەوەیە. (وانەی 4 - 1)

60 $f(x)=1.25(0.75)^x$ **61** $f(x)=1.43(5.32)^x$ **62** $f(x)=0.92(0.64)^x$

63 **دەنگەکان** نەخشەی $L=10\log\left(\frac{I}{I_0}\right)$ ڕێسایەکە بۆ پێوانی ئاستی توندی دەنگ بەکاردێت. کاتێك L ئاستی توندی دەنگە بە دیسبل و I توندی دەنگ و I_0 توندی بەرگوێ کەوتن بێت، ئاستی توندی دەنگێك بدۆزەوە. کە توندییەکەی $10^{9.2}I_0$ بێت.

هەر زنجیرەیەك بە بەکارهێنانی یاسای سەرجەم بنووسە. (وانەی 6 - 2)

64 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$ **65** $\frac{4}{5}+\frac{8}{5}+\frac{12}{5}+\frac{16}{5}+4$

66 $-1+2+7+14+23$ **67** $-\frac{1}{3}-\frac{2}{3}-1-\frac{4}{3}-\frac{5}{3}$

بەشی 6

تاقیکردنەوەی نیوەی بەش

6–1 دەروازەیەک بۆ یەکبەدوای یەکەکان

پێنج رادەی یەکەمی هەریەکە لەم یەکبەدوای یەکانە بدۆزەوە.

1 $a_n = \frac{2}{3}n$ **2** $a_n = 4^{n-1}$ **3** $a_n = 2a_{n-1} - 12$ ،$a_1 = -1.3$ **4** $a_n = n^2 - 2n$

جۆری ئەم یەکبەدوای یەکانە دیاریبکە.

5 $8, 11, 14, 17, 20, \ldots$ **6** $-2, -8, -18, -32, -50, \ldots$

7 $1\,000, 200, 40, \frac{8}{5}, \ldots$ **8** $437, 393, 349, 305, 261, \ldots$

9 پاسێك بە خێرایی $55\ \text{km/h}$ دەڕوات. پاسەکە لە کیلۆمەتری 18 ەوە دەستی بە جووڵە کردو پارێزگاری لە خێراییەکەی کرد. دوای 4 کاتژمێر پاسەکە لەکام کیلۆمەتری ڕێگاکەدا دەبێت؟ یەکبەدوای یەکەکە بە ڕوونکردنەوەیی لە n کاتژمێردا بنوێنە، شێوازەکە باسبکە.

6–2 زنجیرەکان و هێمای سەرجەم

زنجیرەکە بکەوە و بەهایەکەی هەژماربکە.

10 $\sum_{k=1}^{k=4}(-14-2k)$ **11** $\sum_{k=1}^{k=4}\left(\frac{k}{k+2}\right)$ **12** $\sum_{k=1}^{k=5}(-1)^k\left(k^2-2\right)$

بەهای زنجیرەکە بدۆزەوە.

13 $\sum_{k=1}^{k=5}\frac{1}{2}$ **14** $\sum_{k=1}^{k=40}k^2$ **15** $\sum_{k=1}^{k=15}k$

16 ژمارەی کورسییەکانی ڕیزی یەکەمی شانۆیەك 20 کورسییە، لە ڕیزێکەوە بۆ ئەو ڕیزەی لەدوای دێت ژمارەی کورسییەکان 3 کورسی زیاد دەکات. ژمارەی کورسییەکان لە شانۆکەدا چەندە؟ ئەگەر بزانیت ژمارەی ڕیزەکان 12 ڕیزبێت.

6–3 یەکبەدوای یەکەکان و زنجیرە ژمارەییەکان

ڕادەی هەشتەمی هەر یەکبەدوای یەکێکی ژمارەیی بدۆزەوە.

17 $10.00, 10.11, 10.22, 10.33, \ldots$ **18** $-5, -13, -21, -29, \ldots$

19 $a_2 = 57.5$ ، $a_5 = 80$ **20** $a_{10} = 141$ ، $a_{13} = 186$

ڕادەی نادیار لەهەر یەکبەدوای یەکێکی ژمارەیی بدۆزەوە.

21 $-23, \blacksquare, \blacksquare, -89, \ldots$ **22** $31, \blacksquare, \blacksquare, \blacksquare, 79, \ldots$

سەرجەمی داواکراو لەهەر زنجیرە ژمارەییەك بدۆزەوە.

23 S_{10} لە زنجیرەی $40+30+20+10+\ldots$ **24** $\sum_{k=1}^{k=8}4k$

25 $\sum_{k=1}^{k=11}(0.5k+5.5)$ **26** S_{14} لە زنجیرەی $-6-1+4+9+\ldots$

27 پێشڕەو بڕیاریدا هەندێك لەو پارەیەی باوکی دەیداتێ لە دەخیلەیەکدا پاشەکەوتی بکات. بڕیاریدا لەهەفتەی یەکەمی ساڵەکەدا هەزار دینار بخاتە دەخیلەکەیەوە 1500 دینار لەهەفتەی دووەمدا و 2 هەزار دینار لە هەفتەی سێیەمدا و هەروەها ... لەدوای هەفتەی کۆتایی ساڵدا چەند پارە دەخاتە دەخیلەکەیەوە. لە کۆتایی ساڵدا دەخیلەکە چەندی تێدابێت؟ (ئەگەر بزانیت ساڵێك 52 هەفتەی تێدایە)

4-6

یەکبەدواییەك و زنجیرە ئەندازییەکان Geometric sequences and Series

کێ ئەمە بەکاردەهێنێت؟

پلاندانەرانی یارییە وەرزشییەکان یەکبەدوای یەك و زنجیرە ئەندازەییەکان بۆ دیاریکردنی ژمارەی یارییەکان لەهەر خولێکدا بەکاردێنن (نموونە 6)

ئامانجەکان

- دۆزینەوەی ڕادەکانی یەکبەدوای یەکە ئەندازەییەکان لەگەڵ دۆزینەوەی ناوەندی ئەندازەیی
- دۆزینەوەی بەهایەکانی زنجیرە ئەنازەییەکان.

زاراوەکان Vocabulary

یەکبەدوای یەکی ئەندازەیی Geometric Sequence

ناوەندی ئەندازەیی Geometric mean

زنجیرەی ئەندازەیی Geometric Series

سیرینا ولیامز لەنێوان 128 یاریکەردا لەتۆپی تێنسی قارەمانێتی کچان لە ویمبلدون ساڵی2003 دا پلەی یەکەمی بەدەستهێنا، لەکۆتایی هەر یارییەکی نێوان دوویاریکەردا براوە بەردەوام دەبێت بەڵام دۆڕاوەکە دەردەکرێت. ئەمەش ئەوە دەگەیەنێت کە ژمارەی یاریکەرەکان لە کۆتایی هەر خولێکدا بۆ نیوە کەمدەکات. دەکرێت ئەو یاریکەرانەی لە کۆتایی هەر خولێکدا دەمێنێتەوە بە بەکارهێنانی یەکبەدوای یەکی ئەندازەیی دیاریبکرێن. لە **یەکبەدوای یەکی ئەندازەییدا Geometric Sequence** ڕێژەی هەر ڕادەیەك بۆ ڕادەکەی پێش خۆی نەگۆڕە و جیاوازە لە 1 . بەو ڕێژەیە دەوترێت **بنچینە** **Common ratio** بنچینەی یەکبەدوای یەکە ئەندازەییەکەی سەرەوە بریتییە لە $\frac{1}{2}$.

خولەکە	1	2	3	4
ژمارە	128	64	32	16

ڕێژەکان $\frac{64}{128}=\frac{1}{2}$ $\frac{32}{64}=\frac{1}{2}$ $\frac{16}{32}=\frac{1}{2}$

ژمارەی یاریکەران لەخولی ویمبلدون

ژمارەی یاریکەران

خولی

بیرت بێتەوە نەخشە توانییەکان ڕێژەی هاوبەش (بنچینە)یان هەیە، کاتێك جووتە ڕێکخراوی (n,a_n)ی یەکبەدوای یەکێکی ئەندازەیی بە ڕوونکردنەوەیی دەنوێنێت. ئەو خاڵانەی دیاریت کردووە. دەکەونە سەر چەماوەیەکی توانی بەو شێوەیە دەتوانێت سەیری یەکبەدوای یەکی ئەندازەیی بکەیت هەروەك نەخشەیەکی توانی بوارەکەی کۆمەڵەی ژمارە سروشتییەکانە.

نموونە 1 جیاکردنەوەی یەکبەدوای یەکە ئەندازەییەکان

دیاریبکە یەکبەدوای یەکەکە ئەندازەییە یان نا، ئەگەر ئەندازەییە بنچینەکەی و ڕادەی دوای ڕادە دراوەکە بدۆزەوە.

أ $8, 12, 18, 27, \ldots$

8 12 18 27

جیاوازییەکان 4 6 9

ڕێژەکان $\frac{3}{2}$ $\frac{3}{2}$ $\frac{3}{2}$

یەکبەدوای یەکەکە ئەندازەییە بنچینەکەی $r=\frac{3}{2}$ هێمای r بۆ بنچینەی یەکبەدوای یەکی ئەندازەیی دادەنرێت

ب $8, 16, 24, 32, \ldots$

8 16 24 32

جیاوازییەکان 8 8 8

ڕێژەکان 2 $\frac{3}{2}$ $\frac{4}{3}$

یەکبەدوای یەکەکە ژمارەییە بنچینە $d=8$ هێمای d بۆ بنچینەی یەکبەدوای یەکی ژمارەیی دادەنرێت

ج $6, 10, 15, 21, \ldots$

6 10 15 21

جیاوازییەکان 4 5 6

ڕێژەکان $\frac{5}{3}$ $\frac{3}{2}$ $\frac{7}{5}$

یەکبەدوای یەکەکە نە ژمارەییە و نە ئەندازەییشە

خاڵی چاودێری

1. دیاریبکە یەکبەدوای یەکەکە ئەندازەییە یان نا ئەگەر ئەندازەییە بنچینەکەی و ڕادەی دوای ڕادە دراوەکە بدۆزەوە.

أ $\frac{1}{4}, \frac{1}{12}, \frac{1}{36}, \frac{1}{108}, \ldots$

ب $1.7, 1.3, 0.9, 0.5, \ldots$

ج $-50, -32, -18, -8, \ldots$

لە یەکبەدوای یەکی ئەندازەییدا هەر ڕادەیەك لە ڕادەکانی بریتییە لە ئەنجامی لێکدانی ئەو ڕادەیەی پێش خۆی هاتووە لە بنچینەکەی، ئەمەش پێناسەیەکی نادیاری ئەم یەکبەدوای یەکەت بەم شێوەیەی خوارەوە دەداتێ:

$$a_n = a_{n-1} r$$

ڕادەی n ← a_n ؛ بنچینە ← r ؛ ڕادەی پێش خۆی ← a_{n-1}

هەروەها دەتوانیت پێناسەی دیار بۆ دۆزینەوەی ڕادەی nی یەکبەدوای یەکە ئەندازەییەکە بەکاربێنیت. هەر ڕادەیەك بریتییە لە ئەنجامی لێکدانی ڕادەی یەکەم لە هێزێك لە هێزەکانی بنچینەکە. هەروەك لە خشتەی خوارەوە پێشاندراوە.

ژمارەی یاریکەرەکان لەهەر خولێکی ویمبلدون					
خولەکە	1	2	3	4	n
ژمارەی یاریکەران	128	64	32	16	a_n
ڕێساکە	$a_1 = 128\left(\frac{1}{2}\right)^0$	$a_2 = 128\left(\frac{1}{2}\right)^1$	$a_3 = 128\left(\frac{1}{2}\right)^2$	$a_4 = 128\left(\frac{1}{2}\right)^3$	$a_n = 128\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$



یاسای گشتی یەکبەدوای یەکە ئەندازەییەکان

ڕادەی a_n بۆ یەکبەدوای یەکێکی ئەندازەیی بەم یاسایەی خوارەوە هەژماردەکرێت

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

کاتێك a_1 ڕادەی یەکەمی و r بنچینەکەی یەکبەدوای یەکەکە بێت.

نموونە 2

دۆزینەوەی ڕادەی n لە یەکبەدوای یەکێکی ئەندازەیی

ڕادەی نۆیەم لە یەکبەدوای یەکی ئەندازەیی ... ,80−, 40, 20−, 10, 5− دا بدۆزەوە.

هەنگاوی 1 بە بەکارهێنانی یاساکە بنچینە بدۆزەوە. $r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{10}{-5} = -2$

هەنگاوی 2 ڕادەی نۆیەم هەژماربکە بە بەکارهێنانی یاسا

$a_n = a_1 r^{n-1}$ یاساکە

$a_9 = -5(-2)^{9-1}$ لە جیاتی دابنێ

$a_9 = -5(256) = -1280$ سادەبکە

ڕادەی نۆیەم لەم یەکبەدوای یەکە بریتییە لە -1280

ساغبکەوە یەکبەدوای یەکەکە تەواوبکە.

$a_5 = -80$

$a_6 = -80(-2) = 160$

$a_7 = 160(-2) = -320$

$a_8 = -320(-2) = 640$

$a_9 = 640(-2) = -1280$ ✓



2. ڕادەی نۆیەم لەهەریەکە لەم یەکبەدوای یەکە ئەندازەییانە بدۆزەوە.

أ $\frac{3}{4}, -\frac{3}{8}, \frac{3}{16}, -\frac{3}{32}, \frac{3}{64}, \ldots$

ب $0.001, 0.01, 0.1, 1, 10, \ldots$

نموونــــه 3 دۆزینەوەی ڕادەی n ی یەکبەدوای یەکێکی ئەندازەیی بەزانینی دووڕادە لە ڕادەکانی

ڕادەی دەیەم لەو یەکبەدوای یەکە ئەندازەییەدا بدۆزەوەکە $a_5 = 96$ و $a_7 = 384$

هەنگاوی 1 بنچینەکە بدۆزەوە.

$a_7 = a_5 r^{7-5}$	یاساکە
$a_7 = a_5 r^2$	سادەبکە
$384 = 96r^2$	لەجیاتی دابنێ
$4 = r^2$	هەردوولا دابەشی 96 بکە
$\pm 2 = r$	ڕەگی دووجای هەردوولا وەربگرە

هەنگاوی 2 a_1 بدۆزەوە.

لەهەر بارێك لە بارەکانی r بە تەنها بکۆڵەوە.

$a_n = a_1 r^{n-1}$	$a_n = a_1 r^{n-1}$	یاساکە
$96 = a_1 (2)^{5-1}$	$96 = 6(-2)^{5-1}$	لەجیاتی دابنێ
$6 = a_1$	$6 = a_1$	سادەبکە

هەنگاوی 3 یاسای یەکبەدوای یەکەکە بنووسە بۆ دۆزینەوەی a_{10} بەکاربهێنە.

$a_n = a_1 r^{n-1}$	$a_n = a_1 r^{n-1}$	یاساکە
$a_n = 6(2)^{n-1}$	$a_n = 6(-2)^{n-1}$	لەجیاتی دابنێ
$a_{10} = 6(2)^{10-1}$	$a_{10} = 6(-2)^{10-1}$	لەجیاتی n ، 10 دابنێ
$a_{10} = 3072$	$a_{10} = -3072$	سادەبکە

ڕادەی دەیەم لەم یەکبەدوای یەکە بریتییە لە 3072 یان −3072

> **ئاگاداربە!**
> کاتێك دوو ڕادە لە ڕادەکانی یەکبەدوای یەکەکە دراو بێت. دڵنیابە لەوەی کە بەها موجەب و سالبەکانی r وەرگرتووە.

خاڵی چاودێری

3. ڕادەی حەوتەم لەهەر یەکبەدوای یەکێکی ئەندازەیی بدۆزەوە.

أ $a_4 = -8$ و $a_5 = -40$ ب $a_2 = 768$ و $a_4 = 48$

بۆیە ناوەندە ئەندازەیی بۆ دوو ژمارەی موجەبی وەك x ، y بەم شێوەی پێناسە دەکرێت $\sqrt{xy}$ ئەگەر a ، b ، c سێ ڕادەی موجەبی لەدوای یەکتر، لەیەکبەدوایەکی ئەندازەیی ئەوا $b = \sqrt{ac}$

ناوەندە ئەندازەییەکان لە یەکبەدوای یەکی ئەندازەییدا ئەو ڕادانەن دەکەونە نێوان دوو ڕادەوە کە بەدوای یەکدا نەهاتبن.



ناوەندە ئەندازەیی

لەهەر یەکبەدوای یەکی ئەندازەیی کە ڕادەکانی موجەبن هەر ڕادەیەك ناوەندی ئەندازەیی یە بۆ دوو ڕادەکەی پێش خۆی و پاش خۆی.

نموونــــه 4 دۆزینەوەی ناوەندە ئەندازەیی

ناوەندە ئەندازەیی بۆهەردوو ژمارەی $\frac{1}{32}$ و $\frac{1}{2}$ بدۆزەوە.

$$\sqrt{ab} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{32}\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{64}} = \frac{1}{8}$$

خاڵی چاودێری

4. ناوەندە ئەندازەیی بۆ دوو ژمارەی 16 و 25 بدۆزەوە.

هەروەك زنجیرە ژمارەییەكان **زنجیرەی ئەندازەییش** **Geometric Series** بریتییە لە زنجیرەی یەكبەدوای یەكە ئەندازەییەكەی. دەتوانیت بە ئاسانی یاسایەك بۆ هەژماركردنی بەهای زنجیرە ئەندازەییەكە تا ڕادەیەكی دیاریكراو بەم شێوەیەی خوارەوە بدۆزیتەوە:

$$S_n = a_1 + a_1r + a_1r^2 + \ldots + a_1r^{n-1}$$

$$-rS_n = \quad -a_1r - a_1r^2 - \ldots - a_1r^{n-1} - a_1r^n$$

$$S_n - rS_n = a_1 - a_1r^n$$

$$S_n(1-r) = a_1(1-r^n)$$

$$S_n = a_1\left(\frac{1-r^n}{1-r}\right)$$



سەرجەمی ڕادە یەكەمەكان لە زنجیرەیەكی ئەندازەیی

سەرجەمی ڕادە یەكەمەكان (S_n) لە زنجیرە ئەندازەیی $a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n$ دا بەم یاسایە هەژمار دەكرێت.

$$S_n = a_1\left(\frac{1-r^n}{1-r}\right); r \neq 1$$

كاتێك a_1 ڕادەی یەكەمی یەكبەدوای یەكەكە و r بنچینەكەی بێت.

نموونـــــە 5 دۆزینەوەی سەرجەمی زنجیرە ئەندازەیی

سەرجەمی داواكراو بۆهەر زنجیرە ئەندازەییەك بدۆزەوە.

أ S_7 لە زنجیرەی $3 - 6 + 12 - 24 + \ldots$

هەنگاوی 1 بنچینەكە بدۆزەوە

$$r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{-6}{3} = -2$$

هەنگاوی 2 S_7 بدۆزەوە كاتێك $a_1 = 3$ و $r = -2$ و $n = 7$

$$S_n = a_1\left(\frac{1-r^n}{1-r}\right)$$

$$S_7 = 3\left(\frac{1-(-2)^7}{1-(-2)}\right)$$

$$= 3\left(\frac{1-(-128)}{3}\right) = 129$$

بۆ پاساودان بژمێری ڕوونكردنەوەیی بەكاربهێنە.

```
sum(seq(3(-2)^(X
-1),X,1,7,1))
                129
```

ب $\sum_{k=1}^{k=5}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$

هەنگاوی 1 ڕادەی a_1 بدۆزەوە.

$$a_1 = \left(\frac{1}{3}\right)^{1-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^0 = 1$$

هەنگاوی 2 S_5 بدۆزەوە

$$S_n = a_1\left(\frac{1-r^n}{1-r}\right)$$

$$S_5 = 1\left(\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^5}{1-\left(\frac{1}{3}\right)}\right)$$

$$= \frac{1-\frac{1}{243}}{\frac{2}{3}} \approx 1.49$$

بۆ پاساودان بژمێری ڕوونكردنەوەیی بەكاربهێنە.

```
sum(seq((1/3)^(X
-1),X,1,5,1))
        1.49382716
```

لەبیرت بێت

ئەم كۆمەڵانە بەشە كۆمەڵەن لەبەرئەوەی هەریەكەیان لە كۆمەڵە ڕادەیەكی كۆتایی هاتوو پێكهاتووە، لە وانەی 5-6 دا فێردەبیت چۆن سەرجەمی هەندێك لە زنجیرە دوا نەهاتووەكان بدۆزیتەوە.



5. سەرجەمی داواكراو لەهەر زنجیرە ئەندازەییەكدا بدۆزەوە.

أ S_8 لە زنجیرە $2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots$ **ب** $\sum_{k=1}^{k=6} -3(2)^{k-1}$



نموونـــــه 6 جیێبەجیکردن لە وەرزشدا

لە خولی ویمبلدون بۆ تۆپی تێنسی سەرزەوی 128 یاریکەر بەشداریان کرد. قارەمانەتییەکە بەردەوام بوو تا یەك براوە مایەوە. چەند یاری لە قارەمانێتییەکە ئەنجامدرا.

هەنگاوی 1 یەکبەدوای یەکەکە بنووسە.

بنووسە n = ژمارەی خولەکان

a_k = ژمارەی یارییەکانی خولی k

S_n = کۆی ژمارەی یارییەکان لە n خولدا

$$a_n = 64\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

خولی یەکەم 64 یاریە، بۆیە $a_1=64$، لەبەرئەوەی ژمارەی یارییەکان لەهەر خولێکدا نیوەی ژمارەی یارییەکانی خولی پێشوو دەبێت. بۆیە $r=\frac{1}{2}$

هەنگاوی 2 ژمارەی خولەکان بدۆزەوە

$$1 = 64\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$
خولی کۆتایی یەك یاری ئەنجام دەدرێت.

$$\frac{1}{64} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$
بەشی توانی لە بڕەکە جیابکەوە، بە دابەشکردن بەسەر 64 دا.

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{6} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$
$\frac{1}{64}$ بەشێوەی توانێك لە توانەکانی $\frac{1}{2}$ بنووسە.

$$6 = n-1$$
توانەکان یەکسان بکە

$$7 = n$$
سادەبکە

هەنگاوی 3 کۆی گشتی یارییەکان بدۆزەوە.

$$S_7 = 64\left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^7}{1-\left(\frac{1}{2}\right)}\right) = 127$$
یاسای سەرجەمی زنجیرە ئەندازەیی بەکاربهێنە

خولەکە 127 یاری ئەنجامداوە.



کۆمپانیایەکی گەورە ساڵانە 84 000 000 دینار کرێی بارەگاکەی دەدات، ئەو بڕە ساڵانە 8% زیاد دەکات لە ماوەی 6 ساڵدا کۆمپانیاکە چەند پارە دەدات؟

بیربکەوە و تاوتوێبکە

1. سێ ڕادەی دوای ڕادەی یەکەمی یەکبەدوای یەکی ئەندازەیی... ,6 ,3 بدۆزەوە، پاشان سێ ڕادەی دوای دوو ڕادەی یەکەمی یەکبەدوای یەکی ژمارەیی... ,6 ,3 بدۆزەوە.
2. بەراورد لەنێوان ناوەندی ژمێرەیی و ناوەندە ئەندازەیی دوو ژمارەی 4 و 10 دا بکە.
3. ڕێکخەرە هێڵکارییەکەی بەرامبەر دروستبکەوە و پاشان تەواوی بکە. هەر چوارچێوەیەك پڕبکەوە بەجۆرێك ئەوەی لە یەکبەدوای یەکە ئەندازەییەکان تێگەیشتووی نیشانیبدات.

پێناسە	سیفەتەکان
یەکبەدوای یەکە ئەندازەییەکان	
نموونە	یاسایەکان



4-6 ڕاهێنانەکان

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

1 **زاراوەکان** لە یەکبەدوای یەکی ئەندازەییدا ئەو ڕادەیەی دەکەوێتە نێوان دوو ڕادەوە کە دوای یەك نەهاتبن بریتییە لە ___؟___ (ناوەندی ژمێرەیی یان ناوەندی ئەندازەیی).

بڕوانە نموونە 1

دیاریبکە هەریەکە لەم یەکبەدوای یەکانە ئەندازەیین یان ژمارەیین یان هیچیان نیین، ئەگەر ئەندازەییە بنچینەکەی و ڕادەی داهاتووی بدۆزەوە.

2 $-10, -12, -14, -16, \dots$

3 $\frac{1}{2}, 1, 2, 3, \dots$

4 $-320, -80, -20, -5, \dots$

بڕوانە نموونە 2

ڕادەی دەیەمی هەر یەکبەدوای یەکێکی ئەندازەیی بدۆزەوە.

5 $2, 6, 18, 54, 162, \dots$

6 $5000, 500, 50, 5, 0.5, \dots$

7 -2 ، 1 ، -0.5 ، -0.25 ، -0.125 ...

بڕوانە نموونە 3

ڕادەی شەشەمی ئەو یەکبەدوای یەکە ئەندازەییە بدۆزەوە کە دوو ڕادە دراوە ناسراوە.

8 $a_4 = -12$ ، $a_5 = -4$

9 $a_2 = 4$ ، $a_5 = 108$

10 $a_3 = 3$ ، $a_5 = 12$

بڕوانە نموونە 4

ناوەندە ئەندازەیی بۆهەردوو ژمارەکە بدۆزەوە.

11 6 و $\frac{3}{8}$

12 2 و 32

13 12 و 192

بڕوانە نموونە 5

سەرجەمی داواکراو لەهەر زنجیرەیەکی ئەندازەیی بدۆزەوە.

14 S_8 لە زنجیرەی $2 + 0.2 + 0.02 + \dots$

15 $\sum_{k=1}^{k=5} (-3)^{k-1}$

16 S_5 لە زنجیرەی $12 - 24 + 48 - 96 + \dots$

17 $\sum_{k=1}^{k=9} 256\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$

بڕوانە نموونە 6

18 **مووچە** مامۆستایەکی زمان لەساڵی یەکەمدا مووچەکەی 8 000 000 دینارە ئەو مووچەیە ساڵانە بەڕێژەی 5% زیاد دەکات، لە بیستەمین ساڵی خزمەتیدا مووچەکەی دەبێتە چەند؟ لەو ماوەیەدا چەندی وەرگرتووە؟

ڕاهێنان و شیکارکردنی پرسیارەکان

ڕاهێنانی ئازاد

بۆشیکارکردنی پرسیارەکانی	تەماشای نموونەکە
21-19	1
25-22	2
28-26	3
31-29	4
35-32	5
36	6

دیاریبکە یەکبەدوای یەکەکە ئەندازەییە یان ژمارەییە یان شتێکی ترە، ئەگەر ئەندازەییە، بنچینەکەی و ڕادەی داهاتووی بدۆزەوە.

19 $-36, -49, -64, -81, \dots$

20 $-2, -6, -18, -54, \dots$

21 $2, 7, 12, 17, \dots$

ڕادەی نۆیەم لەهەر یەکبەدوای یەکێکی ئەندازەیی بدۆزەوە.

22 $\frac{1}{2}, \frac{1}{10}, \frac{1}{50}, \frac{1}{250}, \frac{1}{1250}, \dots$

23 $3, -6, 12, -24, 48, \dots$

24 $3200, 1600, 800, 400, \dots$

25 $8, 24, 72, 216, 648, \dots$

ڕادەی حەوتەم لەهەر یەکبەدوای یەکێکی ئەندازەیی بدۆزەوە کە دوو ڕادەی دراوە.

26 $a_4 = 54$ ، $a_5 = 162$

27 $a_5 = 13.5$ ، $a_6 = 20.25$

28 $a_4 = -4$ ، $a_6 = -100$

ناوەندە ئەندازەیی بەهەردوو ژمارەیەك بدۆزەوە.

29 9 و $\frac{1}{9}$

30 81 و 2

31 $\frac{1}{5}$ و 45

سەرجەمی داواکراو لەهەر زنجیرە ئەندازەییەکدا بدۆزەوە.

32 S_6 لە زنجیرەی ... $1+5+25+125+$

33 S_8 لە زنجیرەی ... $10+1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+$

34 $\sum_{k=1}^{k=6}-1\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$

35 $\sum_{k=1}^{k=7}8(10)^{k-1}$

36 **باپیران** دایك و باوك و دوو باپیر و دوو داپیرو 4 باپیرە گەورە و 4 داپیرە گەورەت هەیە.

أ ژمارەی باپیرە گەورە و داپیرە گەورە لەماوەی 6 نەوەدا پێشتوو چەندە؟ لەماوەی 21 نەوەدا چەندە؟

ب **چی دەبێت ئەگەر...؟** ڕێسای هەژمارکردنی باپیرە گەورە و داپیرە گەورە چۆن دەگۆڕێت ئەگەر تۆ یەکەم نەوە بیت؟



دەروازەیەك

ئەنتیکە

ئۆتۆمبیلی رولس رویس کە هی سەرمایەدار ڕۆك ئاند رول جون گرانترین ئۆتۆمبیل بوو کە بە 2.2 ملیۆن دۆلار فرۆشرا.

بۆهەر یەکبەدوای یەکێکی ئەندازەیی پێناسەی دیار، و ڕادەی دەیەم و سەرجەمی دە ڕادەی یەکەم بدۆزەوە.

37 $\frac{1}{16},\frac{1}{8},\frac{1}{4},\frac{1}{2},\ldots$

38 $4, 0.4, 0.04, 0.004, \ldots$

39 $8, 16, 32, 64, \ldots$

40 $-22, -11, -\frac{11}{2}, -\frac{11}{4}, \ldots$

41 $162, -54, 18, -6, \ldots$

42 $12.5, 62.5, 312.5, 1562.5, \ldots$

43 **ئەنتیکە** شاناز پولێکی کۆنی بە 20 000 دینار کڕی، شاناز وایدانا نرخی پولەکە ساڵانە 15% زیاد بکات.

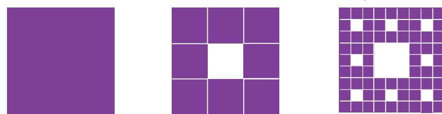
أ نرخی پولەکە پاش 4 ساڵ دەبێتە چەند؟ پاش 6 ساڵ دەبێتە چەند؟

ب ئایا نرخی پولەکە لە چوار ساڵی یەکەمدا زۆرتر زیاد دەبێت لەو زیادبوونەی لە چوار ساڵی دووەمدا بووە یان نا؟ ئەمە ڕوونکبەوە.

44 **قیستە زانکۆییەکان** لە ڕۆژی لە دایکبوونی شیرین داپیرە و باپیرەی بڕیاریاندا قیستەکانی وەرگرتنی لە زانکۆ بۆ بدەن. لە ڕۆژی لە دایکبوونیدا 50 دیناریان بۆ دانا. بڕیاریاندا هەر ساڵێك دووئەوەندەی ساڵەکەی پێشووی بۆ دانێن، کاتێك شیرین تەمەنی دەبێتە 18 ساڵ چەند پارەی بۆ کۆ دەبێتەوە؟ کە تەمەنی دەگاتە 21 ساڵ چەند پارەی بۆ کۆدەبێتەوە؟

45 **تەکنەلۆژیا** نامەیەکی ئەلیکترۆنیت بە دەست گەیشت، تێیدا داوای بەختێکی باشت بۆ دەکات، و داوای لێکردوی بۆ 5 هاوڕێی بنێریت، و داوا لەهەر یەکێکیان بکەیت لەلای خۆیانەوە بۆ 5 هاوڕێی تری بنێرن و هەروەها ... پاش 10 دەستە هاوڕێ ژمارەی ئەو نامانە چەندن؟

46 **فراکتال Fractals** مافوری سیربنسکی Sierpenski شێوەیەکی لە یەکبووە لەسەر چوارگۆشەیەك چەسپاوە، لەهەر خولێکدا ناوەڕاستی چوارگۆشە ڕەنگکراوەکە چوارگۆشەیەکی لێدەردەهێنرێت، هەروەك لە شێوەکەی خوارەوەدا دیارە.



أ ئەگەر ڕووبەری چوارگۆشەی یەکەم $1\ m^2$ بێت. یەکبەدوای یەکێك بنووسە ڕووبەرە ڕەنگکراوە دەستکەوتووەکان لەهەر خولێکدا بنوێنێت.

ب لەکام خولدا ڕووبەرە ڕەنگکراوەکە لە $\frac{1}{2}\ m^2$ کەمتر دەبێت.

47 **کاغەز** ئەستوری کاغەزی سپی $0.1\ mm$ دەبێت ئەگەر بینوشتێنیەوە ئەستورییەکەی دووئەوەندی لێدێت.

أ ئەگەر کاغەزەکە بەلایەنی زۆرەوە 7 جار بنوشتێنرێتەوە ئەستوری کاغەزەکە دوای 7 جار نوشتاندنەوە چەندە؟

ب وای دابنێ دەتوانیت بەردەوام بیت لە نوشتاندنەوەی کاغەزەکە چەند بتەوێت، دوای چەند جار ئەستوری کاغەزەکە لە بەرزایی لوتکەی ئیڤەرست Everest زیاتر دەبێت کە دەکاتە $8\,850\ m$

48 یەکبەدوای یەکێکی ژمارەیی و یەکێکی ئەندازەیی بدۆزەوە بە مەرجێك هەریەکەیان بەم شێوەیە دەستپێبکات ... 1,4,

پێوانەکانی کاغەزەکە	
جۆر	پێوانەکانی (بە گرێ)
A	$8\frac{1}{2}\times 11$
B	11×17
C	17×22
D	22×34
E	34×44

49 **پێوانە** خشتەی بەرامبەر پێوانەکانی چەند جۆرە کاغەزێك کە زۆرترین بەکارهێنانی هەیە ڕووندەکاتەوە.

أ درێژی و پانی کاغەزەکە لەهەر پێوانەیەك بپشکنە. چ پەیوەندیەکت بۆ دەردەچێت؟

ب ئەو پەیوەندییەی ڕووبەری کاغەزەکان لە پێوانە جیاوازەکان پێکەوە دەبەستێتەوە کامەیە؟ ئەو پەیوەندییە ناوی چییە؟

50 داهاتی یەکێك لە فلیمە سینەماییەکان لە هەفتەی یەکەمی نیشانیدا 60 ملیار دینارە و لە هەفتەی سێیەمدا 9.6 ملیار دینارە، وادابنێ داهاتی هەفتانەکەی یەکبەدوای یەکێکی ئەندازەیی دەنوێنێت.

أ داهاتی فلیمەکە لە حەفتەی دووەمدا بخەمڵێنە.

ب ڕێژەی کەمکردنی داهاتەکان لە هەفتەیەکەوە بۆ هەفتەیەکی تر چەندە؟

ج پێشبینی دەکەیت لە کام هەفتەدا داهاتەکەی لە یەك ملیار دینار کەمتر دەبێت.

د نیشاندانی فلیمەکە 8 هەفتە بەردەوام بوو، کۆی داهاتی نیشاندانەکەی چەندە؟

51 **زیندەزانی** جۆرێك لە بەکتریا ژمارەکەی بەپێی یەکبەدوای یەکی ئەندازەیی زیاددەکات. ژمارەی بەکتریاکان دوای کاتژمێرێك 4 بوو و دەبێتە 1024 دوای 5 کاتژمێر. ژمارەی بەکتریاکان پاش دوو کاتژمێرچەندە؟ پاش 3 کاتژمێر چەندە؟ پاش 4 کاتژمێر چەندە؟

52 **پارەدان** کۆمپانیایەك خانوویەکی بۆ بارەگاکەی مانگی بە 000 750 دینار بۆ ماوەی ساڵێك بەکرێی گرت، بەجۆرێك دوای ساڵی یەکەم ساڵانە 10% ئەوبڕە زیاددەکات.

أ زنجیرەیەك بنووسە بۆ ئەو بڕە پارەیەی کۆمپانیاکە لەماوەی 5 ساڵدا دەیدات.

ب هێمای سەرجەم بەکاربێنە بۆ نواندنی ئەوەی ساڵانە کۆمپانیاکە لەماوەی 10 ساڵدا دەیدات، پاشان بەهایەکەی بدۆزەوە.

پێوەری نۆتەکان	
نۆتە	لەرەلەر (بە هێرتز)
C_0	16.35
C_1	32.7
C_2	65.4
C_3	130.8
C_4	■

53 **میوزیك** لەرەلەری هەندێك لە نۆتە میوزیکییەکان یەکبەدوای یەکێکی ئەندازەیی پێکدێنێت کاتێك C_0 لاوازترین نۆتە بێت.

أ نۆتەی C_4 بە نۆتەی ناوەندە بۆ ئەم جۆرە دادەنرێت. لەرەلەرەکەی چەندە؟

ب یەکبەدوای یەکێکی ئەندازەیی بنووسە لەرەلەرەکانی نۆتەکان لەم جۆرە بنوێنێت، وایدابنێ $a_1 = C_1$

ج گوێچکەی مرۆڤ دەنگێك نابیستێت لەرەلەرەکەی لە 000 20 هێرتز زیاتر بێت. خانەی یەکەم نۆتە چەندە کە گوێی مرۆڤ توانای بیستنی نییە؟

54 **پزیشکی** یەکێك لە نەخۆشخانەکان لەماوەی شەپۆلی بڵاوبوونەوەی ئەنفلۆنزادا 16 توشبووی لە هەفتەی یەکەمدا و 56 ی لەهەفتەی دووەمدا و 196ی لە هەفتەی سێیەمدا تۆمارکرد.

أ یەکبەدوای یەکێکی ئەندازەیی بنووسە ژمارەی بارەکانی توشبوون بە ئەنفلۆنزا بنوێنێت.

ب ئەگەر بارەکانی توشبوون بەم شێوەیە بەردەوام بوو، کۆی ژمارەی بارەکانی توشبوون لە کام هەفتەدا دەگاتە 10000 توشبوو؟

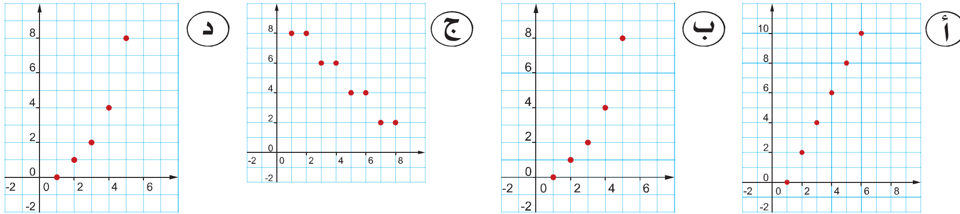
55 **بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە** ئەگەر بنچینە r گەورەتربێت لە 1 . کاریگەری لەسەر یەکبەدوای یەکێکی ئەندازەیی چی دەبێت؟ کاریگەری چی دەبێت ئەگەر $0 < r < 1$ ؟

56 **بنووسە** چی بەسەر ڕادەکانی یەکبەدوای یەکێکی ئەندازەییدا دێت، ئەگەر ڕادەی یەکەمی سێ ئەوەندە بکرێت؟ چی بەسەر سەرجەمی ڕادەکانی یەکەمیدا دێت؟

57 کام لەمانەی خوارەوە سەرجەمی شەش ڕادەی یەکەمی ئەم یەکبەدوای یەکە ئەندازەییە $4.5+9+18+36+\dots$ دەنوێنێت؟

أ 67.5 ب 144 ج 283.5 د 445.5

58 کام لەم وێنە ڕوونکردنەوەییانە وا دەردەکەوێت یەکبەدوای یەکێکی ئەندازەییە.



59 کام لەمانە سێ ڕادەی یەکەمی یەکبەدوای یەکی ئەندازەیی $a_7=-192$ و $a_9=-768$ دەنوێنێت؟

أ $3, -6, 12$

ب $-3, 12, -48, \dots$

ج $-3, 6, -12$ یان $-3, -6, -12$

د $3, -12, 48$ یان $-3, -12, -48$

60 کام لەمانە بەهای ئەم زنجیرەیە $10-15+22.5-33.75+50.625$ یە؟

أ $\sum_{k=1}^{k=5}10\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1}$ ب $\sum_{k=1}^{k=5}-10\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1}$ ج $\sum_{k=1}^{k=5}10\left(-\frac{3}{2}\right)^{k-1}$ د $\sum_{k=1}^{k=5}-10\left(-\frac{3}{2}\right)^{k}$

بەرەنگاری و فراوانکردن

بژمێری ڕوونکردنەوەیی یەکەم ڕادەی هەریەکیەدوای یەکێك بدۆزەوە بەهاکەی لە ملیۆنێك زیاتربێت.

61 $r=2$ ،$a_1=10$ **62** $a_1=\frac{1}{4}$ ،$r=4$ **63** $r=3.2$ ، $a_1=0.01$

64 سەرجەمی 3 ڕادەی دوای یەك لە یەکبەدوای یەکێکی ئەندازەییدا بریتییە لە 73.5 و ئەنجامی لێکدانیشیان 2744 ، ئەو ڕادانە کامانەن؟ ئەمە ڕوونبکەوە.

65 ئەو یەکبەدوای یەکە ئەندازەییەی ڕادەی یەکەمی 55 و بنچینەکەی $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ بەکاربێنە بۆ دۆزینەوەی ئەمانە:

أ پێنج ڕادەی یەکەمی دوای ڕادەی یەکەم بدۆزەوە نزیك کرابێتەوە بۆ نزیکترین ژمارەی تەواو.

ب سەرجەمی هەردوو ڕادەیەکی دوای یەك هاتوو هەژماربکە تێبینی چی دەکەیت.

ج دەستەواژەیەکی تایبەت بەم یەکبەدوای یەکە دابڕێژە.

پێداچوونەوەی لوولپێچی

سفرەکانی نەخشەکە و دەرکەنارەکانی بدۆزەوە. (پۆلەکانی پێشوو)

66 $f(x)=\frac{x^2+2x-3}{x+1}$ **67** $f(x)=\frac{x+5}{x^2-x-6}$ **68** $f(x)=\frac{x^2-16}{4x}$

69 **بازاڕ** یەکێك لە کۆگا گەورەکان داشکاندنێکی بە ڕێژەی 20% لەسەر کەلوپەلەکانی بۆ ماوەی مانگێك دانا. داشکاندنێکی زیادەی بەڕێژەی 10% بۆ ڕۆژانی دووشەممە زیادکرد. (وانەی 5–3)

أ نەخشەیەکی ئاوێتە بنووسە نرخی کاڵای ڕۆژی دووشەممە بەپێی نرخە بنەڕەتییەکە x بنوێنێت.

ب بینا ڕۆژی دووشەممە جلێکی کڕی ئەگەر نرخی بنەڕەتی جلەکە $275\,000$ دینار بێت پێویستە چەند پارە بدات؟

دە ڕادەی یەکەمی هەریەکە لەم یەکبەدوای یەکە ژمارەییانە بدۆزەوە. (وانەی 6–3)

70 $78, 65, 52, 39, 26, \dots$

71 $1.7, 7.3, 12.9, 18.5, 24.1, \dots$

72 $9.42, 9.23, 9.04, 8.85, 8.66, \dots$

73 $16.4, 26.2, 36, 45.8, 55.6, \dots$

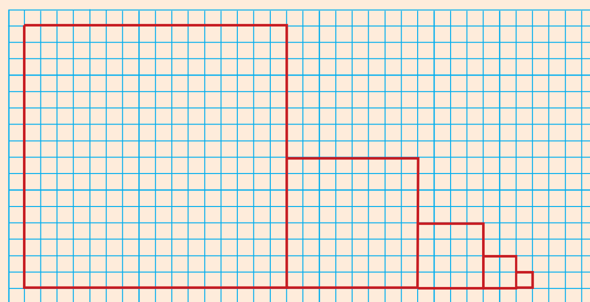


دۆزینەوەی زنجیرە ئەندازەییە دوا نەهاتووەکان

دەتوانیت بەهۆی یەکبەدوای یەکی چوارگۆشەکان زنجیرە ئەندازەییە دوا نەهاتووەکان بدۆزەیتەوە.

چالاکی 1

1. لەسەر کاغەزی هێڵی ڕوونکردنەوەیی، چوارگۆشەیەك درێژی لایەکی 16 یەکە بێت دروستبکە. سەرنجبدە چێوەکەی 64 یەکە دەبێت.
2. لە یەکێك لە گۆشەکانی ئەو چوارگۆشەیەی دروستتکردوە. لە تەنیشتەوە دەستبکە بە دروستکردنی چوارگۆشە کە درێژي لایەکانی یەك لەدوای یەك 8 و 4 و 2 و 1 بن.



درێژی لایەکی چوارگۆشەکە	چێوەکەی	سەرجەمی کەڵەکەبوو
16	64	64
8	32	96
4		
2		
1		
$\frac{1}{2}$		

3. خشتەی بەرامبەر دروستبکەوە شەش ڕیزی یەکەمی بە تۆمارکردنی چێوەی چوارگۆشەکان لە ستوونی دووەمدا و سەرجەمی کەڵەکەبووی چێوەکان لە ستوونی سێیەمدا تەواوبکە.
4. هێمای سەرجەم بۆ نووسینی زنجیرەی ئەندازەیی بەکاربێنە چێوەکان بنوێنێت.
5. بژمێری ڕونکردنەوەیی بۆدۆزینەوەی سەرجەمی بیست ڕادەی یەکەم بەکاربێنە
6. **دەستەواژەیەك بنووسە** دەربارەی سەرجەمی کەڵەکەبووی چێوەکان ئەگەر بەردەوام بیت لە دروستکردنی چوارگۆشەکان تا ناکۆتا.
7. بەهای بڕەی $\frac{64}{1-\frac{1}{2}}$ بدۆزەوە پەیوەندی چییە لەنێوان ئەوەی کە دۆزیتەوە لەگەڵ وەڵامی پرسیاری 5 ؟

هەوڵبدە

درێژی لایەکی چوارگۆشەکە	ڕووبەر	سەرجەمی کەڵەکەبوو
16		
8		
4		
2		
1		
$\frac{1}{2}$		

1. خشتەی بەرامبەر دروستبکەوە، بە دۆزینەوەی ڕووبەری چوارگۆشەکان و سەرجەمی کەڵەکەبووی ڕووبەرەکان تەواوی بکە.
2. هێمای سەرجەم بۆ نووسینی زنجیرەی ئەندازەیی بەکاربێنە کە سەرجەمی ڕووبەرەکان بنوێنێت.
3. بژمێری ڕوونکردنەوەیی بۆدۆزینەوەی سەرجەمی دە ڕادەی یەکەم بەکاربێنە.
4. **دەستەواژەیەك بنووسە** دەربارەی سەرجەمی کەڵەکەبووی ڕووبەرەکان بنووسە ئەگەر بەردەوام بیت لە دروستکردنی چوارگۆشەکان تا ناکۆتا.
5. بەهای بڕی $\frac{256}{1-\frac{1}{4}}$ بدۆزەوە پەیوەندی لەنێوان ئەوەی دۆزیتەوە لەگەڵ پرسیاری 3 دا چییە؟
6. **پوختەی ئەنجام** یاسایەك بۆ هەژمارکردنی بەهای زنجیرەیەکی ئەندازەیی دوانەهاتوو بنووسە بەهای ڕووتی بنچینە r لە 1 کەمتربێت و لەسفر گەورەتربێت.



5-6 دەرئەنجامی بیرکاری

Mathematical Induction

ئامانجەکان

- بەهای زنجیرەی ئەندازەیی دوا نەهاتوو دەدۆزیتەوە
- دەرئەنجامی بیرکاری بۆ سەلماندنی دەستەواژەکان بەکاردەهێنێت.

زاراوەکان Vocabulary

زنجیرەیی ئەندازەیی ناکۆتا
Infinite geometric series

لێکنزیکبوو
(توافقیة، تقاربیة)
Convergent

ئامانج
Limit

لێکدوورکەوتوو
(تخالفیة، تباعدیة)
Divergent

دەرئەنجامی بیرکاری
Mathematical Induction

بۆچی ئەمە فێردەبین؟

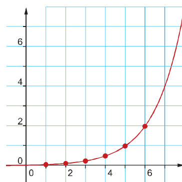
دەتوانیت زنجیرەی ئەندازەیی دوا نەهاتوو بەکاربێنیت بۆ دۆزینەوەی شێوازەکانی دوبارەبووەوە (پرسیاری 58)

لەوانەی پێشوودا فێری ئەوەبوویت چۆن بەشە کۆمەڵەکانی زنجیرەی ئەندازەیی دوا هاتوو بدۆزیتەوە. لەم وانەیەدا فێری دۆزینەوەی سەرجەمی ئەندازەیی دوا نەهاتوو دەبێت.

زنجیرەی ئەندازەیی دوا نەهاتوو Infinite geometric series بریتییە لە ژمارەیەکی دوانەهاتوو ڕادە، تەماشای ئەم دوو زنجیرە ئەندازەییە دوانەهاتووانەی خوارەوە بکە.

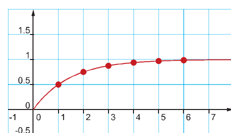
$R_n = \frac{1}{32} + \frac{1}{16} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \dots$

سەرجەمی بەشەکان						
n	1	2	3	4	5	6
R_n	$\frac{1}{32}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{7}{32}$	$\frac{15}{32}$	$\frac{31}{32}$	$\frac{63}{32}$



$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots$

سەرجەمی بەشەکان						
n	1	2	3	4	5	6
S_n	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{15}{16}$	$\frac{31}{32}$	$\frac{63}{64}$



تێبینی ئەوە بکە لە زنجیرەی ئەندازەیی S_n بنچینەکە یەکسانە بە $\frac{1}{2}$ سەرجەمی ڕادەکان نزیک دەبێتەوە لە 1 . تا بەهاکانی n گەورەتربێت، کاتێك $|r|<1$ ئەوا سەرجەمی بەشەکانی زنجیرە ئەندازەییەکە نزیکدەبێتەوە لە ژمارەیەکی دیاریکراوکاتێك بەهای n زیادبکات. لەم بارەدا دەوترێت زنجیرەکە **لێکنزیکبوونە Convergent**، ئەو ژمارەیە **ئامانجی Limit** زنجیرەکەیە.

کارەکە لە زنجیرەی R_n دا جیاوازە کاتێك $|r|\geq 1$ و بەهاکانی n زیادبکات. بەهاکانی سەرجەمە بەشەکان زیاد دەکات. هەموو ژمارەکان تێدەپەڕێنێت لەم بارەدا زنجیرەکە **لێکدوورکەوتنە Divergent**

نموونــــە 1 جیاکردنەوەی زنجیرە ئەندازەییە لێکنزیکبووەکان و لێکدوورکەوتووەکان

دیاریبکە زنجیرە ئەندازەییەکە لێکنزیکبوونە یان لێکدوورکەوتنە.

أ $20 + 24 + 28.8 + 34.56 + \dots$

$|r| \geq 1$ ؛ $r = \frac{24}{20} = 1.2$

زنجیرەکە لێکدورکەوتنە سەرجەمی نییە

ب $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \dots$

$|r| < 1$ ؛ $r = \frac{1}{3}$

زنجیرەکە لێکنزیکبوونە سەرجەمی هەیە



1. دیاریبکە زنجیرە ئەندازەییەکە لێکنزیکبوونە یان لێکدوورکەوتنە.

أ $\frac{2}{3} + 1 + \frac{3}{2} + \frac{9}{4} + \frac{27}{8} + \dots$

ب $32 + 16 + 8 + 4 + 2 + \dots$

ئەگەر زنجیرەی ئەندازەیی لێکنزیکبونەوە بێت دەتوانیت سەرجەمەکەی هەژمار بکەیت. بە گەڕانەوە بۆ زنجیرەی... $S_n = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+$ یاسای سەرجەم لە زنجیرەی ئەندازەیی بەکاربێنە $a_1=\frac{1}{2}$ و $r=\frac{1}{2}$

$$S_n = a_1\left(\frac{1-r^n}{1-r}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}\right) = \frac{1\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{2\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1} = 1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

بە وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشەی $S(n)=1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$ بنوێنە سەرنجبدە بەهای $S(n)$ نزیکدەبێتەوە لە 1 هەرچەند بەهای n گەورەتربێت. هەتا n نزیکبێتەوە لە ناکۆتای موجەب $+\infty$، $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ لە سفر نزیکدەبێتەوە ئەمەش ئەوە دەگەیەنێت سەرجەمی زنجیرەکە دەکاتە 1 . لەمەشەوە دەتوانرێت ئەم چەمکە بەگشتی بۆ هەموو زنجیرە ئەندازەییە لێکنزیکبووەکان بەبەکارهێنانی هەژمارکردنی جیاکاری و تەواوکاری بسەلمێنرێت.



سەرجەمی زنجیرە ئەندازەییە دوا نەهاتووەکان

ئەگەر بنچینەی یەکبەدوای یەکێکی ئەندازەیی دوا نەهاتوو r بێت و پاسادانی مەرجی $|r|<1$ بکات. ئەوا زنجیرەکە لێکنزیکبوونە و سەرجەمەکەی بریتییە لە

$$S=\frac{a_1}{1-r}$$

کاتێك a_1 ڕادەی یەکەم و r بنچینەکەی بێت.

نموونــــــە 2 دۆزینەوەی سەرجەمی زنجیرەیەکی ئەندازەیی دوا نەهاتوو

سەرجەمی زنجیرەی ئەندازەیی دوا نەهاتوو بدۆزەوە (ئەگەر سەرجەمی هەبوو).

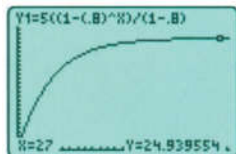
أ $5+4+3.2+2.65+\ldots$

$r=0.8$ زنجیرەکە لێکنزیکبونە چونکە $|r|<1$

$S=\frac{a_1}{1-r}$ یاسای سەرجەم

$S=\frac{5}{1-0.8}=\frac{5}{0.2}=25$ لەجیاتی دابنێ

پاسادان بکە وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشەی $y=5\left(\frac{1-(0.8)^x}{1-0.8}\right)$ بە بەکارهێنانی بژمێری ڕوونکردنەوەیی بکێشە. دەردەکەوێت بەهای y لە 25 نزیکدەبتەوە.



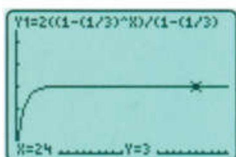
ب $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{3^{k-1}}$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{3^{k-1}}=\frac{2}{1}+\frac{2}{3}+\frac{2}{9}+\ldots$$

$r=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ زنجیرەکە لێکنزیکبونە چونکە $|r|<1$

$S=\frac{a_1}{1-r}=\frac{2}{1-\frac{1}{3}}=\frac{2}{\frac{2}{3}}=\frac{6}{2}=3$ یاسای سەرجەم

پاسادان بکە وێنەی ڕوونکردنەوەی نەخشەی $y=2\left(\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^x}{1-\frac{1}{3}}\right)$ بە بەکارهێنانی بژمێری ڕوونکردنەوەیی بکێشە. دەردەکەوێت بەهای y لە 3 نزیکدەبێتەوە.



ڕۆشنایی

دەتوانیت یەکبەدوای یەکی ئەندازەیی بە ڕوونکردنەوەیی بە بەکارهێنانی یاسای سەرجەمی بنوێنێت هەروەك لە وانەی پێشوودا هاتووە $S=a\left(\frac{1-r^n}{1-r}\right)$ بە دانانی y لە شوێنی S و x لە شوێنی n. دانانی بەهای a_1 و r



2. سەرجەمی زنجیرەی ئەندازەیی دوا نەهاتوو بدۆزەوە (ئەگەر سەرجەمی هەبوو)

أ $25-5+1-\frac{1}{5}+\frac{1}{25}+\ldots$ ب $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^k$

دەتوانیت زنجیرە ئەندازەییە دوا نەهاتووەکان بۆ نوسینی ژمارەیەکی ڕێژەیی دەوری بەشێوەی کەرت بەکاربهێنیت

نموونـــــە 3 نووسینی ژمارەیەکی ڕێژەیی دەوری بەشێوەی کەرت

ژمارەی **0.232323...** وەك کەرت بە سادەترین شێوە بنووسە.

هەنگاوی 1 ژمارەکە بەشێوەی زنجیرەیەکی ئەندازەیی دوای نەهاتوو بنووسە.

$0.232323... = 0.23 + 0.0023 + 0.000023 + ...$ شێوازێك بۆ نووسینی زنجیرەکە بەکاربێنە

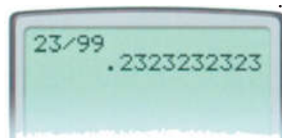
هەنگاوی 2 بنچینە بدۆزەوە.

$r = \frac{0.0023}{0.23} = \frac{1}{100} = 0.01$ زنجیرەکە لێکنزیکبونە $|r| < 1$

هەنگاوی 3 سەرجەم بدۆزەوە.

$$S = \frac{a_1}{1-r} = \frac{0.23}{1-0.01} = \frac{0.23}{0.99} = \frac{23}{99}$$

پاسادان بکە بژمێر بۆ دابەشکردنی 23 بەسەر 99 دا بەکاربێنە.



✓

لەبیرت بێت

بیرت بێت هەر ژمارەیەکی دەوری وەك ...0.232323 یان $0.\overline{23}$ ژمارەیەکی ڕێژەییە و دەتوانی بەشێوەی کەرت بینووسی.

خاڵی چاودێری

3. ژمارە ...0.111 وەك کەرت بە سادەترین شێوە بنووسە.

بۆ دۆزینەوەی سەرجەمەکان زنجیرەکانت بەکارهێنا. وەك سەرجەمی ژمارە تەواوکان لە 1 تا 100 . دەتوانرێت یاسا بەکارهاتووەکان بۆ دۆزینەوەی ئەم جۆرە سەرجەمانە بە یەکێك لە ڕێگاکانی سەلماندن لە بیرکاریدا بسەلمێنرێت ئەویش سەلماندنە بەرێگای



دەرئەنجامی بیرکاری Mathematical induction



سەلماندن بە دەرئەنجامی بیرکاری

بۆ سەلماندنی ڕاستی دەستەواژەیەك بۆ هەر بەهایەکی سروشتی n ئەم هەنگاوانە پەیرەو بکە:

هەنگاوی 1 پاسادانی باری یەکەم بکە: ڕوونبکەوە یاساکە ڕاستە کاتێك $n = 1$

هەنگاوی 2 وایدابنێ دەستەواژەکە ڕاستە کاتێك $n = k$

هەنگاوی 3 بیسەلمێنە دەستەواژەکە ڕاستە کاتێك $n = k + 1$

نموونـــــە 4 سەلماندن بە دەرئەنجامی بیرکاری

دەرئەنجامی بیرکاری بەکاربێنە بۆ سەلماندنی $\mathbf{1+2+3+...+n = \frac{n(n+1)}{2}}$

هەنگاوی 1 پاسادانی باری یەکەم بکە، ڕوونیبکەوە دەستەواژەکە ڕاستە کاتێك $n = 1$

$1 = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1(1+1)}{2} = 1$ دەستەواژەکە ڕاستە کاتێك $n = 1$

هەنگاوی 2 وایدابنێ دەستەواژەکە ڕاستە کاتێك $n = k$

$1 + 2 + 3 + ... + k = \frac{k(k+1)}{2}$ لە جیاتی n ، k دابنێ

هەنگاوی **3** بیسەلمێنە دەستەواژەکە ڕاستە کاتێك $n = k + 1$

$$1 + 2 + 3 + ... + k = \frac{k(k+1)}{2}$$

$$1 + 2 + 3 + ... + k + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1)$$ ڕادەی $k+1$ بۆهەردوولا زیادبکە.

$$= \frac{k(k+1)}{2} + \frac{2(k+1)}{2}$$ ژێرەی هاوبەش بدۆزەوە

$$= \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2}$$ سەرەکان کۆبکەوە

$$= \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$ بەپێی $k+1$ شیتەڵی بکە

$$= \frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2}$$ بەپێی $k+1$ بینووسە

دەستەواژەی $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$ ڕاستە بۆهەموو بەهایەکی سروشتی n



4. دەرئەنجامی بیرکاری بەکاربێنە بۆ سەلماندنی سەرجەمی ژمارە سرشتییە تاکەکان $1 + 3 + 5 + ... + (2n-1) = n^2$

هەندێك دەستەواژە وا دەردەکەوێت ڕاست بێت لە زۆر باردا بەڵام تەنها ئەمە بەسنییە بۆئەوەی بووترێت دەستەواژەکە لەهەموو بارێکدا ڕاستە. بۆئەوەی بیسەلمێنین دەستەواژەکە چەوتە، دژە نموونەیەك بهێنەوە وا لە دەستەواژەکە بکات ناڕاست بێت لەیەك باردا.

نموونـــــە 5 دۆزینەوەی سەرجەمی زنجیرەی ئەندازەیی

دژە نموونەیەك بێنەوە ناڕاستی $2^n \geq n^2$ دەربخات کاتێك n ژمارەیەکی ڕاستی بێت.

$2^0 \geq (0)^2$	$2^1 \geq (1)^2$	$2^4 \geq (4)^2$	$2^{-1} \geq (-1)^2$
$1 \geq 0$ ✓	$2 \geq 1$ ✓	$16 \geq 16$ ✓	$\frac{1}{2} \geq 1$ ✗

کەواتە $2^n \geq n^2$ چەوتە کاتێك $n = -1$ ئەمەش ئەوە دەگەیەنێت دەستەواژەی بەهای n هەر ژمارەیەکی ڕاستی بێت چەوتە.

ڕۆشنایی

لەبیرت بێت کە دۆزینەوەی زۆربەی دژە نموونەکان بە بەکارهێنانی ژمارەی تایبەتی وەك 0 و 1 ژمارە سالبەکان یان کەرتەکان دەکرێت.



5. دژە نموونەیەك بێنەوە ناڕاستی $\frac{a^2}{2} \leq 2a + 1$ دەربخات کاتێك a هەر ژمارەیەکی ڕاستی بێت.

بیربکەوەو وتووێژبکە

1. چۆن ئەوە دیاریدەکەی کە زنجیرەیەکی ئەندازەیی دوا نەهاتوو لێکنزیکبوونە یان لێکدوورکەوتنە.

2. چۆن ژمارەی ڕێژەیی دەوری $0.\overline{83}$ دەگۆڕێت بۆ زنجیرەی ئەندازەیی دوا نەهاتوو.

3. ڕێکخەرە خشتەکە دروستبکە و تەواوی بکە، جۆرە جیاوازەکانی زنجیرە ئەندازەییە دوا نەهاتووەکان بە پووختەیی باسبکە.



	نموونە	بنچینە	سەرجەم
زنجیرەی لێکنزیکبوو			
زنجیرەی لێکدورکەوتوو			

5-6 ڕاهێنانەکان

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

1 **زاراوەکان** زنجیرەی ئەندازەیی دوا نەهاتوو کە بەهای ڕادەکانی لە ژمارەیەکی دیاریکراو نزیکدەبێتەوە لەگەڵ زیادبوونی بەهای n بریتییەلە زنجیرەیەکی ــــــ؟ــــــ (لێکنزیکبوونە یان لێکدوورکەوتنە)

بڕوانە نموونە 1

دیاریبکە ئایا زنجیرە ئەندازەییە دوا نەهاتووەکە لێکنزیکبوونە یان لێکدوورکەوتنە.

2 $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{27}+\ldots$ **3** $1-5+25-125+\ldots$ **4** $27+18+12+8+\ldots$

بڕوانە نموونە 2

سەرجەمی زنجیرە ئەندازەیی دوا نەهاتوو بدۆزەوە (ئەگەر سەرجەمی هەبوو)

5 $\frac{3}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{2}{9}+\ldots$ **6** $\sum_{k=1}^{\infty}4(0.25)^k$ **7** $800+200+50+\ldots$

بڕوانە نموونە 3

ژمارە دەورییەکە وەک کەرتێک بە سادەترین شێوە بنووسە.

8 $0.888\ldots$ **9** $0.\overline{56}$ **10** $0.131313\ldots$

بڕوانە نموونە 4

11 دەرئەنجامی بیرکاری بەکاربێنە بۆ سەلماندنی سەرجەمی ژمارە جووتەکان کە پاسادانی $2+4+6+8+\ldots+2n=n(n+1)$ دەکەن.

بڕوانە نموونە 5

دژە نموونەیەك بدۆزەوە ناڕاستی دەستەواژەکە دەربخات کاتێك n هەر ژمارەیەکی ڕاستی بێت.

12 $n^4\geq 1$ **13** $\log n>0$ **14** $n^3\leq 3n^2$

ڕاهێنان وشیکارکردنی پرسیارەکان

ڕاهێنانی ئازاد	
بۆشیکارکردنی پرسیارەکان	تەماشای نموونەبکە
17-15	1
20-18	2
23-21	3
24	4
27-25	5

دیاریبکە ئایا زنجیرەی ئەندازەیی کۆتایی نەهاتوو لێکنزیکبوونە یان لێکدوورکەوتنە.

15 $3+\frac{3}{5}+\frac{3}{25}+\frac{3}{125}+\ldots$ **16** $5+10+20+40+\ldots$ **17** $2-4+8-16+\ldots$

سەرجەمی زنجیرەی ئەندازەیی کۆتایی نەهاتوو بدۆزەوە (ئەگەر سەرجەمی هەبوو)

18 $\sum_{k=1}^{\infty}60\left(\frac{1}{10}\right)^k$ **19** $\frac{8}{5}-\frac{4}{5}+\frac{2}{5}-\frac{1}{5}+\ldots$ **20** $\sum_{k=1}^{\infty}(3.5)^k$

ژمارە دەورییەکە وەک کەرتێک بەسادەترین شێوە بنووسە.

21 $0.\overline{6}$ **22** $0.90909\ldots$ **23** $0.541541541\ldots$

24 دەرئەنجامی بیرکاری بەکاربێنە بۆ سەلماندنی $\frac{1}{1(2)}+\frac{1}{2(3)}+\frac{1}{3(4)}+\frac{1}{4(5)}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$

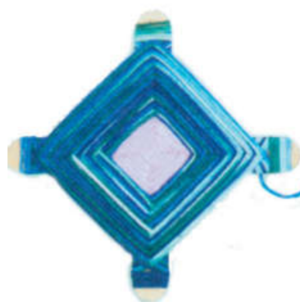
دژە نموونەیەك بهێنەوە کە ناڕاستی دەستەواژەکە دەربخات کاتێك n ژمارەی ڕاستی بێت.

25 $n^3\neq -n^2$ **26** $n^4>0$ **27** $5n^2>2^n$

28 **هەڵە لە شیکردنەوە** لە خوارەوە دوو وەڵام هەیە بۆ دۆزینەوەی سەرجەمی زنجیرە ئەندازەیی دوا نەهاتووی $\frac{1}{5}+\frac{2}{5}+\frac{4}{5}+\ldots$ کامیان هەڵەیە؟ هەڵەکە دیاریبکە

أ) $S=\frac{\frac{1}{5}}{1-2}=-\frac{1}{5}$

ب) سەرجەمی ئەو زنجیرەیە نییە.



29 **هونەر** هونەرمەندێك تابلۆیەكی مەزنی دروستكرد لە چەند چوارگۆشەیەك پێكهاتبوو. هەر یەكێكیان دەكەوتە ناو ئەوی تریانەوە بۆ دروستكردنی چوارگۆشەكان داوێكی بەكارهێنا درێژی لایەكی گەورەترین چوارگۆشە 8m بوو. درێژی لایەكی هەر چوارگۆشەیەكی ناوەوە یەكسان بوو بە 90% ی درێژی لایەكی ئەو چوارگۆشەیەی لەناویدایە. وایدابنێ هونەرمەندەكە توانای ئەوەی هەیە چوارگۆشەكانی ناوەوە تا دوانەهاتوو دروستبكات. هونەرمەندەكە چەند مەتری داو پێویستە؟ (بەهۆی زنجیرە ئەندازەیی ناكۆتا شێوازەكە بنوێنە)

سەرجەمی زنجیرە ئەندازەیی دوا نەهاتوو بدۆزەوە (ئەگەر سەرجەمی هەبوو)

30 $215-86+34.4-13.76+\ldots$

31 $500+400+320+\ldots$

32 $8-10+12.5-15.625+\ldots$

33 $\sum_{k=1}^{\infty}-5\left(\frac{1}{8}\right)^{k-1}$

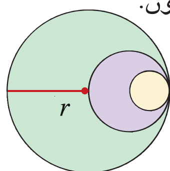
34 $\sum_{k=1}^{\infty}2\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}$

35 $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{5}{3}\right)^{k-1}$

36 $-25-30-36-43.2-\ldots$

37 $\sum_{k=1}^{\infty}200(0.6)^{k-1}$

38 **ئەندازە** سەرنجی شێوازی وێنەكەی بەرامبەر بدە بازنەكان یەك لەناو یەكتر كێشراون. بەجۆرێك نیوەتیرەی هەر بازنەیەك نیوەی نیوەتیرەی ئەو بازنەیە بێت كە تیایەتی.



أ زنجیرەیەكی ئەندازەیی كۆتایی نەهاتوو بەپێی r بنووسە چێوەكانی ئەو بازنانە بنوێنێت، پاشان سەرجەمەكەی بدۆزەوە.

ب سەرجەمی چێوەكانی بازنەكان بدۆزەوە. ئەگەر نیوەتیرەی بازنە مەزنەكە 3 cm بێت.

ژمارەی دەوری وەك كەرت بەسادەترین شێوە بنووسە.

39 $0.\overline{4}$

40 $0.\overline{9}$

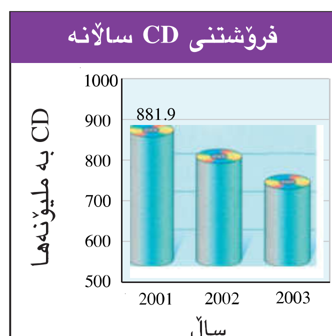
41 $0.\overline{123}$

42 $0.\overline{18}$

43 $0.\overline{5}$

44 $0.0\overline{54}$

45 **میوزیك** لەم ساڵانەی دوایدا داواكاری لەسەر كڕینی CD میوزیك كەمی كرد. بەهۆی زیادبوونی دۆسیێ مۆزیكی لە ئینتەرنێتدا. دەتوانرێت ژمارەی CD یە فرۆشراوەكان لە ساڵی 2001 ەوە بەهۆی یەكبەدوای یەكێكی ئەندازەیی بنوێنرێت.



أ ژمارەی CD یە فرۆشراوەكانی ساڵی 2010 بخەمڵێنە

ب ژمارەی CD یە فرۆشراوەكان لە ساڵی 2001 تا 2010 بخەمڵێنە.

ج وایدابنێ یەكبەدوای یەكە ئەندازەییەكە بەردەوام دەبێت تا ناكۆتا ژمارەی ئەو CD یانەی لەسەرەتای ساڵی 2001 ەوە فرۆشراوە چەندە؟

دەرئەنجامی بیركاری بەكاربێنە بۆ سەلماندنی هەر دەستەواژەیەك.

46 $1+2+4+\ldots+2^{n-1}=2^n-1$

47 $1+2^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$

48 $1(2)+2(3)+3(4)+\ldots+n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

49 $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\left(\frac{1}{2}\right)^n=1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$

50 **سینەما** داهاتی یەکێك لە فلیمە سینەماییەکان لە هەفتەی یەکەمی نیشانیدا 20 ملیار دینارە. لە هەفتەکانی داهاتوودا بەڕێژەی 40% کەمدەکات.

أ یەکبەدوای یەکێکی ئەندازەیی بنووسە داهاتی فلیمەکە لەهەفتەیەکدا بنوێنێت.

ب سەرجەمی داهاتی فلیمەکە لەشەش هەفتەی یەکەمی نیشانیدا بدۆزەوە.

ج ئەگەر نیشاندانی فلیمەکە تا ناکۆتا بەردەوام بوو گوژمەی داهاتی فلیمەکە چەند دەبێت؟

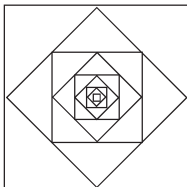
51 **پاڵەوانێتی لەشجوانی** لە یەکێك لە پاڵەوانێتیەکانی لەشجوانی خەڵاتێکی گەورەت بردەوە، دوو ڕێگایان بۆ دانای بۆ وەرگرتنی خەڵاتەکەت: یەك ملیۆن دینار لە مانگی یەکەمدا وەربگریت لەگەڵ مانگانەیەك کە بەهاکەی نیوەی ئەو پارەیە مانگی پێشوو بێت. **یان** مانگانە 100 000 دینار بۆ ماوەی 20 مانگ وەربگریت کام ڕێگا هەڵدەبژێریت.

بۆهەر دەستەواژەیەك دژە نموونەیەك بدۆزەوە کاتێك x ژمارەیەکی ڕاستی بێت.

52 $\frac{x^4}{x^3} \le 2x$ **53** $x^4 - 1 \ge 0$ **54** $\ln x^5 > \ln x$

55 $2x^2 \le 3x^3$ **56** $2x^2 - x \ge 0$ **57** $12x - x^2 > 25$

58 **ئەندازە** درێژی لایەکی چوارگۆشە گەورەکە 12 m و سەرەکانی هەر چوارگۆشەیەکی ناوەوە ناوەڕاستی لایەکانی ئەو چوارگۆشەیە کە دەکەوێتە ناویەوە. وایدابنێ کرداری دروستکردنی چوارگۆشەکان تا ناکۆتا بەردەوامە.



أ چێوەی چوارگۆشەی دووەم بدۆزەوە.

ب سەرجەمی چێوەی هەموو چوارگۆشەکان بدۆزەوە.

ج سەرجەمی ڕووبەری هەموو چوارگۆشەکان بدۆزەوە.

د لەباریکدا درێژی لایەکی چوارگۆشەکە s بێت، سەرجەمی چێوەکان بە بەکارهێنانی هێمای سەرجەم بنووسە ئەم کارە لەگەڵ سەرجەمی ڕووبەرەکان دووبارەبکەوە.

هـ کام دوو زنجیرە بەخێرایی کەمدەکات، سەرجەمی چێوەکان یان سەرجەمی ڕوبەرەکان؟ چۆن ئەمەت زانی.

59 **بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە** بەراورد لەنێوان سەرجەمی بەش S_n بۆ زنجیرە ئەندازەیی دوا نەهاتوو و سەرجەمی گشتییەکەیدا بکە، کاتێك $a_1 > 0$ و $r = \frac{4}{5}$ کامیان گەورەترە؟ ئایا گۆڕان لە کارەکەدا دەبێت ئەگەر $a_1 < 0$. ئەمە ڕوونبکەوە.

60 **بنووسە** جیاوزای لەنێوان نووسینی سەرجەمی بەش S_n بۆ زنجیرە ئەندازەیی دوا نەهاتوو و سەرجەمی گشتیدا چییە؟



ئامادەکردن بۆ تاقیکردنەوە

61 کام زنجیرە ئەندازەییە دوا نەهاتووی لێکنزیکبووەوەیە؟

أ $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{5}{4}\right)^k$ ب $\sum_{k=1}^{\infty}5\left(\frac{1}{4}\right)^k$ ج $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4}(5)^k$ د $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^k(5)^k$

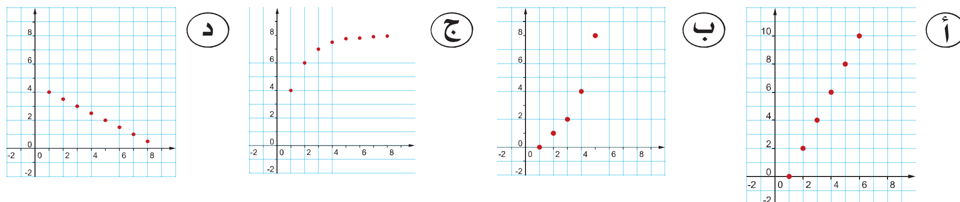
62 سەرجەمی ئەم زنجیرە ئەندازەییە دوا نەهاتووە ... $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} +$ کامەیە؟

أ 2 ب $\frac{2}{3}$ ج $\frac{1}{2}$ د $\frac{1}{3}$

63 زنجیرە ئەندازەییەکی دوا نەهاتوو سەرجەمەکەی 180 بێت و بنچینەکەی $r = \frac{2}{3}$ ڕادەی یەکەمی چەندە؟

أ 60 ب 120 ج 270 د 540

64 کام لەم وێنە ڕوونکردنەوەییانە زنجیرەی ئەندازەیی دوا نەهاتووی لێکنزیکبوو دەنوێنێت؟



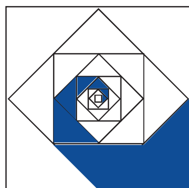
65 **درێژە وەڵام** بۆ سەلماندنی $3+5+...+(2n+1)=n(n+2)$ دەرئەنجامی بیرکاری بەکاربێنە هەرچی دەیکەیت نیشانیبدە.

بەرەنگاری و فراوانکردن

ژمارەی دەوری وەك کەرتێك بە سادەترین شێوە بنووسە.

66 $0.1\overline{6}$ **67** $0.41\overline{6}$ **68** $0.52\overline{86}$

69 **بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە** ئایا دەگونجێت زنجیرە ژمارەیەکی دوا نەهاتوو سەرجەمەکەی لە کۆتایی دیاریکراو نزیکبێتەوە، هەروەك لەهەندێك زنجیرە ئەندازەییە دوا نەهاتووەکاندا هەیە؟ وەڵامەکەت ڕوونبکەوە.



70 **ئەندازە** درێژی لایەکی چوارگۆشە گەورەکە 12 m سەرەکانی هەر چوارگۆشەیەکی ناوەوە لە ناوەڕاستی ئەو چوارگۆشەیەدا دەبێت کە لە ناویدایە. وایدابنێ ئەم کردارە لە دروستکردنی چوارگۆشەکاندا تا ناکۆتا بەردەوام دەبێت. سەرنجی ئەوە بدە وێنەکە هێڵێکی لوولپێچی سپی و ڕووبەرێکی لوولپێچی شین دەردەخات.

أ سەرجەمی زنجیرەیەکی ئەندازەیی دوا نەهاتوو بۆ دۆزینەوەی درێژی هێڵە شینەکە بەکاربێنە.

ب سەرجەمی زنجیرەیەکی ئەندازەیی کۆتایی نەهاتوو بۆ دۆزینەوەی ڕووبەری ناوچە شینەکە بەکاربێنە.

ج ئایا ئەو وەڵامەی لە لقی ب دا دەستکەوتووە گونجاوە؟ وەڵامەکەت ڕونبکەوە.

پێداچوونەوەی لوولپێچی

71 **تۆپی پێ** گۆڵکەری یانەی پێشمەرگە بۆ تۆپی پێ 80% ی لێدانی ڕاستەوخۆ گۆڵ دەکات گۆڵکەرەکە پێنج لێدانی ڕاستەوخۆ لێدەدات. ئەگەری ئەوەی بە لایەنی کەمەوە 4 لێدان گۆڵ بێت چەندە؟ (پۆلەکانی پێشوو)

72 **ئەندازە** شێوازەکەی بەرامبەر بەکاربێنە (وانەی 6—3)

أ ژمارەی خاڵەکان لە سێ وێنەی بەرامبەردا بدۆزەوە.

ب ڕێسایەك بنووسە بۆ دۆزینەوەی ژمارەی خاڵەکانی شێوەکە پلەکەی n بێت.

ج ژمارەی خاڵەکان لە شێوەی بیست و دووەمین چەندە؟

دیاریبکە یەکبەدوای یەکەکە ژمارەییە یان ئەندازەییە بنچینەی ژمارەییەکەی و بنچینەی ئەندازەییەکە بدۆزەوە ئەگەر توانرا (وانەی 4 —6)

73 $297, 99, 33, 11, ...$ **74** $\frac{4}{3}, \frac{8}{3}, 4, \frac{16}{3}, ...$

75 $25, 100, 250, 1000, ...$ **76** $4, 4.8, 5.76, 6.912, ...$

بەشی 6

ڕێبەری خوێندن: پێداچوونەوە

پێنج ڕادەی یەکەمی هەر یەکبەدوای یەکێك بدۆزەوە.

1 $a_n = n - 9$

2 $a_n = \frac{1}{2}n^2$

3 $a_n = \left(-\frac{3}{2}\right)^{n-1}$

4 $a_n = a_{n-1} - 2$ و $a_1 = 55$

5 $a_n = \frac{1}{5}a_{n-1}$ و $a_1 = 200$

6 $a_n = -3a_{n-1} + 1$ و $a_1 = -3$

ڕیسایەك بۆ ڕادەی **n** لە هەریەكبەدوای یەكێك بدۆزەوە.

7 $-4, -8, -12, \ldots$

8 $5, 20, 80, 320, \ldots$

9 $-24, -19, -14, -9, \ldots$

10 $27, 18, 12, 8, \frac{16}{3}, \ldots$

11 **وەرزش** یاریکەرێکی تۆپی سەبەتە لە بەرزایی 3.2 m تۆپێکی فڕێدا و دوای بەر زەوی کەوتنی تا بەرزایی 70% ی بەرزییەکەی پێشووی بەرزبووەوە بەو شێوەیە تۆپەکە چەند بەرزدەبێتەوە؟ لە جاری چوارەم و نۆیەمدا چەند بەرز دەبێتەوە؟

زنجیرەکە بکەوە و سەرجەمەکەی هەژماربکە.

12 $\sum_{k=1}^{k=4} k^2(-1)^k$

13 $\sum_{k=1}^{k=5} (0.5k + 4)$

14 $\sum_{k=1}^{k=5} (-1)^{k+1}(2k - 1)$

15 $\sum_{k=1}^{k=4} \frac{5k}{k^2}$

سەرجەمی زنجیرەکە هەژماربکە.

16 $\sum_{k=1}^{k=8} (-5)$

17 $\sum_{k=1}^{k=10} k^2$

18 $\sum_{k=1}^{k=12} k$

19 **پارەدان** سەردار خانوویەکی بە قیست کڕی. قیستی مانگانەکەی 1 150 000 دینارە دوای دوو ساڵ چەندی پارە داوە؟ دوای 15 ساڵ چەند پارەدەدات؟

ڕادەی یازدەهەم لەهەر زنجیرە ژمارەییەك بدۆزەوە.

20 $23, 19, 15, 11, \ldots$

21 $\frac{1}{5}, \frac{3}{5}, 1, \frac{7}{5}, \frac{9}{5}, \ldots$

22 $-9.2, -8.4, -7.6, -6.8, \ldots$

23 $a_4 = 5$ و $a_3 = 1.5$

24 $a_8 = 21$ و $a_6 = 47$

25 $a_9 = 13$ و $a_5 = -7$

سەرجەمی داواکراو لەهەر زنجیرە ژمارەییەك بدۆزەوە.

26 S_{18} لە زنجیرەی $\ldots -1 - 5 - 9 - 13 -$

27 S_{12} لە زنجیرەی $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + 0 - \frac{1}{6} - \ldots$

28 $\sum_{k=1}^{k=15} (-14 + 3k)$

29 $\sum_{k=1}^{k=15} \left(\frac{3}{2}k + 10\right)$

30 **پاشەکەوتکردن** لیندا لەسەرەتای ساڵدا 50 000 دیناری هەبوو. باوکی بڕیاریدا هەفتانە 8 000 دیناری بداتێ. لیندا بڕیاریدا ئەوەی هەیەتی و ئەوەی باوکی دەیداتێ کۆیبکاتەوە تا پاڵتۆیەکی پێ بکڕێت نرخەکەی 499 000 دینارە. یەکبەدوای یەکێکی ژمارەیی بنووسە بارەکە بنوێنێت. ئایا لیندا دەتوانێت لە کۆتایی ساڵدا پاڵتۆکەی بکڕێت؟

ڕادەی هەشتەم لەهەر یەکبەدوای یەکێکی ئەندازەییدا بدۆزەوە.

31 $40, 4, 0.4, 0.04, \ldots$

32 $\frac{1}{18}, \frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \ldots$

33 $-16, -8, -4, -2, \ldots$

34 $-6, -12, -24, -48, \ldots$

ڕادەی نۆیەمی هەر یەکبەدوای یەکێکی ئەندازەیی بدۆزەوە.

35 $a_4 = 96$ و $a_3 = 24$

36 $a_2 = -\frac{4}{3}$ و $a_1 = \frac{2}{3}$

37 $a_6 = -4$ و $a_4 = -1$

38 $a_6 = 500$ و $a_3 = 4$

ناوەندە ئەندازەیی بۆئەم دوو ژمارەیە بدۆزەوە.

39 10 و 2.5

40 8 و $\frac{1}{2}$

41 $\frac{\sqrt{3}}{96}$ و $\frac{\sqrt{3}}{6}$

42 $\frac{5}{12}$ و $\frac{125}{108}$

لەهەر یەکبەدوای یەکێکی ئەندازەیی سەرجەمی داواکراو بدۆزەوە.

43 S_5 لە زنجیرەی $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \ldots$

44 S_6 لە زنجیرەی $-\frac{4}{5} + 8 - 80 + \ldots$

45 $\sum_{k=1}^{k=8} (4)^{k-1}$

46 $\sum_{k=1}^{k=7} -2(5)^{k-1}$

47 $\sum_{k=1}^{k=6} 60\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1}$

48 $\sum_{k=1}^{k=5} 18\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$

49 **کەلوپەل** نرخی ئامێرێکی کۆپیکردنی نوێ 9 ملیۆن دینارە. پاش 5 ساڵی تر نرخی ئامێرەکە دەبێتە چەند. ئەگەر زانیت نرخەکەی لە هەر ساڵێك 65% ی ساڵی پێشووی نرخی کەمدەکات.

50 **کرێ** کرێی خانوویەك 650 000 دینارە لە مانگێکدا کرێکە ساڵانە بە ڕێژەی 6% زیاد دەکات.

أ لە پاش 6 ساڵ کرێی ساڵانەی خانوەکە دەبێتە چەند؟

ب سەرجەمی ئەو پارانەی کرێچییەکە داویەتی لە پێنج ساڵی یەکەمدا چەندە؟

سەرجەمی زنجیرە ئەندازەیی دوا نەهاتوو بدۆزەوە.

51 $-2\,700 + 900 - 300 + \ldots$

52 $-1.2 - 0.12 - 0.012 + \ldots$

53 $-49 - 42 - 36 - \frac{216}{7} - \ldots$

54 $4 + \frac{4}{5} + \frac{4}{25} + \frac{4}{125} + \ldots$

55 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{9}{3^k}$

56 $\sum_{k=1}^{\infty} -7\left(\frac{3}{5}\right)^k$

57 $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^k$

بۆ سەلماندنی هەریەکە لەمانەی خوارەوە دەرئەنجامی بیرکاری بەکاربێنە.

58 $2 + 4 + 8 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 2$

59 $1 + 5 + 25 + \ldots + 5^{n-1} = \frac{5^n - 1}{4}$

60 $\frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \ldots + \frac{1}{4n^2 - 1} = \frac{n}{2n+1}$

61 **بۆخۆشی** کچێك سواری جۆلانەیەك بووە. لەبەرزییەکەوە دێتە خوارەوە پێش ئەوەی جۆلانەکە بەرزبێتەوە، ئەو دووریەی کچەکە دەیبڕێت لەجاری یەکەمی سەرکەوتن و دابەزیندا 9 مەترە.

أ زنجیرە ئەندازەییەکی دوا نەهاتوو بنووسە ئەو دووریە بنوێنێت کە دەیبڕێت، ئەگەر زانیت دووری لەهەر جارێکدا 85% دووری جاری پێشووە.

ب پێش وەستانی جۆلانەکە ئەو دوورییە چەند دەبێت کەبڕیویەتی .

بەشی 6

تاقیکردنەوەی بەش

پێنج ڕادەی یەکەمی هەریەکبەدوای یەکێك بدۆزەوە.

1 $a_n = n^2 - 4$

2 $a_n = \frac{1}{2}a_{n-1} - 8$ و $a_1 = 48$

ڕێسایەك بۆهەریەك لەم یەکبەدوای یەکانە بنووسە.

3 $-4, -2, 0, 2, 4, \ldots$

4 $54, 18, 6, 2, \frac{2}{3}, \ldots$

یەکبەودای یەکەکە بکەوە و سەرجەمەکانیان هەژماربکە.

5 $\sum_{k=1}^{k=4} 5k^3$

6 $\sum_{k=1}^{k=7} (-1)^{k+1}(k)$

ڕادەی نۆیەمی هەریەکبەدوای یەکێکی ژمارەیی بدۆەزوە.

7 $-19, -13, -7, -1, \ldots$

8 $a_5 = 5$ و $a_2 = 11.6$

9 لەم یەکبەودای یەکە ژمارەییەدا دوو ڕادە نادیارەکە بدۆزەوە $125, \blacksquare, \blacksquare, 65$

سەرجەمی داواکراو لەهەریەك لەم زنجیرە ژمارەییانە بدۆزەوە.

10 S_{20} لە زنجیرەی $4 + 7 + 10 + 13 + \ldots$

11 $\sum_{k=1}^{k=12} (-9k + 8)$

12 لە یەکێك لە شانۆکان ڕیزی یەکەم 16 کورسی تێدایە. لە ڕیزی دووەمەوە ژمارەی کورسییەکان دوو کورسی زیاد دەکات لە ژمارەی کورسییەکانی ڕیزی پێش خۆی. ژمارەی کورسییەکانی ڕیزی دووازدەیەم چەند؟ ژمارەی کورسییەکانی دووازدە ڕیزی یەکەم چەندە؟

ڕادەی دەیەمی هەر یەکبەدوای یەکێکی ئەندازەیی بدۆزەوە.

13 $\frac{3}{256}, \frac{3}{64}, \frac{3}{16}, \frac{3}{4}, \ldots$

14 $a_5 = 8$ و $a_4 = 2$

15 ناوەندی ئەندازەیی بۆهەردوو ژمارەی 4 و 25 بدۆزەوە

لەهەر زنجیرە ئەندازەییەك سەرجەمی داواکراو بدۆزەوە.

16 S_6 لە زنجیرەی $2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots$

17 $\sum_{k=1}^{k=12} 250\left(-\frac{1}{5}\right)^{k-1}$

18 ئەگەر هەموو ساڵێك یەك ملیۆن دینارت لە بانك دانا بۆ ماوەی 10 ساڵ بەسوودی ساڵانەی 5%، ملیۆنی یەکەم لە کۆتایی ساڵی دەیەم دەبێتە چەند؟ لەکۆتایی ساڵی دەیەم هەموو پارەکەت دەبێتە چەند؟

سەرجەمی زنجیرە ئەندازەیی دوا نەهاتوو بدۆزەوە. (ئەگەر سەرجەمی هەبوو)

19 $200 - 100 + 50 - 25 + \ldots$

20 $\sum_{k=1}^{\infty} 2\left(\frac{7}{8}\right)^k$

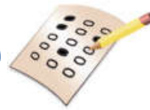
دەرئەنجامی بیرکاری بەکاربهێنە بۆ سەلماندنی $\frac{1}{2} + \frac{3}{2} + \frac{5}{2} + \ldots + \frac{2n-1}{2} = \frac{n^2}{2}$.

21 هەنگاوی 1:

22 هەنگاوی 2:

23 هەنگاوی 3:

بەشی
6



تاقیکردنەوەی کەڵەکەبوو

1 کام لەمانە یەکبەودای یەکی 4، 6، 4، 6، 4 دەنوێنێت. کە بەهێمای سەرجەم نووسراوە؟

(أ) $\sum 24$
(ج) $\sum_{n=0}^{n=5}(-1)^n+5$
(ب) $\sum_{n=1}^{n=4}(-1)^n+5$
(د) $\sum_{n=1}^{n=5}(-1)^n+5$

2 کام لەمانە کراوەی دوو ڕادەداری $(2x-y)^3$ دەبێت؟

(أ) $x^3-3x^2y+3xy^2-y^3$
(ب) $8x^3-12x^2y+6xy^2-y^3$
(ج) $x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$
(د) $8x^3+12x^2y+3xy^2+y^3$

3 $f(x)=x^3+2x^2-5x-9$ کام لەم نەخشانە بریتییە لە وێنەی نەخشەی $f(x)$ لە وێنەدانەوەی بەدەوری تەوەری دووەم.

(أ) $g(x)=-x^3-2x^2+5x+9$
(ب) $g(x)=-x^3+2x^2+5x-9$
(ج) $g(x)=2x^3+4x^2-10x-18$
(د) $g(x)=x^3+2x^2-5x-5$

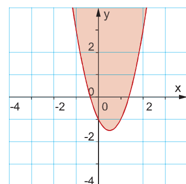
4 کام لەم نەخشانە نەخشەی گەڕانەوەی توانییە؟

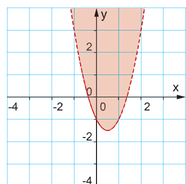
(أ) $f(x)=-5x$
(ب) $f(x)=2.3(6.7)^x$
(ج) $f(x)=0.49(7.9)^x$
(د) $f(x)=5.13(0.32)^x$

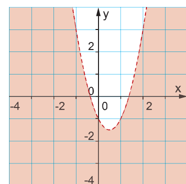
5 تۆپێك لە بەرزی 10 m ەوە کەوتە خوارەوە و بەر زەوی کەوت و هەڵبەزیەوە. هەموو جارێك 60% ی بەرزییەکەی پێشووی بەرزدەبێتەوە کام لەمانە بەرزی تۆپەکە بەمەتر لە n جاردا دەنوێنێت؟

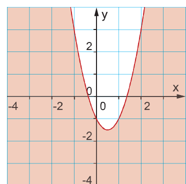
(أ) $10(0.6n)$
(ج) $\frac{10-n}{0.6}$
(ب) $10(0.6)^{n-1}$
(د) $10(0.6)^n$

6 کام وێنە ڕوونکردنەوەییانە شیکاری ئەم لاسەنگە دووجاییە $6x+3y\geq 6x^2-3$ دەنوێنێت؟

(أ)


(ج)


(ب)


(د)


7 ژیلە ئارایشتگایەکی جوانکاری کردەوە. لە چوار هەفتەی یەکەمیدا یەك لەدوای یەك 2 000 000 دینار، 2 400 000 دینار، 2 880 000 دینار، 3 456 000 دیناری قازانج کرد. لەهەفتەی شەشەمدا قازانجەکەی چەند دەکات، ئەگەر قازانجەکە بەم شێوەیە زیادبکرێت؟

(أ) 3 856 000 دینار
(ج) 4 147 000 دینار
(ب) 4 032 000 دینار
(د) 4 980 000 دینار

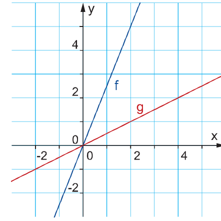
8 ڕادەی نۆیەم لە یەکبەدوای یەکی $a_n=\frac{1}{2}\left(2^{n-1}\right)+4$ چەندە؟

(أ) 36
(ب) 68
(ج) 132
(د) 260

9 پێچەوانەی نەخشە بۆ نەخشەی $f(x)=4x-5$ چییە؟

(أ) $f^{-1}(x)=-4x+5$
(ج) $f^{-1}(x)=\frac{x+5}{4}$
(ب) $f^{-1}(x)=\frac{1}{4}x+5$
(د) $f^{-1}(x)=5x-4$

10 نەخشەی $f(x)$ بە چ جێگۆڕکێیەك دەگۆڕێتەوە بۆ نەخشەی $g(x)$



أ چوونەوەیەکی ئاسۆیی بە هاوکۆلکەی $\frac{1}{5}$

ب کشانی ئاسۆیی بەهاوکۆلکەی 5

ج چوونەوەیەکی ستوونی بە اهوکۆلکەی $\frac{1}{3}$

د کشانی ستوونی بە هاوکۆلکەی 3

11 کام لەمانە سفری نەخشەی $f(x)=2x^2+5x-12$ دەبێت؟

أ -4 و $\frac{3}{2}$

ب -2 و 3

ج $-\frac{3}{2}$ و 4

د $\frac{3}{2}$ و 2

کورتە وەلام

12 بنچینەی یەکبەدوای یەکی ئەندازەیی $125, 50, 20, 8, ...$ چەندە؟

13 کاغەزێك لە کاغەزەکانی یاری ڕاکێشرا ئەگەری ئەوەی ئەو کاغەزە 10 یان سووربێت چەندە؟

14 سەرجەمی زنجیرە ژمارەیی $\sum_{k=1}^{k=8}(7k-3)$ چەندە؟

15 پۆوتانی دووەمی ئەو خاڵەی شیکاری ئەم سستەمە دەنوێنێ چەندە؟ $\begin{cases}2y-2=4x\\6-x=8y\end{cases}$

16 ئەم نەخشەیە بەکاربێنە $f(x)=\sqrt[3]{5x}$ ؟

أ بوار و مەودای نەخشەکە بدۆزەوە.

ب پێچەوانەی نەخشە بۆ نەخشەی $f(x)$ چییە؟

ج بوار و مەودای پێچەوانەی نەخشەکە چییە؟

17 زنجیرە ئەندازەیی دوا نەهاتووی $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{5}{4^{n-1}}$ بەکاربێنە.

أ دیاریبکە زنجیرەکە نزیکبوونە یان دورکەوتنە.

ب سەرجەمی زنجیرەکە بدۆزەوە (ئەگەر هەبێت)

18 یەکێك لە کۆگا گەورەکان قووتووی ساردەمەنی شێوە سێگۆشەیی نمایش دەکات. بەجۆرێ کە ژمارەی قووتووەکان لە بەرزترین ڕیزدا 3 قوتوە هەتا لە ڕیزەکاندا بەرەوە خوارەوە بچین ژمارەی قووتوەکان یەکێك زیاد دەکات.

أ ئایا یەکبەدوای یەك یان زنجیرە بۆ نواندنی ژمارەی قووتوەکان لە ڕیزی n بەکاردێت؟

ب ژمارەی قووتوەکانی هەر 12 ڕیزەکە چەندە؟

ج زنجیرەی $\sum_{k=1}^{k=n}(k+2)$ چی دەنوێنێت؟ ڕوونیبکەوە.

درێژە وەلام

19 پاڵێوراوان بۆ وەرگرتن لە کۆلێژی ئەفسەری بە دوو تاقیکردنەوەدا تێپەڕدەبن 60% ی پاڵێوراوان تاقیکردنەوەی یەکەم بەسەرکەوتویی دەبڕن، 20% یان تاقیکردنەوەی دووەم بەسەرکەوتویی دەبڕن.

أ هێلکارییەکی درەختی دروستبکە ئەگەرە لە تواناکان بۆهەر پاڵێوراوێك دەربخات.

ب ئەگەر پاڵێوراوەکان بۆیان هەبێت لەهەردوو تاقیکردنەوەکەدا بەشداربن ئەگەری ئەوەی پاڵێوراوەکە لەهەردوو تاقیکردنەوەکە دەربچێت چەندە؟ چەند پاڵێوراو چاوەڕێی دەرچوون دەکەن ئەگەر ژمارەیان 50 پاڵێوراو بێت.

ج کامیان گەورەترە: ئەگەری ئەوەی پاڵێوراوەکان لەهەردوو تاقیکردنەوەکەدا دەربچێت یان لەهەردووکیاندا بکەون؟ ڕوونیبکەوە.

بەشی

7

سێگۆشەزانی Trigonometry

بەشی حەوتەم

وانەکان

سووکە سەرسووڕانەوە

دەتوانیت ڕوونکردنەوەییەکانی نەخشە سێگۆشەییەکان و هاوئەنجامە سێگۆشەییەکان بەکاربێنی بۆ دروستکردنی نموونەکانی جوڵەی بازنەیی یان ڕەورەوە لە بارە جیاوازەکاندا.

ئایا تۆ ئامادەیت؟

زاراوەکان

هەر زاراوەیەك بەپێی پێناسەکەی کە لەلای چەپ هاتووە ببەستەوە.

1 Sin ی گۆشە — أ ڕێژەی درێژی لای بەرامبەری گۆشەکەیە بۆ درێژی لاتەنیشتەکەی.

2 Cosin ی گۆشە — ب ڕێژەی درێژی لاتەنیشتی گۆشەکەیە بۆ درێژی ژێیەکەی.

3 ژێی سێگۆشەی وەستاو — ج ڕێژەی درێژی ژێیە بۆ درێژی لای بەرامبەر گۆشەکە.

4 tan ی گۆشە — د ڕێژەی لای بەرامبەر گۆشەکەیە بۆ درێژی ژێیەکەی.

هـ لای بەرامبەری گۆشە وەستاوەکەیە.

دابەشکردنی کەرتەکان

دابەشبکە

5 $\dfrac{\frac{3}{5}}{\frac{5}{2}}$ 6 $\dfrac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}}$ 7 $\dfrac{-\frac{3}{8}}{\frac{1}{8}}$ 8 $\dfrac{\frac{2}{3}}{-\frac{7}{4}}$

سادەکردنی برە ڕەگییەکان

برەکە بەسادەترین شێوەی بنووسە.

9 $\sqrt{6}\times\sqrt{2}$ 10 $\sqrt{100-64}$ 11 $\dfrac{\sqrt{9}}{\sqrt{36}}$ 12 $\sqrt{\dfrac{4}{25}}$

لێکدانی دوو ڕادەدار

لێکبدە

13 $(x+11)(x+7)$ 14 $(y-4)(y-9)$ 15 $(2x-3)(x+5)$

16 $(k+3)(3k-3)$ 17 $(4z-4)(z+1)$ 18 $(y+0.5)(y-1)$

هاوئەنجامە تایبەتییەکان

لێکبدە

19 $(2x+5)^2$ 20 $(3y-2)^2$

21 $(4x-6)(4x+6)$ 22 $(2m+1)(2m-1)$

23 $(s+7)^2$ 24 $(-p+4)(-p-4)$

بەشی 7

ڕێبەری خوێندن: تێڕوانین لەسەر بەشەکە

لە رابردوودا

ئەمانەت خوێندووە

- شیکارکردنی ئەو پرسیارانەی سێگۆشە و ڕێژە سێگۆشەییەکانی تێدایە.
- بەکارهێنانی شیتەڵ بۆ شیکارکردنی هاوکێشە دووجاکان.
- بەکارهێنانی ئەو نەخشانەی نموونەیەك بۆ شیکارکردنی پرسیارەکانی ژیانی ڕۆژانە پێکدێنن.
- شیکارکردنی هاوکێشەکان بەجەبری و ڕوونکردنەوەیی.

لەم بەشەدا

ئەمانە فێردەبیت

- شیکارکردنی ئەو پرسیارانەی نەخشە سێگۆشەییەکانیان تێدایە.
- نەخشە سێگۆشەییەکان بۆ دروستکردنی نموونە کە بارەکانی ڕاستی ژیان بنوێنێت.

لە داهاتوودا

دەتوانیت کارامەییەکانی ئەم بەشە بەکاربێنیت لە

- قۆناغی بەرزتردا، لە کاتی خوێندنی جیاکاری و تەواوکاری
- لە وانەکانی تری وەك فیزیا، زیندەزانی و ئابووری.
- دەرەوەی خوێندنگا بۆ خوێندنی دیاردەی ڕووداوەکان. (الظواهر الدورية)

زاراوەکان — *Vocabulary*

زاراوەکان	Vocabulary
فراوانی	Amplitude
خول	Cycle
دووبارە بوونەوە – لەرەلەر	Frequency
کاتی خوولی	Period
نەخشەی خولاوە	Periodic functions
لادانی ڕوو	Phase shift
ڕیزکراوەی خولانەوە	Rotation matrix

ڕۆشناییەك لەسەر زاراوەکان

بۆ ئەوەی لەگەڵ هەندێك لەم زاراوانەدا رابێی کە لەم بەشەدا هاتووە ئەم هەنگاوانە پەیڕەو بکە:

1. واتای وشەی **فراوانی** لە ژیانی ڕۆژانەدا چییە؟ مەبەست لە فراوانی بەندۆڵی کاتژمێر چییە؟
2. واتای وشەی **خول** لە ژیانی ڕۆژانەدا چییە؟ نموونە لەسەر **دیاردەی ڕووداوەکان** بێنەوە.
3. نموونە لەسەر کارێك بێنەوە دووبارە بونەوەی تێدابێت. وەك پاککردنەوەی ددان ڕۆژانە. دەوترێت ڕۆژی دووجار ددانم دەشۆم. باسی ئەو نموونەیە بکە باسمان کرد.
4. بەدەگمەن واتای **ماوەی خوولی** لە ژیانی ڕۆژانەدا بەکاردێت. ئەم دەربڕینە بۆ تۆ چی دەگەیەنێت؟ واتای **نەخشەی خولاوە** چۆن تێدەگەیت؟
5. کاتێك **ڕیزکراوەی خولانەوە** بەکاردێنێت ئەو ئەنجامەی پێشبینی دەکەیت چییە؟

بەشی 7

بیرکاری
بە خوێندنەوە و نووسین



ستراتیژیەتی وانەکە: ئامادەبوون بۆ تاقیکردنەوەی کۆتایی.

بیرکاری بابەتێکی کەڵەکەبووە. بۆیە هەموو ئەو بابەتانەی لەسەرەتای ساڵەوە دەیخوێنیت. تاقیکردنەوەی کۆتایی ساڵ دەیگەڕێتەوە. بۆیە واباشترە بەم شێوەیەی لە خوارەوە هاتووە بۆ خۆ ئامادەکردن بۆ تاقیکردنەوە پلاندانێی:

دوو حەفتە پێش تاقیکردنەوە

- بە تاقیکردنەوەکانی پێشوو و ئەرکی ماڵەوەدا. بچۆوە بۆ ئەوەی ئەو بابەتانەی پێویستن گرنگیان پێبدەی و ئەو پرسیارانەی بە هەڵە شیکارکراون یان شیکارەکانیان ناتەواوە سەر لە نوێ شیکاریان بکەیتەوە.
- ئەو یاسا و سەلمێنراوانەی بۆ ڕۆژی تاقیکردنەوە پێویستە بیانزانی لە لیستێکدا بیان نووسە.
- خۆت لەو پرسیارانە تاقیبکەوە لەسەر شێوەی پرسیاری تاقیکردنەوەکان (تاقیکردنەوەی نموونەیی خۆت ئەنجام بدە).

حەفتەیەک پێش تاقیکردنەوە

- ئەو پرسیارانەی پێشتر بۆ تاقیکردنەوە نموونەییەکە بەکارتهێناون لە وەڵامەکانیان دڵنیابە، ئەگەر لە شیکار کردنی پرسیارەکاندا سەرکەوتوو نەبووی بەدوای نموونەی هاوشێوەدا بگەڕێ و خۆت لەسەر شیکارکردنیان ڕابێنە.
- لەگەڵ یەکێك لە هاوپۆلەکانتدا لەسەر یاسا و سەلمێنراوەکان پرسیار لەیەکتری بکەن، لەو لیستەی کە پێشتر ئامادەتان کردبوو.

ڕۆژی پیش تاقیکردنەوە

- دڵنیابە لە پێداویستییەکانی تاقیکردنەوە وەك پێنووس و ڕاستە و بژمێر (دڵنیابە لە پاتری بژمێرەکەت).

ڕۆژی تاقیکردنەوە

هەوڵبدە

خشتەیەکی خۆ ئامادەکردن بۆ تاقیکردنەوەی کۆتایی ساڵ تێیدا کات دابە شکرابێت دروستبکە.

1-7 یاسای ساین Sine و یاسای کۆساین Cosine

Law of sines and Low of cosines

کێ ئەمە بەکاردەهێنێت؟

ئەندازیارەکان بۆ شیکارکردنی پرسیارەکانی بینادروستکردن یاسای ساین و کۆساین بەکاردەهێنن.

ئامانجەکان

یاسای ساین و کۆساین بەکاردێت بۆ شیکارکردنی سێگۆشە کاری.



لەوکاتەی بورجی پیزا لە ساڵی 1370 ز لە ئیتالیا دروستکراوە. ئەندازیارەکان چەندەها پێشنیار پێشکەش دەکەن بۆ کەمکردنەوەی لارییەکەی.ئەو گۆشەیەی ئەو بورجە لەگەڵ زەوی دروستیکردوە وەستاونییە وەك ئەو شێوازانەی کە بە شێوەیەکی گشتی لە تەلارەکاندا هەیە. بۆیە لەسەر ئەندازیارەکان پێویست بوو لەسەر ئەو سێگۆشانە کاربکەن کە وەستاونین.

لە پۆلی دەیەم فێری چۆنیەتی بەکارهێنانی ڕێژە سێگۆشەییەکان بوویت. بۆ دۆزینەوەی پێوانەکانی گۆشەکانی سێگۆشە گۆشەوەستاو، هەروەها فێری دۆزینەوەی لایەکانی بوویت. بەوکردارەش دەوترێت **شیکارکردنی سێگۆشەی وەستاو**.لەم وانەیەشدا شیکارکردنی سیگۆشە فێردەبێت جۆرەکەی هەر جۆنێك بێت. بۆ ئەوە پێویستت بە هەژمارکردنی ڕێژە سێگۆشەییەکانی ئەو گۆشانە هەیە کە پێوانەکەیان دەگاتە $180°$ بۆت هەیە بژمێر بەکاربێنیت بۆ دۆزینەوەی ئەو بەهایانە.

نموونـــــه 1 دۆزینەوەی ڕێژە سێگۆشەییەکان بۆ گۆشەکراوەکان

بازنەی یەکە بۆ دۆزینەوەی هەر ڕێژەیەکی سێگۆشەیی بەکاربهێنە:

أ $\sin 135°$	ب $\tan 98°$	ج $\cos 108°$
sin(135) .7071067812	tan(98) -7.115369722	cos(108) -.3090169944
$\sin 135° \approx 0.71$	$\tan 98° \approx -7.12$	$\cos 108° \approx -0.31$

خاڵی چاودێری

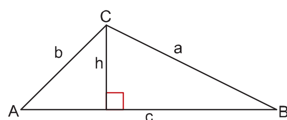
1. بازنەی یەکە بۆ دۆزینەوەی هەر ڕێژەیەکی سێگۆشەیی بەکاربهێنە:

أ $\cos 120°$ ب $\sin (-150°)$ ج $\tan 120°$

دەتوانیت بەرزی سێگۆشە بەکاربێنیت بۆ دۆزینەوەی پەیوەندییەك کەلایەکانی سێگۆشەکە بەیەکەوە ببەستێت. لەسەری سێگۆشەکەوە C بەرزی سێگۆشەکە بۆ سەر $\overline{AB}$ بکێشە. پاڵپشت بەوێنەی بەرامبەر. دەتوانیت بنووسیت

$$\sin\hat{A} = \frac{h}{b} \qquad \sin\hat{B} = \frac{h}{a}$$

$$h = b \sin \hat{A} \qquad h = a \sin \hat{B}$$



لەمەوە دەردەچێت

$$a \sin\hat{B} = b \sin\hat{A}$$

لەمەوش دەردەچێت

$$\frac{\sin \hat{A}}{a} = \frac{\sin \hat{B}}{b}$$

هەروەها دەتوانیت بەرزییەکی تر لە بەرزییەکانی سێگۆشەکە بەکاربێنیت بۆ ڕوونکردنەوەی ئەوەی کە دوو ڕێژە یەکسانەکەی پێشوو دووبارە یەکسانن بە ڕێژەی $\frac{\sin \hat{C}}{c}$.



فێربە و سەرنج بدە

سەلمێنراوی 1-7 یاسای ساین Sin

ئەگەر ABC هەرجۆرە سێگۆشەیەك بێت، درێژی لایەکانی a ، b ، c

بن ئەوا $\frac{\sin \hat{A}}{a} = \frac{\sin \hat{B}}{b} = \frac{\sin \hat{C}}{c}$

دەتوانی یاسای Sin بۆ شیکارکردنی سێگۆشە بەکاربێنی بەزانینی:-

- پێوانەی دوو گۆشە لە گۆشەکانی و درێژی لایەکی.
- درێژی دوو لە لایەکانی و پێوانەی گۆشەیەك لە نێوانیادا نەبێت.

نموونـــــه 2 بەکارهێنانی یاسای Sin

پێوانەی داواکراو بدۆزەوە. درێژییەکەی بۆ نزیکترین بەش لە دەیەك نزیکبکەوە و پێوانەی هەر گۆشەیەك بۆ نزیکترین پلە نزیکبکەوە

أ DF

$$\frac{\sin \hat{D}}{EF} = \frac{\sin \hat{E}}{DF}$$ یاسای Sin

$$\frac{\sin 105°}{18} = \frac{\sin 32°}{DF}$$ لە جیاتی دابنێ

$$DF \times \sin 105° = 18 \times \sin 32°$$ لێکدانی دوولا و دووتێوان

$$DF = \frac{18 \times \sin 32°}{\sin 105°} \approx 9.9$$ هەردوو لا دابەشی sin105 بکە

ب $m\hat{S}$

$$\frac{\sin \hat{T}}{RS} = \frac{\sin \hat{S}}{RT}$$ یاسای Sin

$$\frac{\sin 75°}{7} = \frac{\sin \hat{S}}{5}$$ لە جیاتی دابنێ

$$\sin \hat{S} = \frac{5 \times \sin 75°}{7}$$ هەردوو لا لە 5 بدە

$$m\hat{S} = \sin^{-1}\left(\frac{5 \times \sin 75°}{7}\right) \approx 44°$$ دوگمەی $\sin^{-1}$ دابگرە بۆ هەژمارکردنی پێوانە $\hat{S}$

دەتوانی بژمێری زانستی بۆ پێوانی $\hat{S}$ بەکاربێنە، پاش گۆڕینی بژمێر بۆ ئەوەی بەشێوازی شەستی (پلە) کاربکات لە جیاتی گۆشەی نیوەتیرەیی (بازنەیی) دوگمەی MODE دابگرە پاشان بیخەرە سەر Degree لە دوایدا دووگمەی ENTER و بۆ هەژمارکردنی $m\hat{S}$ یەك لە دواییەك دووگمەی 2^{nd} ، SIN ، 5 ، x ، SIN ، 7 ، 5 ، (، ÷ ، 7 ، (، Enter داگرە.

تێبینی

ئەگەر بژمێرت نەبێ

$\sin 105° \approx 0.96$

$\sin 32° \approx 0.53$

$\sin 44° \approx 0.69$

خاڵی چاودێری

2. **پێوانەی داواکراو بدۆزەوە. هەر درێژیەك بۆ نزیکترین بەش لە دەیەك نزیکبکەوە، پێوانەی هەر گۆشەیەك بۆ نزیکترین پلە بدۆزەوە.**

أ NP (M، N، P؛ 22؛ 88°؛ 39°)

ب $m\hat{L}$ (J، K، L؛ 10؛ 6؛ 125°)

ج $m\hat{X}$ (X، Y، Z؛ 7.6؛ 4.3؛ 50°)

د AC (A، B، C؛ 18؛ 44°؛ 67°)

یاسای Sin ناتوانێت هەموو سێگۆشەیەکمان بۆ شیکاربکات بۆ نموونە ئەگەر دوو لا و گۆشەی نێوانیان نەزانی یان ئەگەر درێژی هەموو لایەکانی زانراوبێت. لەم بارانەدا پێویستە یاسای Cos (کۆساین) بەکاربێنین.

تێبینی

ئەگەر بژمێرت نەبێ

$\sin 88° \approx 0.99$

$\sin 39° \approx 0.63$

$\sin 127° \approx 0.8$

$\sin 125° \approx 0.82$

$\sin 50° \approx 0.76$

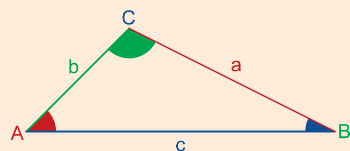
$\sin 67° \approx 0.92$



سەلمێنراوی 1-7 یاساکۆسانی cosine

ئەگەر ABC هەر جۆرە سێگۆشەیەك بێت، درێژی لایەکانی a ، b ، c بن ئەوا

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos \hat{A}$$
$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos \hat{B}$$
$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos \hat{C}$$



یارمەتی

لە یاسای Cos دا گۆشەی بەکارهاتوو لەهەموو یەکسانبوونەکاندا بریتییە لە و گۆشەیەی بەرامبەر لاکەی تری یەکسانبوونەکەیە.

دەتوانی یاسای Cosine بۆ شیکارکردنی سێگۆشە بەکاربێنی بەزانینی:-

- دوو لا و گۆشەی نێوانیان.
- درێژی هەرسێ لایەکەی.

نموونـــــە 3 بەکارهێنانی یاسای Cosine

پێوانەی داواکراو بدۆزەوە، هەر درێژیەك بۆ نزیکترین دەیەك نزیکبکەوە، و پێوانەی هەر گۆشەیەك بۆ نزیکترین پلە نزیکبکەوە.

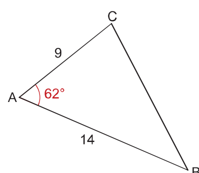
تێبینی

ئەگەر بژمێرت نەبێ

$\cos 62° \approx 0.47$

$\cos 107° \approx 0.29$

أ BC



یاسای Cos $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2(AB)(AC)\cos \hat{A}$

لەجیاتی دابنێ $= 14^2 + 9^2 - 2(14)(9)\cos 62°$

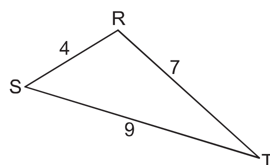
سادەبکە $BC^2 \approx 158.6932$

$BC \approx 12.6$

رەگی دووجا وەربگرە

درێژی $\overline{BC} \approx 12.6$ بەنزیکەیی

ب $m\hat{R}$



یاسای Cos $ST^2 = RS^2 + RT^2 - 2(RS)(RT)\cos \hat{R}$

لەجیاتی دابنێ $9^2 = 4^2 + 7^2 - 2(4)(7)\cos \hat{R}$

سادەبکە $81 = 65 - 56\cos \hat{R}$

$16 = -56\cos \hat{R}$

شیکاربکە $\cos \hat{R} = -\frac{16}{56}$

$m\hat{R} = \cos^{-1}\left(-\frac{16}{56}\right) \approx 107°$

پێوانەی $\hat{R}$ بریتییە $107°$ بەنزیکراوەیی.



3. پێوانەی داواکراو بدۆزەوە، هەر درێژیەك بۆ نزیکترین دەیەك نزیکبکەوە، هەر پێوانەیەك بۆ نزیکترین پلە نزیکبکەوە.

تێبینی

ئەگەر بژمێرت نەبێ

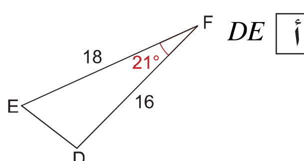
$\cos 21° \approx 0.93$

$\cos 29° \approx 0.87$

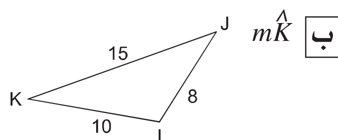
$\cos 34° \approx 0.83$

$\cos 64° \approx 0.43$

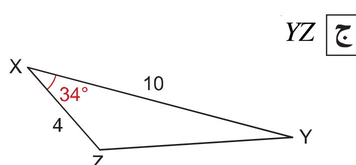
أ DE



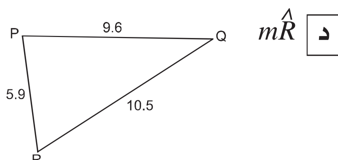
ب $m\hat{K}$



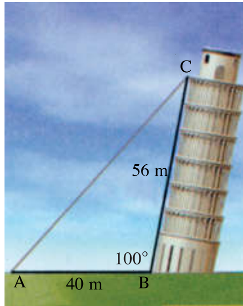
ج YZ



د $m\hat{R}$



نموونـــه 4 جێبەجێکردن لە ئەندازەی بیناسازی



بەرزی بورجی پیزا لە ئیتالیا $56m$ ە لەساڵی 1999 ز گۆشەی بورجەکە گەیشتە $100°$ بۆ ئەوەی بورجەکە نەڕوخێت ئەندازیارێك پێشنیاری ئەوەی کرد لوتکەی بورجەکە بە سیمێك لەگەڵ خاڵێك کە $40m$ لە بنکەکەیەوە دوور بێت ببەستیتەوە. درێژی سیمەکە و پێوانەی ئەو گۆشەیەی لەگەڵ ڕووتەختی زەویەکەدا دروستی دەکات چەندە؟ درێژییەکەی بۆ نزیکترین دەیەك لە مەتر و پێوانەی گۆشەکە بۆ نزیکترین پلە نزیکبکەوە.

هەنگاوی 1 درێژی سیمەکە بدۆزەوە.

$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2(AB)(BC)\cos \hat{B}$ — یاسای Cos

$= 40^2 + 56^2 - 2(40)(56)\cos 100°$ — لەجیاتی دابنێ

$AC^2 = 5513.9438$ — سادەبکە

$AC = 74.3$ — ڕەگی دووجا وەربگرە

هەنگاوی 2 پێوانەی گۆشەی سیمەکە لەگەڵ ڕووی زەویەکەدا بدۆزەوە.

$\frac{\sin \hat{A}}{BC} = \frac{\sin \hat{B}}{AC}$ — یاسای Sin

$\frac{\sin \hat{A}}{56} = \frac{\sin 100°}{74.2559}$ — لەجیاتی دابنێ

$\sin \hat{A} = \frac{56 \times \sin 100}{74.2559}$ — سادەبکە

$m\hat{A} = \sin^{-1}\left(\frac{56 \times \sin 100°}{74.2559}\right) \approx 48°$ — بژمێرە بەکاربێنە بۆ دۆزینەوەی mA

گۆشەی سیمەکە لەگەڵ ڕووی زەویەکە دەکاتە $48°$ بەنزیکی.

ئاگاداربە!

وەڵامەکان نزیك مەکەوە تانەگەیتە ئەنجامی کۆتایی ئەگەر پرسیارەکە لە چەند هەنگاوێك پێکهاتبێ وەڵامی سەرەتایی لەهەزری بژمێرەکە بپارێزە.

تێبینی

ئەگەر بژمێرت نەبێ

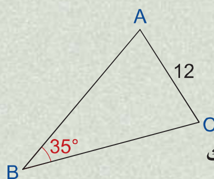
$\cos 100° \approx -0.1736$

$\sin 100° \approx 0.9848$



4. چی دەبێت ئەگەر...؟ ئەندازیارێکی تر پێشنیازی ئەوەی کرد لوتکەی بورجەکە بە سیمێکی بەهێز بخاڵێك $31m$ لە بنکەی بورجەکەوە دووربێت ببەستیەوە درێژی ئەو سیمە چەند دەبێت. درێژییەکە بۆ نزیکترین دەیەك لە مەتر پێوانەی گۆشەکە بۆ نزیکترین پلە نزیکبکەوە.

بیربکەوە و تاوتوێبکە



1. بۆ هەژمارکردنی BC بە یاسای Sin ئایا پێویستیت بە زانیاری زیاتر هەیە؟ ئەگەر وەڵامەکەت بەڵێ بوو ئەو زانیارییە چییە؟

2. ڕێکخەر بە خشتەکە بنووسەوە و تەواوی بکە. بۆ شیکارکردنی هەر سێگۆشەیەك کام یاسا بەکاردەهێنێت، دیارییبکە، پاشان نموونەیەك بە وێنە بنووسە.



پێدراوەکانی سێگۆشەکە	یاسا	نموونە
پێوانەی دوو گۆشە و درێژی لایەك		
درێژی دوو لا و پێوانەی گۆشەیەك لە نێوانیاندا نەبێت.		
درێژی دوو لا و پێوانەی گۆشەی نێوانیان		
درێژی سێ لا		

1-7 ڕاهێنانەکان

ڕاهێنانی ئاراستەکراو

پڕوانە نموونە 1

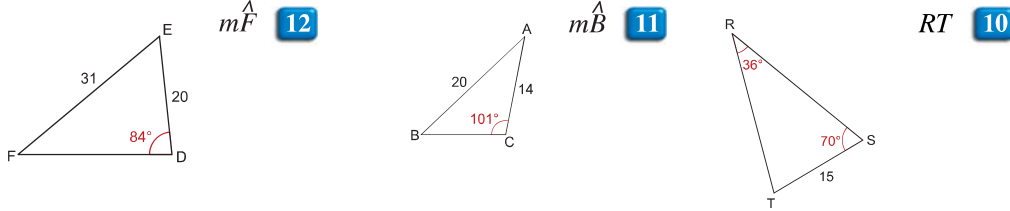
بژمێری زانستی بۆ دۆزینەوەی هەر ڕێژەیەکی سێگۆشەیی بەکاربهێنە وەڵامەکەت بۆ نزیکترین بەش لەسەدە نزیکبکەوە

1. $\sin 100^\circ$
2. $\sin 167^\circ$
3. $\tan 92^\circ$
4. $\tan 141^\circ$
5. $\cos 133^\circ$
6. $\sin 150^\circ$
7. $\sin 147^\circ$
8. $\tan 164^\circ$
9. $\cos 156^\circ$

پڕوانە نموونە 2

پێوانەی داواکراو بدۆزەوە، درێژییەکە بۆ نزیکترین دەیەك، و پێوانەی گۆشەکە بۆ نزیکترین پلە نزیکبکەوە

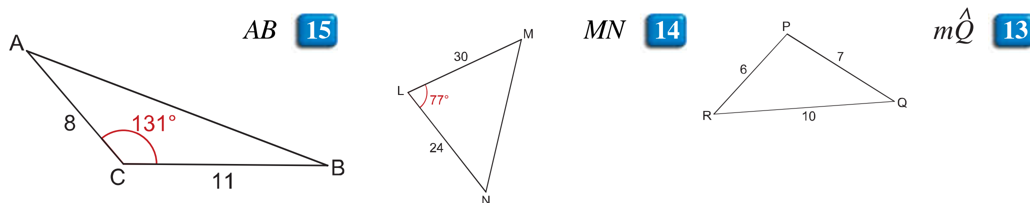
10. RT
11. $m\hat{B}$
12. $m\hat{F}$



پڕوانە نموونە 3

پێوانەی داواکراو بدۆزەوە، درێژییەکە بۆ نزیکترین دەیەك و پێوانەی گۆشەکە بۆ نزیکترین پلە نزیکبکەوە.

13. $m\hat{Q}$
14. MN
15. AB



پڕوانە نموونە 4

16. **دارتاشی** دارتاشێك چوار چێوەیەکی لە 3 پارچەدار دروستکرد. درێژییەکانیان بریتیبوون لە $20cm$ و $24cm$ و $30cm$ پێوانەی هەر گۆشەیەك لە گۆشەکانی سێگۆشەکە چەندە؟ وەڵامەکانت بۆ نزیکترین پلە نزیکبکەوە.

ڕاهێنان و شیکارکردنی پرسیارەکان

ڕاهێنانی ئازاد

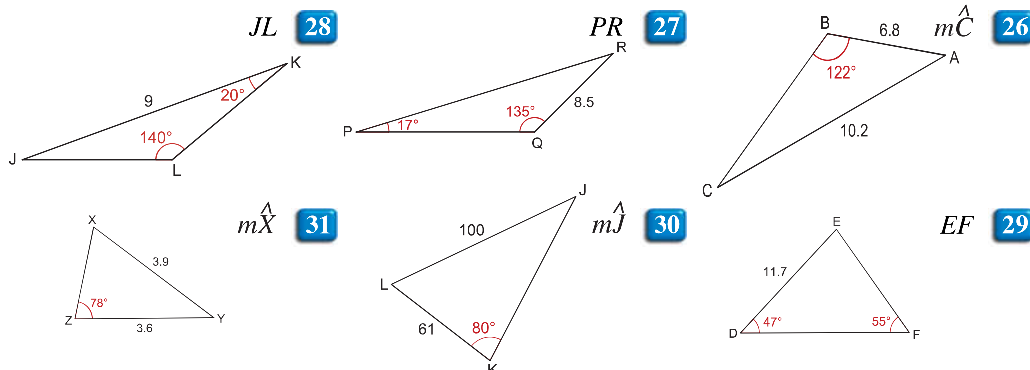
بۆشیکارکردنی ڕاهێنانەکان	سەیری نموونە بکە
25–17	1
31–26	2
37–32	3
38	4

بەبەکارهێنانی بازنەی یەکە ئەمانەی خوارەوە بدۆزەوە

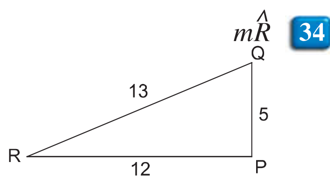
17. $\cos 180^\circ$
18. $\tan(-150^\circ)$
19. $\tan 150^\circ$
20. $\sin 150^\circ$
21. $\sin(-120^\circ)$
22. $\cos 90^\circ$
23. $\tan 270^\circ$
24. $\cos(-135^\circ)$
25. $\sin 90^\circ$

پێوانەی داواکراو بدۆزەوە، درێژییەکە بۆ نزیکترین دەیەك، و پێوانەی گۆشەکە بۆ نزیکترین پلە نزیکبکەوە

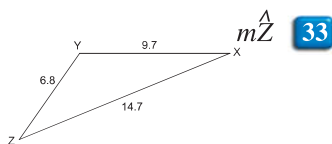
26. $m\hat{C}$
27. PR
28. JL
29. EF
30. $m\hat{J}$
31. $m\hat{X}$



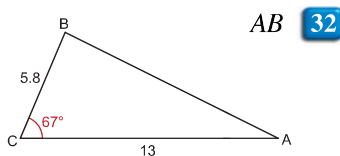
34 $m\hat{R}$



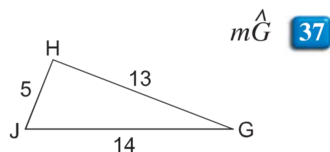
33 $m\hat{Z}$



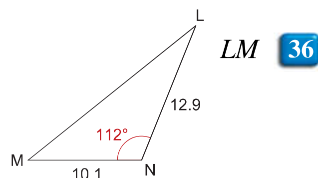
32 AB



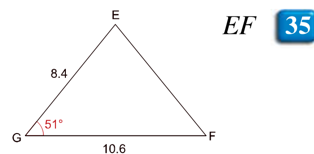
37 $m\hat{G}$



36 LM



35 EF



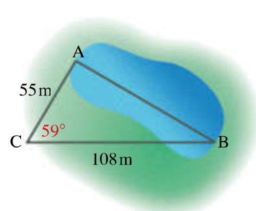
دەروازەیەک

لەسەر سستەمی چاودێری

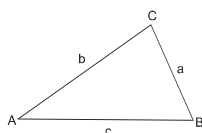


زۆربەی کردارەکانی چاودێری بە هۆی سستەمی جیهانی GPS ئەنجام دەدرێت. ئەو سستەمە چەند مانگێکی دەستکرد بۆ دیاریکردنی شوێنەکان بەکاردێنێ

38 **چاودێری** بۆ ئەوەی چاودێرێك درێژی دەریاچەیەك بزانێت 3 خاڵی A و B و C دیاریکرد وەك لە وێنەی بەرامبەردا دیارە. درێژی $\overline{AB}$ بدۆزەوە نزیککرابێتەوە بۆ نزیکترین دەیەك لە مەتر؟ و پێوانەی $\hat{B}$ گۆشەی B نزیکرابێتەوە بۆ نزیکترین پلە چەندە؟



بۆ شیکارکردنی پرسیارەکانی 39-42 سێگۆشەی بەرامبەر بەکاربێنە. درێژییەکان نزیکبکەوە بۆ نزیکترین دەیەك و گۆشەکان بۆ نزیکترین پلە.



39 $m\hat{A} = 74°$ ، $m\hat{B} = 22°$ ، $b = 3.2$ cm ، a بدۆزەوە

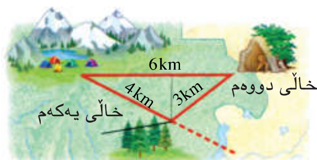
40 $m\hat{C} = 100°$ ، $a = 9.5$m ، $b = 7.1$ m، c بدۆزەوە

41 $a = 2.2$m ، $b = 3.1$m ، $c = 4$m ، $m\hat{B}$ بدۆزەوە.

42 $a = 10.3$cm ، $c = 8.4$cm ، $m\hat{A} = 45°$ ، $m\hat{C}$ بدۆزەوە.

43 **بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە** وادابنێ پێوانەی هەر سێ گۆشەکانی سێگۆشەیەك دەزانی. و دەتەوێت درێژی لایەکانی بدۆزیەوە ئایا دەتوانیت یاسای Sin یان Cos بەکاربێنیت بۆ گەیشتن بەو مەبەستە؟ بەڵگە بۆ وەڵامەکەت بهێنەوە.

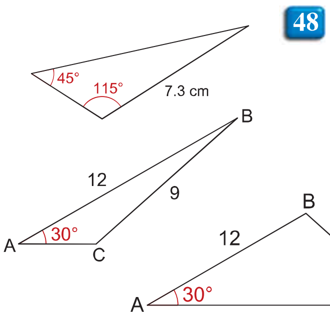
44 **چی دەبێت ئەگەر...؟** یاسای Cos چ گۆڕانێکی بەسەردا دێت ئەگەر گۆشەکە وەستاوبێت؟



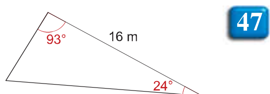
45 **پێشبڕکێ** وێنەی بەرامبەر نەخشەی یەکێك لە پێشبڕکێیەکانی ڕۆیشتن ڕووندەکاتەوە. پێویستە پێشبڕکێکەرەکە چەند پلە پێچ بکاتەوە پاش گەیشتنی بە خاڵی چاودێری یەکەم بۆ ئەوەی ڕووبکاتە خاڵی چاودێری دووەم؟ وەڵامەکەت نزیك بکەوە ببۆ نزیکترین پلە.

فرەهەنگاو چێوەی هەر سێگۆشەیەك هەژماربکە. وەڵامەکەت بۆ نزیکترین دەیەك نزیکبکەوە.

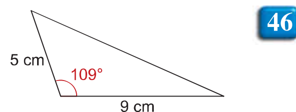
48



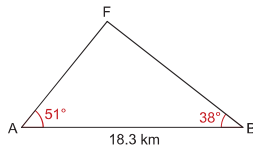
47



46



49 لێرەدا بارێکی لێتێچوون لە بارەکانی جێبەجێکردنی یاسای Sin داهەیە. ئەویش ئەو بارەیە کە لە سێگۆشەیەکدا پێوانەی یەکێك لە گۆشەکان و درێژی لایەکی بەرامبەر گۆشەکە و درێژی لایەکی تر بزانیت. بەڵام درێژی لای بەرامبەرە کورترە لە درێژی لایەکەی تر. ئەوا دووبار هەیە بۆ ئەم جۆرە سێگۆشانە. دوو بەهای گونجاو بۆ $m\hat{C}$ وەڵامەکەت بۆ نزیکترین پلە نزیکبکەوە (یارمەتی: لەکاتی بەکارهێنانی بژمێری ڕوونکردنەوەیی بۆ دۆزینەوەی گۆشەیەك sin ـەکەی زانراوبێت پێوانەی گۆشەیەکی تیژی ئەوتۆت دەداتی کە مەرجەکە بێنێتەدی. ئەو گۆشەیە و گۆشە پڕکەرەکەی بەهەندوەربگرە).



50 دوو تیمی بەرگری شارستانی کە لە دووخاڵی B ، A دابوون، ئاگادار کرانەوە لە خاڵی F دا ئاگرێك کەوتووەتەوە.

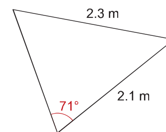
أ $m\widehat{CBD}$ بدۆزەوە.

ب دووری نێوان هەر تیمێك و شوێنی ئاگرەکە هەژماربکە. وەڵامەکەت بۆ نزیکترین کیلومەتر نزیکبکەوە.

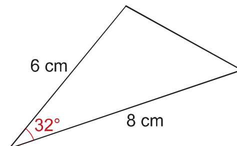
ج کۆپتەری ئاگر کوژێنەوە بەخێرایی $150\,km/h$ دەفرێت. ئەو کاتە چەندە کە تیمەکان قازانج دەکەن ئەگەر کۆپتەرەکە لە خاڵی A وە بفرێت لە جیاتی خاڵی B .

دیاریبکە ئایا دەتوانیت یاسای Sin یان یاسای Cos وەك هەنگاوی یەکەم بۆ شیکارکردنی هەر سێگۆشەیەك بەکاربێنیت.

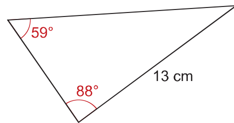
51



52



53

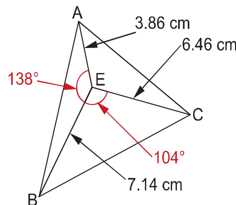


54 پۆوتانی سەرەکانی سێگۆشەی ABC بریتییە لە $A(0, 3)$ ، $B(3, 1)$ ، $C(-3, -1)$

أ AB ، BC ، CA بدۆزەوە

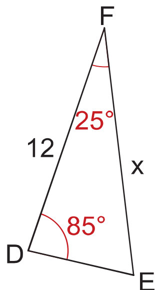
ب کام یەکێك لە گۆشەکانی سێگۆشە گەورەترین پێوانەی هەیە؟

ج پێوانەی ئەو گۆشەیە بدۆزەوە.



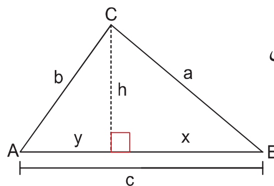
55 **هونەر** کلار شێوازێکی پێکهێنا بۆ ڕەنگکردنی شووشە وەك لە وێنەی بەرامبەردا دایە. BC و AB هەژماربکە پاشان $m\widehat{ABC}$ بدۆزەوە. درێژییەکە بۆ نزیکترین بەش لە سەد و گۆشەکە بۆ نزیکترین پلە نزیکبکەوە.

56 **هەڵە لە شیکردنەوە** داوا لە خوێندکاران کرا درێژی x لە سێگۆشەی بەرامبەردا بدۆزنەوە. ئەم دوو وەڵامەیان پێشنیارکرد. کامیان هەڵەیە؟ هەڵەکە ڕوونبکەوە.



بەپێی یاسای sin	بەپێی یاسای sin
$\frac{\sin85}{x}=\frac{\sin25}{12}$	$\frac{\sin85}{x}=\frac{\sin70}{12}$
$x\sin25=12\sin85$	$x\sin70=12\sin85$
$x=\frac{12\times\sin85^\circ}{\sin25^\circ}\approx28.3$	$x=\frac{12\times\sin85^\circ}{\sin70^\circ}\approx12.7$

57 سەلماندنی یاسای Cos لە سێگۆشەیەکی گۆشەتیژ



دراو: ABC سێگۆشەیەکە هەموو گۆشەکانی تیژە و درێژی لایەکانی بریتین لە a ، b ، c

داواکراو : $a^2=b^2+c^2-2bc\ x\ \cos\hat{A}$

سەلماندن: لە خاڵی C وە ئەستونێك بۆ سەر $\overline{AB}$ بکێشە. و سێگۆشەکە دەبێتە **2** سێگۆشەی وەستاو **1** و **2** وەستاو هێمای h بۆ بەرزییەکە دابنێ لای $\overline{AB}$ دەکات دوو بەشەوە. درێژی یەکەم x و درێژی دووەم y بێت. بە پێی سەلمێنراوی فیساغورس دەتوانین بنووسین.

لە سێگۆشەی 1 دا $a^2=h^2+y^2 \ \dots\ (1)$

لە سێگۆشەی 2 دا $b^2=h^2+x^2 \ \dots\ (2)$

لەجیاتی y لە هاوکێشەی 1 : (x -2) دابنێ

$a^2=h^2+(x\text{-}2)^2 \ \dots\ (3)$

$a^2=(h^2+x^2)+c^2\text{-}2cx$

لەجیاتی h^2+x^2 دابنێ b^2

$a^2=b^2+c^2\text{-}2cx \ \dots\ (4)$

لەسێگۆشەی 2 دا: $\cos\hat{A}=\frac{x}{b}$

$x=b\cos\hat{A}$

لەجیاتی دانان لە 4 ئەنجامەکە دێتەدی

$a^2=b^2+c^2\text{-}2bc\cos\hat{A}$





58 **بنووسە** ئایا دەتوانیت یاسای Sin بۆ شیکارکردنی سێگۆشەی بەرامبەرت بەکاربێنیت؟ وەڵامەکەت بەبەڵگە ڕوونبکەوە.



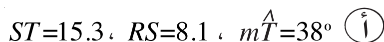
ئامادەکردن بۆ تاقیکردنەوە

59 کام لەمانەی خوارەوە نزیکترین بەهایە بۆ درێژی $\overline{AB}$ ؟



(أ) 5.5cm (ب) 14.4cm (ج) 7.5cm (د) 22.2cm

60 کام لەم کۆمەڵە زانیارییانە وادەکەن هەژمارکردنی بەهای x بەیاسای ساین ئەنجام بدرێت.



(أ) $m\hat{T}=38^\circ$ ، $RS=8.1$ ، $ST=15.3$

(ب) $RS=4$ ، $m\hat{S}=40^\circ$ ، $ST=9$

(ج) $m\hat{R}=92^\circ$ ، $m\hat{S}=34^\circ$ ، $ST=7$

(د) $m\hat{R}=105^\circ$ ، $m\hat{S}=44^\circ$ ، $m\hat{T}=31^\circ$



61 ئەدازیارێك بینی ڕووی هەرەمێك گۆشەیەك لەگەڵ ڕووی زەویدا دروستدەكات پێوانەكەی 135° ــە. هەروەها بینی پێوانەی ئەو بەرزە گۆشەیەی لوتكەی هەرەمەكە لەگەڵ خاڵێك كە 100m لە بنكەكەیەوە دوور دەكاتە 25°. درێژی لای $\overline{xy}$ چەندە؟

(أ) 48m (ب) 81m (ج) 124m (د) 160m



بەرەنگاری و فراوانکردن

62 **فرەهەنگاو** 3 پەپك پێكەوە نوسێنران وەك لە وێنەی بەرامبەردا دیارە، نیوەتیرەی پەپكەكان بریتی بوون لە 2cm، 3cm، 4cm لە سێگۆشەی ABC دا $m\widehat{ACB}$ بدۆزەوە. وەڵامەكەت بۆ نزیكترین پلە نزیكبكەوە.

63 ڕاستەهێڵی ℓ بە دووخاڵی $(-1, 1)$، $(1, 3)$ دا دەڕوات، ڕاستەهێڵی m بە دووخاڵی $(-1, 1)$ و $(3, 2)$ دا دەڕوات. پێوانەی ئەو گۆشە تیژەی دوو ڕاستەهێڵەكە دروستی دەكەن هەژماربكە وەڵامەكەت بۆ نزیكترین پلە نزیكبكەوە.

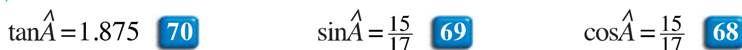
64 **دەریاوانی** بەندەری B بە دووری 5km لە باشووری بەندەری A ەوەیە. كەشتیەك لە بەندەری A دەستی بە جوولە كرد بە ئاڕاستەی باكوور -32° ڕۆژهەڵات خێراییەكەی 6km/h. كەشتییەكەی دوای 45 خولەك چەند دوورە لە خاڵی B ەوە. وەڵامەكەت بۆ نزیكترین دەیەك لە كیلۆمەتر نزیكبكەوە.

پێداچوونەوەی لولپێچی

لەهەر شێوازێكدا، ئەو ژمارەیە بنووسە كە پلەكەی n بێت (پۆلەكانی پێشوو)

65 $3, 6, 9, 12, 15, \ldots$ **66** $3, 5, 7, 9, 11, \ldots$ **67** $4, 6, 8, 10, 12, \ldots$

ڕێژەی سێگۆشەییەكان بەكاربێنە بۆ دیاریكردنی گۆشەی $\hat{A}$ لە هەر بارێكدا (پۆلەكانی پێشوو)



68 $\cos\hat{A}=\frac{15}{17}$ **69** $\sin\hat{A}=\frac{15}{17}$ **70** $\tan\hat{A}=1.875$

بژمێری ڕوونكردنەوەیی بەكاربێنە بۆ دۆزینەوەی پێوانەی گۆشەتیژی A لەهەر پرسیارێكدا. وەڵامەكەت بۆ نزیكترین بەشی لە هەزار نزیكبكەوە.

71 $\sin\hat{A}=0.89$ **72** $\cos\hat{A}=0.89$ **73** $\tan\hat{A}=2.05$

7–2

نەخشە سێگۆشەییەکان

Trigonometric Functions



ئامانجەکان

جیاکردنەوەی نەخشە خولییەکان، جیاکردنەوەی نەخشە سێگۆشەیەکان و کێشانی ڕوونکردنەوەییان.

زاراوەکان Vocabulary

نەخشەی خولی (الدالة الدورية) Periodic function

نەخشەی سێگۆشەیی Trigonometric function

خول Cycle

کاتی خوولاو (الزمن الدوري) Period

فراوانی Amplitude

لەرەلە Frequency

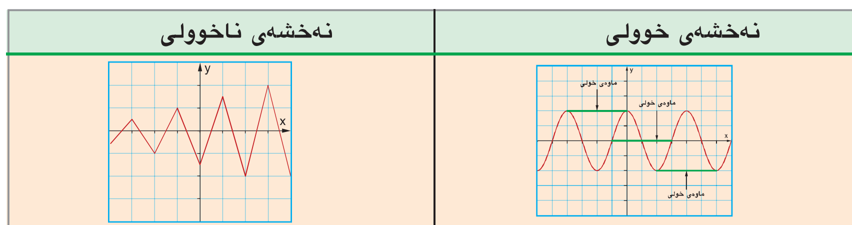
لادانی ڕوو Phase shift

بۆ چی ئەمە فێر دەبین؟

دەتوانیت دیاردە خولییەکان بە بەکارهێنانی نەخشە سێگۆشەییەکان بنوێنرێن، وەك شەپۆلە دەنگییەکان (تەماشای نموونەی 3 بکە).

نەخشەی سێگۆشەیی Trigonometric function نەخشەیەکە ڕێساکەی بڕێکی سێگۆشەییە نەخشە سێگۆشەییە بنەڕەتییەکان سیانن **نەخشەی ساین Sine function** $f(x) = \sin x$ و **نەخشەی کۆساین** cosine Function $f(x) = \cos x$ و **نەخشەی تان Tangent function** $f(x) = \tan x$ کاتێك x پێوانەی گۆشەکەبێت بە گۆشەی نیوەتیرەی radian نەخشە سێگۆشەییەکان بەوە جیادەکرێنەوە، کە بەهایەکانیان بە شێوەیەکی خولی دووبارە دەبنەوە. نەخشەی Sine پاسادانی $\sin(x + 2\pi) = \sin x$ دەکات ئەمەش ئەوە دەگەیەنێت ئەم نەخشەیە هەمان بەهای دەبێت کاتێك x لە ماوەی $[0, 2\pi]$، $[2\pi, 4\pi]$ دا دەبێت. دەتوانین ئەمە بەم شێوەیە دەرببڕین، نەخشەی Sinx خولایەوە و کاتی خوولەکەی بریتییە لە 2π .

نەخشەی دووبارەبووە Periodic function ئەو نەخشەیەیە بەهایەکانی لە ماوە ڕێکەکاندا دووبارە دەبنەوە بەو ماوە ڕێکانەش دەوترێت **خول Cycles** هەموو خولەکان یەك درێژیان هەیە. پێی دەووترێت **کاتی خولی Period** سەرەنجی ئەم ڕونکردنەوانە بدە یەکێکیان خولییە ئەویتریان خولی نییە دەبینیت خولەکە دەتوانێت لە هەر خاڵێکی چەماوەی نەخشەکەوە دەستپێبکات.

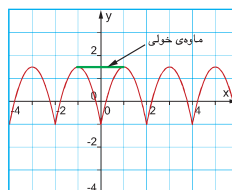


نەخشەی خولی	نەخشەی ناخولی

نموونە 1 جیاکردنەوەی نەخشە خوولییەکان

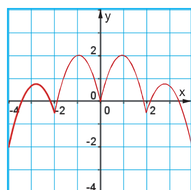
دیاریبکە نەخشەکە خولییە یان نا، ئەگەر نەخشەکە خوولیبووە بوو ماوەی خولییەکەی دیاریبکە

أ



شێوازەکە بە شێوەیەکی ڕێکوپێك دووبارە دەبێتەوە کەوا لە نەخشەکە دەکات نەخشەیەکی خوولی بێت وکاتی خوولییەکەی 2 دەبێت

ب



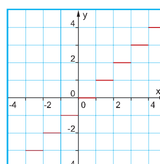
شێوازێك نییە بە ڕێك و پێکی دووبارە بێتەوە هەرچەندە ڕوونکردنەوەییەکە چەند هاوچێبونێکی تێدایە. نەخشەکە خوولی نییە.



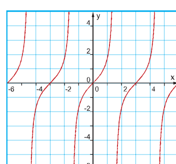
خاڵی چاودێری

1. دیاریبکە نەخشەکە خولییە یان نا ئەگەر خولی بوو، ماوەی خولییەکە دیاریبکە.

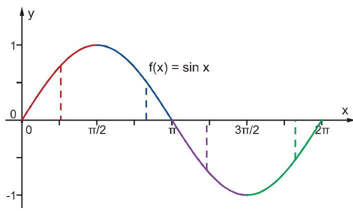
أ



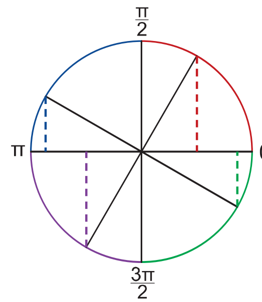
ب



نەخشە سێگۆشەییە بنەڕەتییەکانی خوولین دەتوانیت چەماوەی نەخشەی $f(x)=\sin x$ لە ڕووتەختی پۆوتاندا بەبەکارهێنانی پۆوتانی y بۆ ئەو خاڵانەی دەکەونە سەر بازنەی یەکە دروستبکەیت، کاتێك x گۆشەی تەوەری θ لەباری نموونەیدا بنوێنێت.



y	$x(=\theta)$
$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\pi}{3}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$
$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{4\pi}{3}$
$-\frac{1}{2}$	$\frac{11\pi}{6}$



دەتوانیت ڕوونکردنەوەی نەخشەی $f(x)=\cos x$ بەبەکارهێنانی پۆوتانی x بۆ خاڵەکانی سەریەکەی بازنەکە بکێشیت. **فراوانی Amplitude** نەخشەی خولی بریتییە لە نیوەی جیاوازی نێوان گەورەترین بەهاو بچوکترین بەهای. فراوانی هەمیشە ژمارەیەکی موجەبە. فراوانی هەریەکە لە دوو نەخشەی Sin و Cos بریتییە لە $1=\frac{1-(-1)}{2}$ بەڵام فراوانی نەخشەی tangent پێناسەنەکراوە



سیفەتەکانی چەماوەی نەخشە سێگۆشییەکان

نەخشە	$y=\sin x$	$y=\cos x$	$y=\tan x$
ڕوونکردنەوەی نەخشەکە (چەماوەکەی)			
بوار	R	R	$\{x / x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in I\}$
مەودا	$[-1, 1]$	$[-1, 1]$	R
کاتی خوولی	2π	2π	π
فراوانی	1	1	پێناسە نەکراو

ڕۆشنایی

هەردوو چەماوەی نەخشەی Sin و tan بە خاڵی بنەڕەتدا دەڕۆن بەڵام چەماوەی نەخشەی Cos تەوەرەی y لە 1 دا دەبڕێت.

دەتوانیت چەماوەکانی نەخشە سێگۆشەییە بنەڕەتییەکان بۆ کێشانی وێنەی ڕوونکردنەوەیی $y=a\sin bx$، $y=a\cos bx$، $y=a\tan bx$ بەکاربێنیت بیرت بێت. کە a ڕاکێشانی ستونی دەگەیەنێت کاتێك($|a|>1$) یان چوونەوەیەکی ستوونییە کاتێك ($0<|a|<1$) ئەمەش دەبێتە هۆی گۆڕانی فراوانی.

ئەگەر a سالب بێت، پێویستە جێگۆڕکێ بە ڕوونکردنەوە بکرێت بە وێنەدانەوەیەکی ئاسۆیی دەنوێنێت، b نیشانەی کشانەوە یان چوونەوەیەکی ئاسووین وکاتی خوولییەکە دەگۆڕێت.



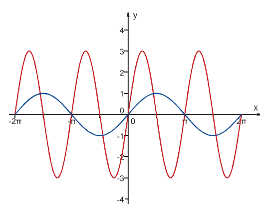
جێگۆڕکێ ڕوونکردنەوەییەکانی نەخشە سێگۆشەییەکان

لە نەخشە سێگۆشەییەکانی $y=a\sin bx$ $y=a\cos bx$ $y=a\tan bx$

نەخشە	فراوانی	ماوەی دوبارەبوونەوە	دەرکەنارەکان
$y=a\sin bx$	$\lvert a\rvert$	$\frac{2\pi}{\lvert b\rvert}$	دەرکەناری نییە
$y=a\cos bx$	$\lvert a\rvert$	$\frac{2\pi}{\lvert b\rvert}$	دەرکەناری نییە
$y=a\tan bx$	پێناسە نەکراوە	$\frac{\pi}{\lvert b\rvert}$	دەرکەناری ستوونیەکان لە $x=\frac{\pi}{2\lvert b\rvert}+\frac{k\pi}{\lvert b\rvert}$ کاتێك $k\in I$

نموونــــــه 2 جێگۆڕکێی نەخشە سێگۆشەییەکان

أ **چەماوەی نەخشەی Sin بەکاربێنە بۆ وێنەکێشانی نەخشەی $g(x) = 3\sin 2x$ فراوانی و مەودای نەخشەکە دیاریبکە.**



هەنگاوی 1 فراوانی و ماوەی کاتی خولی دیاریبکە.

لەبەرئەوەی $a = 3$ کەواتە فراوانییەکەی $|a| = |3| = 3$

لەبەرئەوەی $b = 2$ کەواتە فراوانییەکەی $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{|2|} = \pi$

هەنگاوی 2 وێنەی ڕونکردنەوەییەکەی بکێشە.

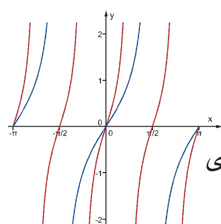
پێویستە چەماوەی نەخشەی بنەڕەت بەهاوکۆلکەی 3 رابکێشیت. و چوونەوەیەکی ئاسۆیی بە هاوکۆلکەی $\frac{1}{2}$ بۆ بکەیت. چەماوەی نەخشەی بنەڕەت تەوەری ئاسۆیی لە چەند جارەکانی π دەبڕێت، هەروەها چەماوەی نەخشەی g تەوەری ئاسۆیی لە چەند جارەکانی $\frac{\pi}{2}$ دا دەبڕێت. گەورەترین بەهای نەخشەی g لە 3 داو بچووکترین بەهای لە -3 دا دەبێت.

ب **چەماوەی نەخشەی *tan* بەکاربێنە بۆ وێنەکێشانی نەخشەی $h(x) = \tan 2x$ کاتی خولییەکەی و یەکتربڕینە ئاسۆییەکان و دەرکەنارەکانی دیاریبکە.**

هەنگاوی 1 کاتی خولییەکەی دیاریبکە.

لەبەرئەوەی $b = 2$ کەواتە کاتی خوولییەکەی بریتییە لە $\frac{\pi}{|b|} = \frac{\pi}{|2|} = \frac{\pi}{2}$

هەنگاوی 2 یەکتربڕین لەگەڵ تەوەرەی ئاسۆیی بدۆزەوە یەکەم یەکتربڕین لە $x = 0$دا دەبێت. و لەبەر ئەوەی کاتی خوولییەکەی نەخشەکە بریتییە لە $\frac{\pi}{2}$ بۆ یەکتر بڕینەکان لەگەڵ تەوەرەی ئاسۆیدا لە $x = k\frac{\pi}{2}$ دا دەبێت. کاتێك $k \in \mathrm{I}$



هەنگاوی 3 دەرکەنارەکان دیاریبکە لەبەر ئەوەی $b=2$ بۆیە دەرکەنارە ستونییەکانی لە $x = \frac{\pi}{2|2|} + \frac{k\pi}{|2|}$ یان $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$ دا دەبێت.

هەنگاوی 4 بەبەکارهێنانی ئەو زانیاریانەی پێشوو چەماوەی نەخشەی h بکێشە



.2 **أ** چەماوەی نەخشەی Cos بەکاربێنە بۆ وێنە کێشانی نەخشەکە $g(x)=\frac{1}{3}\cos 2x$ فراوانی و کاتی خولییەکەی بۆ ئەو نەخشەیە دیاریبکە.

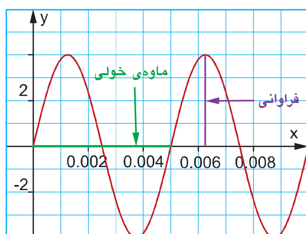
ب چەماوەی نەخشەی tan بەکاربێنە بۆ وێنەکێشانی نەخشەکە $h(x)=3\tan\frac{1}{2}x$ و کاتی خولییەکەی بۆ ئەوەی نەخشەکە و یەکتر بڕینە ئاسۆییەکان و دەرکەنارەکان بدۆزەوە.

دەتوانیت هەردوو نەخشەی Sin و Cos وەك نموونە بۆ لێکۆلینەوەی دیاردە سروشتییەکان بەکاربێنیت وەك شەپۆلە دەنگییەکان دەنگە جیاوازەکان شەپۆلی جیا جیا دروستدەکەن. **لەرەلەرەکان** **Frequency** بۆ ناسینەوەی دەنگەکان بەکاردێت. لەرەلەر بریتییە لە ژمارەی خولەکان لە یەکەیەکی کاتدا، ئەویش هەڵگەڕاوەی کاتی خولانەوەکەی. بۆ پێوانە کردنی لەرەلەرەکان هیرتز Hz بەکاردێت. بۆ نموونە؛ کاتێك دەوترێت دەنگێك بە لەرەلەری 440 هێرتزە، هێرتز مانای وایە شەپۆلی دەنگەکە 440 جار لە چرکەیەکدا دووبارە دەبێتەوە.



نموونــــە 3 جێبەجێکردن لە زانستی دەنگدا

نەخشەی Sin بەکاربێنە بۆ وێنەکێشانی شەپۆلێکی دەنگ کاتی خولییەکەی 0.005 S وفراوانییەکەی 4 cm بێت لەرلەری ئەو شەپۆلە بدۆزەوە.



تەوەری ئاسۆیی بۆ چەند یەکەیەك ڕەنووسی بکە یەکە 0.001 چرکە بنوێنێت. کاتی خوولییەکەی 0.005 چرکە دەخایەنێت تاخولێکی تەواو دروستبکات. بەڵام فراوانی بە دوو بەهای گەورەترین و بچووکترین دیاریدەکرێت. لەبەر ئەوەی لەرلەرکەی یەکسانە بە هەڵگەڕاوەی کاتی خولییەکەی. بۆیە بەهایەکەی بریتییە لە $\frac{1}{0.005} = 200\,Hz$ لەرلەری دەنگەکە 200 هێرتزە.



3. نەخشەی Sin بەکاربێنە بۆ وێنەکێشانی ئەو شەپۆڵە دەنگەی ماوەی دووبارە بوەکەی 0.004 S و فراوانییەکەی 3.0 m لەرلەری شەپۆلی ئەو دەنگە بە هێرتز بدۆزەوە

دەتوانرێت هەردوو نەخشەی Sin و Cos جێگۆڕکێ پێبکرێت بە ڕاکێشان بۆ دەستکەوتنی $y=\sin(x-h)+k$ یان $y=\cos(x-h)+k$ لەبیرت بێت ڕاکێشانی چەماوەکە k یەکە بە ستوونی بۆ سەرەوە دەبێت ئەگەر k موجەب بێت وە بۆ خوارەوە دەبێت ئەگەر سالب بێت.

لادانی ڕوو (انحراف الطور) Phase Shitf بۆ نەخشەیەکی دووبارەبووەوە بریتییە لە ڕاکێشانی ئاسۆیی چەماوەکە، لادانی ڕوو h یەکە بۆ لای ڕاست دەبێت ئەگەر h موجەب و بۆ لای چەپ دەبێت ئەگەر h سالب بێت.

نموونــــە 4 دیاریکردنی لادانی ڕوو بۆ هەر دوو نەخشەی Sin و Cos

ڕوونکردنەوەیی نەخشەی $f(x)=\sin x$ بەکاربێنە بۆ وێنەکێشانی نەخشەی $g(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ یەکتربڕینەکان لەگەڵ تەوەری ئاسۆیی و لادانی ڕوو دیاریبکە.

هەنگاوی 1 فراوانی و کاتی خوولی دیاریبکە

لەبەرئەوەی $a=1$ بۆیە فراوانی $|a|=|1|=1$

لەبەرئەوەی $b=1$ کاتی خوولی بریتییە $\frac{2\pi}{|b|}=\frac{2\pi}{|1|}=2\pi$

هەنگاوی 2 لادانی ڕوو بدۆزەوە.

$x+\frac{\pi}{2}=x-\left(-\frac{\pi}{2}\right)$، h دیاریبکە

لەبەر ئەوەی $h=-\frac{\pi}{2}$ بۆیە لادانی ڕوو بریتییە لە $\frac{\pi}{2}$ بۆ لای چەپ. لەمەوە دەستدەکەوێت کە هەموو یەکتربڕینەکانی وێنەکە $\frac{\pi}{2}$ یەکە بۆ لای چەپ ڕاکێشراوە.

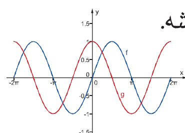
هەنگاوی 3 یەکتربڕینە ئاسۆییەکان دیاریبکە.

لەبەر ئەوەی نەخشەی بنەڕەت لە $x=k\pi$ دا تەوەری ئاسۆیی دەبڕێت کاتێك $k\in I$ بۆیەش نەخشەکە لە $x=-\frac{\pi}{2}+k\pi$ دا تەوەری ئاسۆیی دەبڕێت.

هەنگاوی 4 گەورەترین و بچووکترین بەها دیاریبکە.

نەخشەکە گەورەترین یان بچوکترین بەها وەردەگرێت ئەگەر x لە ناوەڕاستی یەکتر بڕینەکان بێت لەگەڵ تەوەرەی ئاسۆییدا. گەورەترین بەهای نەخشەکە یەکسانەبە 1 لە $x=2k\pi$ بچوکترین بەهای نەخشەکە یەکسانە بە -1 لە $x=\pi+2k\pi$ کاتێك $k\in I$.

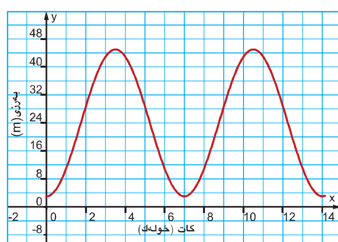
هەنگاوی 5 بەبەکارهێنانی زانیارییەکان وێنەی چەماوەی نەخشەکە بکێشە.





4. چەماوەی نەخشە $f(x)=\cos x$ بەکاربێنە بۆ وێنە کێشانی $g(x)=\cos(x-\pi)$ یەکتربڕینەکان لەگەڵ تەوەری ئاسۆیی و لادانی ڕوو دیاریبکە.

دەتوانیت جێگۆرکێیەکان بەیەکەوە ئەنجام بدرێت بۆ هەردوو نەخشە Sin و Cos بەهاکانی a، b، h، k بەکاربێنە بۆ دیاریکردنی سیفەتە دیارەکانی نەخشەی Sin یان Cos .



نموونـــــە 5 جێبەجێکردن

چەرخ و فەلەکێکی مەزن یەك خول بە 7 خولەك تەواودەکات. نەخشەی $H(t)=21\sin\frac{2\pi}{7}(t-1.75)+24$ ڕێسایەکە بۆ دۆزینەوەی بەرزی (بەمەتر) بۆ هەریەکێك لە کورسییەکان لە زەویەوە بە پێی کات (چرکە).



أ **وێنەی چەماوەی نەخشەکە بۆ بەرزی کورسییەك لە ماوەی دوو خولدا بکێشە.**

$H(t)=21\sin\frac{2\pi}{7}(t-1.75)+24$ $\quad a=21$ ، $b=\frac{2\pi}{7}$ ، $h=1.75$ ، $k=24$

هەنگاوی 1 جیاکەرەوە سەرەکییەکانی نەخشەکە دیاریبکە فراوانی 21 کاتی خولی $\frac{2\pi}{|b|}=\frac{2\pi}{\left|\frac{2\pi}{7}\right|}=7$

کاتی خولی بریتییە لەو کاتەی چەرخ و فەلەکەکە دەیخایەنێت بۆ ئەوەی خولێکی تەواو بکات. دەکاتە 7 خولەك.

لادانی ڕووەکە: 1.75 خولەك بۆ لای ڕاست. ڕاکێشانی ستوونی: 24 m بۆ سەرەوە چەماوەکە تەوەرەی ئاسۆیی نابڕێت. گەورەترین بەها: $24+21=45$ کەنەخشەکە لە $t=3.5$ و $t=10.5$ دا وەریدەگرێت. بچوکترین بەها: ***24-21=3*** کە نەخشەکە لە $t=0$، $t=7$، $t=14$ دا وەریدەگرێت.

ب **گەورەترین بەرزی کورسییەکە دەیگاتێ چەندە؟**

گەورەترین بەرزی کورسییەکە بریتییە لە $(24+21)=45\text{m}$



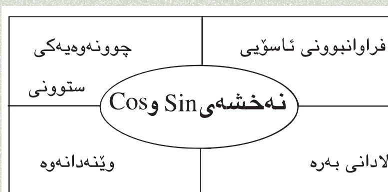
5. **چی دەبێت ئەگەر ...؟** وایدابنێ نەخشەکە بریتیی بێت لە $H(t)=-5\cos\frac{\pi}{45}t+7$ بە پێی t (بە چرکە).

أ وێنەی ڕوونکردنەوەیی بۆ بەرزی کورسییەك لە ماوەی دوو خولدا بکێشە

ب گەورەترین بەرزی کورسییەکە دەیگاتێ چەندە؟

بیربکەوە و تاوتوێبکە

1. پەیوەندی نێوان لەرلەری نەخشەی خولی وکاتی خولی چییە؟ ئەمە چۆن بەسەر نەخشەی Cos دا جێبەجێدەبێت.



2. ئەو پەیوەندییەی گەورەترین و بچووکترین بەها و فراوانی و کاتی خولی دوو نەخشەی Sin و Cos پێکەوە دەبەستێت چییە؟

3. ڕێکخەربە هێڵکارییەکەی بەرامبەرت دروستبکەوە و تەواوی بکە لەسەر هەر جێگۆڕکێیەك نموونە بێنەوە. ماوەی کاتی خولی دیاریبکە.



2–7 ڕاهێنانەکان

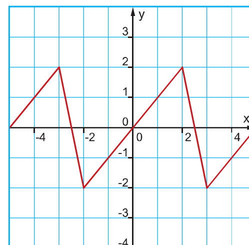
ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

1 **زاراوەکان** بەهاکانی نەخشەی خولی لەماوە ڕێکەکاندا دووبارە دەبێتەوە پێ دەوترێت ____؟ (خول یان کاتی خوولی).

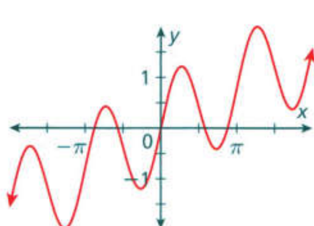
بڕوانە نموونە 1

دیاریبکە نەخشەکە خولییە یان نا، کاتی خولی بدۆزەوە ئەگەر خولی بوو.

2



3



بڕوانە نموونە 2

چەماوەی نەخشەی بنەڕەت بەکاربێنە بۆ وێنە کێشانی هەرنەخشەیەک، فراوانی و کاتی خولی دیاریبکە

4 $f(x)=\sin\frac{1}{2}x$ **5** $h(x)=\frac{1}{4}\cos x$ **6** $k(x)=\sin\pi x$

چەماوەی نەخشەی بنەڕەتی بەکاربهێنە بۆ وێنەکێشانی هەرنەخشەیەك، ماوەی دووبارەبووەوە یەکتر برینەکانی ئاسۆیی دەرکەنارەکان دیاریبکە.

7 $f(x)=2\tan 3x$ **8** $h(x)=\tan\frac{1}{4}x$ **9** $k(x)=\tan 2\pi x$

بڕوانە نموونە 3

10 **دەنگ** نەخشەی Sine بۆ وێنەکێشانی شەپۆڵێکی دەنگی کەکاتی خولی 0.01S(چرکە). فراوانییەکەی 6 cm بەکاربێنە. لەرەلەری ئەو شەپۆڵە بدۆزەوە.

بڕوانە نموونە 4

چەماوەی نەخشەی بنەڕەت بۆ وێنەکێشانی هەریەك لەم نەخشانە بەکاربێنە. خاڵەکانی یەکتر برین لەگەڵ تەوەرەی ئاسۆیی و لادانی ڕوو بۆ هەر یەکەیان دیاریبکە.

11 $f(x)=\sin\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)$ **12** $h(x)=\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$ **13** $k(x)=\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$

بڕوانە نموونە 5

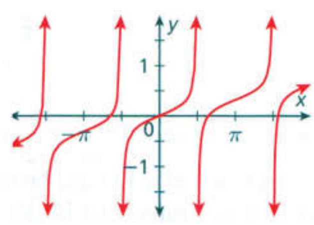
14 **بۆ خۆشی** دەتوانرێت نەخشەی $H(\theta)=-4\cos\theta+6$ بۆ هەژمارکردنی بەرزی سواربووی جۆلانەیەك (بەپێ) بە گوێرەی گۆشەی θ کە جۆلانەکە لەگەڵ ئەو ڕاستە هێڵیە ئەستوونەی بەسەرەکیدا دەڕوات پێکدێنێت. وێنەیەکی ڕوونکردنەوەیی بکێشە بەرزی سواربووی جۆلانە کە بنوێنیت، کاتێك $0^\circ\leq\theta\leq 90^\circ$ بەرزی سواربووەکە لە$\theta=60^\circ$ چەند؟

ڕاهێنان و شیکارکردنی پرسیارەکان

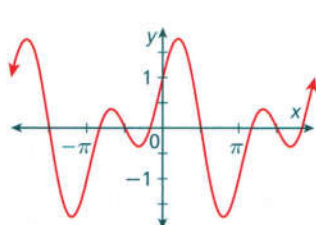
ڕاهێنانی ئازاد	
بوشیکارکردنی ڕاهێنانەکان	سەیری نموونە بکە
16–15	1
20–17	2
21	3
28–22	4
29	5

دیاریبکە نەخشەکە خولییە یان نا، کاتی خولی بدۆزەوە ئەگەر خولی بوو.

15



16



چەماوەی نەخشەی بنەڕەت بەکاربێنە بۆ وێنەکێشانی هەر نەخشەیەك، فراوانی و کاتی خولی بدۆزەوە.

17 $f(x)=4\cos x$ **18** $h(x)=\frac{3}{2}\sin x$ **19** $k(x)=-\cos 4x$ **20** $\ell(x)=6\sin\frac{1}{3}x$

21 **دەنگ** نەخشەی Sin بۆ وێنەکێشانی شەپۆڵێکی دەنگ بەکاربێنە، ئەگەر کاتی خوولی 0.025 S و فراوانییەکەی 50 cm بێت. لە پاشاندا لەرەلەری شەپۆلەکەی بدۆزەوە.

چەماوەی نەخشەی بنەڕەت بۆ وێنەکێشانی هەریەك لەم نەخشانە بەکاربێنە کاتی خولی و خاڵەکانی یەکتربڕین لەگەڵ تەوەری ئاسۆیی و دەرکەنارەکان بدۆزەوە.

22 $f(x) = \tan \frac{3}{2}x$ **23** $h(x) = \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ **24** $k(x) = -2\tan \frac{\pi}{2}x$

25 $f(x) = \sin(x + \pi)$ **26** $h(x) = \cos(x - 3\pi)$

27 $k(x) = \sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)$ **28** $g(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

29 **زانستی دەریا** دەتوانیت نەخشەی $d(t) = \frac{3}{2}\sin\left(\frac{5\pi}{31}t\right) + 23$ وەك ڕێسایەك بۆ دۆزینەوەی قووڵی ئاوی یەکێك لەکەنداوەکان بە مەتر و بەپێی کات بەکاربێنیت. وێنەی ئەم نەخشەیە بکێشە زۆرترین و کەمترین قووڵی بدۆزەوە.

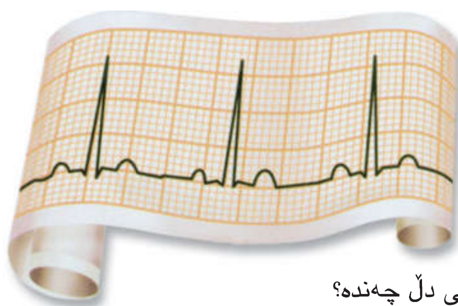
دەروازەیەك

لەسەر پزیشکی



ئامێری هێڵکاری دڵ بۆ پێوانی ئەو تەزوو و کارە باییەی فرمانی لێدانەکانی دڵی مرۆڤ لە کاتی دەستنیشانکردنی نەخۆشیەکانی دڵدا ڕێك دەخات بەکاردێت.

30 **پزیشکی** وێنەی بەرامبەر هێڵکاری دڵی مرۆڤێکی ئاسایی دەردەخات. هەر خولێك لێدانێکی دڵ دنوێنێت.



أ کاتی خولی لێکدانەکانی دڵێك بدۆزەوە.

ب تێکڕای لێکدانەکانی دڵ ژمارەکانییەتی لە خولەکێکدا. تێکڕای لێکدانەکان لە هێڵکارییەکەی بەرامبەرت چەندە؟

ج لەرەلەری ئەم هێڵکارییە چەندە؟

د پەیوەندی نێوان لەرەلەری ئەم هێڵکارییە و تێکڕایی لێکدانی دڵ چەندە؟

پەیوەندی نێوان فراوانی و کاتی خوولی بۆ هەریەك لەم نەخشانە بدۆزەوە، پاشان ئەو جێگۆڕکێیانە دیاربکە کە بەسەر نەخشەی بنەڕەتدا هاتوون تا بگەیتە ئەم نەخشانە.

31 $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 1$ **32** $g(x) = \frac{3}{4}\cos \frac{\pi}{4}x$

33 $k(x) = \cos(2\pi x) - 2$ **34** $\ell(x) = -3\sin 3x$

خەمڵاندن نەخشەی Sin و Cos بۆ خەمڵاندنی بەهای هەر بڕێك بەکاربێنە.

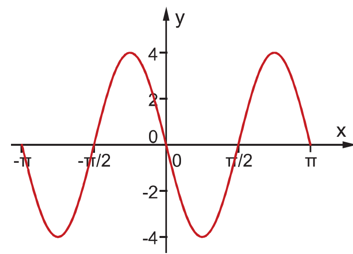
35 $\sin 160^\circ$ **36** $\cos 50^\circ$ **37** $\sin 15^\circ$ **38** $\cos 95^\circ$

نەخشەی Sine و Cosine بۆ نواندنی ئەوەی دیاریکراوە بنووسە.

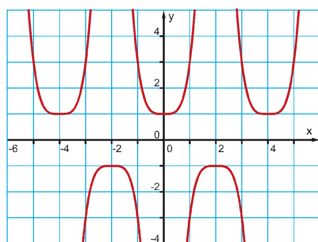
39 فراوانی 6 و کاتی خولییەکەی π **40** فراوانی $\frac{1}{4}$ و لادانی ڕوو $\frac{3}{2}\pi$ بۆلای چەپ

نەخشەی Sine و Cosine بۆ نواندنی ڕوونکردنەوەییەکە بنووسە.

41



42



43 بەرزترین ئاستی هەڵکشانی کەنداوێك دەگاتە 3m ، ئاستی داکشانی دەگاتە 0 هەڵکشانەکە 6.1 کاتژمێرە بەردەوام دەبێت تا دەکشێتەوە. و 6.1 کاتژمێری تری دەوێت تا دەگەڕێتەوە. دەتوانرێت بەرزی هەڵکشانەکە h بەپێی کات t بنوێنرێت.

أ فراوانی ئەو نەخشەیە و کاتی خولی چەندە؟بەرزترین بەها و نزمترین بەها چەندە؟

ب وایدابنێ هەڵکشانەکە بەرزترین بەهای دەبێت کاتێك $t = 0$ بەهای $h(0)$ چەندە؟ و بەهای $h(6.1)$ چەندە؟

ج نەخشەی h لەسەر شێوەی $h(t) = a\cos bt + k$ بنووسە؟

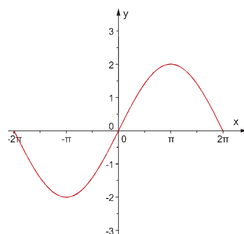
44 **بیری ڕەخنەگر** ئەگەر فراوانی نەخشەی Sin و کاتی خولییەکەیت زانی، ئایا دەتوانیت گەورەترین و بچووکترین بەهای بدۆزیتەوە، ئەو بەهایانەی x دیاریبکەیت بۆ ئەنجامدانی ئەو کارە پێویستە؟ چۆن بەکاریان دەهێنیت؟





45 **بنووسە** چی بەسەر خولی دا دێت لە نەخشەی $f(x)=\sin bx$ کاتێك $b>1$؟ وەکاتێك $b<1$؟

ئامادەکردن بۆ تاقیکردنەوە



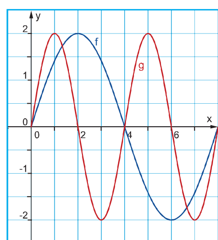
46 کام نەخشەی سێگۆشەیی بۆ وێنەی ڕوونکردنەوەیی بەرامبەر گونجاوە؟

(أ) $f(x)=\frac{1}{2}\sin x$ (ب) $f(x)=2\sin x$

(ج) $f(x)=\frac{1}{2}\sin 2x$ (د) $f(x)=2\sin\frac{1}{2}x$

47 فراوانی نەخشەی $f(x)=-4\cos 3\pi x$ کامەیە؟

(أ) -4 (ب) 3 (ج) 4 (د) 3π



48 وێنەی ڕوونکردنەوەیی بەرامبەر بۆ دیاریکردنی پەیوەندیی f و g بەکاربێنە.

(أ) فراوانی f دوو ئەوەندەی فراوانی g ـە.

(ب) لەرەلەری f دووئەوەندەی لەرەلەری g ـە.

(ج) کاتی خولی f دوئەوەندەی کاتی خولی g ـە.

(د) خولی f دووئەوەندەی خولی g ـە.

49 **کورتە وەڵام** چەماوەی نەخشەی $f(x)=\sin x$ بۆ وێنەکێشانی $g(x)=-4\sin 2(x-\pi)$ لەماوەی $[0, 2\pi]$ دا بەکاربێنە و جێگۆڕکێیان دیاریبکە.

بەرەنگاری و فراوانکردن

هەردوو نەخشەی $f(\theta)=\frac{1}{2}\sin\theta$ و $g(\theta)=2\cos\theta$ بەکاربێنە کاتێك $0^\circ\le\theta\le 360^\circ$

50 وێنەی چەماوەی هەردوو نەخشەکە لە هەمان ڕووتەختی پۆتاندا بکێشە.

51 بەهای نزیکەیی پۆتانی هەر خاڵێك لە خاڵەکانی یەکتربڕینی نێوان دوو چەماوەکە بدۆزەوە.

52 کەی لاسەنگەی $f(\theta)>g(\theta)$ ڕاست دەبێت؟

پێداچوونەوەی لولپێچی

هەرکۆمەڵە ژمارەیەك بە شێوەی ماوە (فترە) بنووسە (پۆلەکانی پێشوو)

53 $-7<x\le 5$ **54** $x\le -2$ یان $1\le x\le 13$ **55** $0\le x\le 9$

56 **گوڵ** لاڤین 100 000 دیناری بۆ کڕینی چەند چەپکە گوڵێك لە گوڵەباخ و مێلاقە (زنبق) و مێخەکی پێیە. نرخی چەپکێك گوڵەباخ 6000 دینار و چەپکێك مێلاقە 2000 دینار و چەپکێك مێخەك 4000 دینارە (وانەی 2)

گوڵە باغ	6		3	7
مێلاقە		8	5	
مێخەك	11	15		13

(أ) هاوکێشەیەکی هێڵی بەسێ نەزانراو بنووسە پارەکە بنوێنێت.

(ب) خشتەی بەرامبەر تەواوبکە.

پێدراوەکان بۆ شیکارکردنی سێگۆشەی ABC بەکاربێنە (وانەی 7-1)

57 $b=2$ ، $c=11$ ، $m\hat{A}=165^\circ$ **58** $a=9.2$ ، $b=11.4$ ، $c=20.2$



ڕوونکردنەوەیی هاو ئەنجامە سێگۆشەییەکان

دەتوانیت بژمێری ڕوونکردنەوەیی بۆ بەراوردکدنی وێنە ڕوونکردنەوەییەکان و داڕشتنی دەستەواژەکان لە سەر هاوئەنجامە سێگۆشەییەکان بە کاربێنیت.

چالاکی

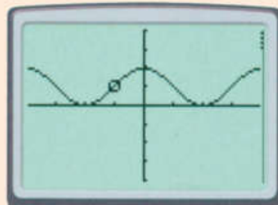
دیاریبکە ئایا هاوکێشەی $\frac{\sin^2 x}{1-\cos x} = 1+\cos x$ هاوئەنجامێکی سێگۆشەییە یان نا،

ئەگەر هاوکێشەکە هاوئەنجام بێت ئەوا هیچ جیاوازییەك نییە لە نێوان ئەو چەماوەیەی ڕێساکەی لای یەکەمەوە و ئەو چەماوەیەی ڕێسایەکەی لای دووەمە.

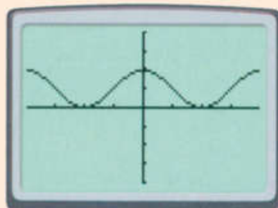
1 $\frac{\sin^2 x}{1-\cos x}$ بەرامبەر **Y1** و $1+\cos x$ بەرامبەر **Y2** تۆماربکە. ڕێگای 0 بۆ کێشانی وێنەی دووەم هەڵبژێرە لەگەڵ هێڵێك کە پێیدا تێپەڕێت. ئەمە وادەکات بتوانیت بە دوای وێنە ڕوونکردنەوەییەکەدا بڕۆیت.

2 شاشەی وێنەکە دیاریبکە بەبەکارهێنانی $7:\text{ZTrig}$ لە هەڵبژاردنەکانی zoom .

3 چاودێری شاشەی بژمێرەکە بکە لەو کاتەی وێنەی چەماوەی دووەم دەکێشێت. بازنەیەك دەبینیت کە لەسەر چەماوەی یەکەم دەجولێت ئەمەنیشانەی ئەوەیە چەماوەی نەخشی یەکەم لە سەر چەماوەی نەخشەی دووەم دەکێشێت.



4 کاتێك بازنەکە لە وێنە کێشانی چەماوەی دووەم دەبێتەوە دڵنیادەبێت لەوەی کە هەردوو چەماوەکە جووتن. ئەمەش ئەوە دەگەیەنێت هاوکێشەکە هاوئەنجامە. دواتر دەتوانیت بە جەبری ساغکردنەوەی بۆ بکەیت.



هەوڵبدە

1 **دەستەواژەیەك بنووسە** دیاریبکە ئایا هاوکێشەی $\cos x = \tan x \sin x - \frac{1}{\cos x}$ هاوئەنجامێکی سێگۆشەییە یان نا.

2 جەبریانە ڕاستی یان ناڕاستی وەڵامەکەت لە پرسیاری پێشوودا بسەلمێنە.

3 **دەستەواژەیەك بنووسە** دیاریبکە ئایا هاوکێشەی $\tan x = \frac{1+\tan x}{1+\frac{1}{\tan x}}$ هاوئەنجامێکی سێگۆشەییە یان نا.

4 جەبریانە ڕاستی یان نا ڕاستی وەڵامەکەت لە پرسیاری پێشوودا بسەلمێنە.



3-7 هاوئەنجامە سێگۆشەییە بنەرەتییەکان
Fundamental Trigonometric Identities

کێ ئەمە بەکاردەهێنێت؟

کارگەیی دروستکردنی پێداویستییەکانی خلیسکێنە هاوئەنجامە سێگۆشەییەکان بۆ دیاریکردنی جۆری ئەو مۆمەی لە تەختەی خلیسکێنە دەدەن بەکاردێنن (نموونەی 3)

ئامانجەکان

- بەکارهێنانی هاوئەنجامە سێگۆشەییە بنەرەتییەکان بۆ سادەکردنی بڕە سێگۆشەییەکان و نووسینەوەیان جارێکی تر و دڵنیابوون لە ڕاستی هاوئەنجامەکان.

دەتوانیت هاوئەنجامە سێگۆشەییەکان لە سادەکردنی بڕە سێگۆشەییەکان بەکاربێنیت. لە بیرت بێت هاوئەنجام لە بیرکاریدا پەیوەندییەکە، ڕاست دەبێت بۆ هەموو ئەو بەهایانەی گۆڕاوەکانی پەیوەندییەکە وەریدەگرن. ئەم هاوئەنجامانەی خوارەوە بەبەکارهێنانی سەلمێنراوی ڤیساغۆرس پوختەکراوە.

$x^2 + y^2 = r^2$ سەلمێنراوی ڤیساغۆرس

$\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} = 1$ هەردوو لا دابەشی r^2 بکە.

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ $\cos\theta$ لە جیاتی $\frac{x}{r}$ و $\sin\theta$ لە جیاتی $\frac{y}{r}$ دابنێ.



هاوئەنجامە سێگۆشەییە بنەڕەتییەکان		
هاوئەنجامی *tan*	هاوئەنجامی فیساغۆرسییەکان	دژە هاوئەنجامە
$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$	$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ $1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$ $1 + \frac{1}{\tan^2\theta} = \frac{1}{\sin^2\theta}$	$\sin(-\theta) = -\sin\theta$ $\cos(-\theta) = \cos\theta$ $\tan(-\theta) = -\tan\theta$

بۆ ئەوەی بیسەلمێنیت هاوکێشەیەك هاو ئەنجامە، یەکێك لە لایەکانی چەند جارێك بگۆڕە، تاوەك لایەکەی تری لێدێت. لە هەنگاوەکاندا هاوئەنجامە بنەڕەتییەکان بەکاربێنە.

نموونـــــە 1 سەلماندنی هاوئەنجامە سێگۆشەییەکان

هاوئەنجامە سێگۆشەییەکە بسەلمێنە.

أ $\frac{1}{\cos\theta} = \frac{1}{\sin\theta}\tan\theta$

$\frac{1}{\cos\theta} = \frac{1}{\sin\theta}\tan\theta$ ئەو لایە هەڵبژێرە کە دەتەوێت بیگۆڕیت.

$= \frac{1}{\sin\theta}\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)$ هاوئەنجامی *tan* بەکاربێنە.

$= \frac{1}{\cos\theta}$ سادە بکە

ب $\frac{1}{\sin(-\theta)} = -\frac{1}{\sin\theta}$

$\frac{1}{\sin(-\theta)} =$ ئەو لایە هەڵبژێرە کە دەتەوێت بیگۆڕیت

$\frac{1}{-\sin\theta}$ دژە هاوئەنجامەکە بەکاربێنە

$-\frac{1}{\sin\theta} = -\frac{1}{\sin\theta}$ سادە بکە

ڕۆشنایی

دەتوانیت هەر لایەك بگۆڕیت. بەڵام وا باشترە کە لا ئاڵۆزەکە بگۆڕیت بۆ ئەوەی لای دووەمت دەستبکەوێت.



1. هاوئەنجامە سێگۆشەییەکە بسەلمێنە.

أ $\sin\theta \frac{1}{\tan\theta} = \cos\theta$

ب $1 - \frac{1}{\cos(-\theta)} = \frac{\cos\theta - 1}{\cos\theta}$

دەتوانیت هاوئەنجامە سێگۆشەییەکان بۆ سادەکردنی برە سێگۆشەییەکان بەکاربێنیت.

نموونـــە 2 بەبەکارهێنانی هاوئەنجامە سێگۆشەییەکان بۆ سادەکردنی برە سێگۆشەییکان

برە سێگۆشەییەکە تەنها بە هۆی $\cos\theta$ بە سادەترین شێوە بنووسە.

أ $\frac{\sin^2\theta}{1-\cos\theta}$

$\frac{1-\cos^2\theta}{1-\cos\theta}$ هاوئەنجامی فیساغۆرسی

$\frac{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}{1-\cos\theta}$ جیاوازی نێوان دوو دووجا

$1+\cos\theta$ سادەبکە

ب $\frac{1}{\cos\theta} - \tan\theta\sin\theta$

$\frac{1}{\cos\theta} - \left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)\sin\theta$ لەجیاتی دابنێ

$\frac{1}{\cos\theta} - \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}$ کەرتەکان لەیەک دەربکە.

$\frac{1-\sin^2\theta}{\cos\theta}$ هاوئەنجامی فیساغۆرس بەکاربێنە

$\frac{\cos^2\theta}{\cos\theta}$ سادەبکە

$\cos\theta$

ڕۆشنایی

ئەگەر نەتزانی برە سێگۆشەییەکە سادە بکەیت. هەوڵبدە ڕێژە سێگۆشەییەکە بگۆڕی بۆ Sin یان Cos .



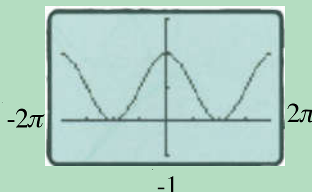
2. برە سێگۆشەییەکە تەنها بەپێی $\sin\theta$ بە سادەترین شێوە بنووسە.

أ $\frac{\cos^2\theta}{1-\sin\theta}$

ب $\frac{1}{\tan^2\theta}$

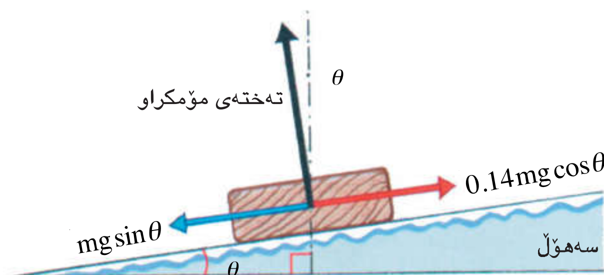
لە خوێندکارەوە بۆ خوێندکار هاوتابوونی برەکە بە ڕوونکردنەوەیی پاسادان بکە.

حەزدەکەم بژمێری ڕوونکردنەوەیی بۆ پاسادان کردنی هاوئەنجام بوونی دووبرە بەکاربێنم بۆ ئەوەی لە هاوئەنجامبوونی ئەم دووبرە $\frac{\sin^2\theta}{1-\cos\theta}$ و $1+\cos\theta$ دڵنیابم . بژمێر بەکاربێنە بۆ دروستکردنی وێنەی ڕوونکردنەوەیی هەردوو نەخشەی $y = \frac{\sin^2\theta}{1-\cos\theta}$ و $y = 1+\cos\theta$ لەسەر هەمان شاشە لەبەرئەوەی هەردوو چەماوەکە لەسەر یەکتری جووتن مانای هاوتابوونی هەردووکیانم دەستکەوت.



نموونـــە 3 جیبەجێکردنی پیشەسازی

یەکێك لە و کارگانەی پێداویستییەکانی خلیسکێنە دروستدەکات. لێکخشاندنی جۆرێکی نوێ لە مۆم کە تەختەکەی پێ مۆم دەکرێت تاقیدەکاتەوە لە ڕێگای مۆمکردنی تەختەیەکی لاکێشە تەریبی و دانانی لەسەر ڕوویەکی لێژی سەهۆڵ ئاستی ڕووی لایەکی سەهۆڵەکە بە هێواشی بەرز دەکرێتەوە تا پارچە تەختەکە دەست بە خلیسکانی دەکات.



کاتێک تەختەکە دەست بە خلیسکان دەکات. پێکنەری بارستاییەکەی تەریب بەڕووی سەهۆڵەکە $mg \sin\theta$ یەکسان دەبێ بە بەرگری خلیسکاندنەکە μ کە لە $\mu mg\cos\theta$ لێکخشاندنەکە پەیدا دەبێت. کاتێک μ هاوکۆلکەی لێکخشاندن بێت. گۆشەی لێکخشاندن θ دیاریبکە، واتە ئەو گۆشەیەی ئاستی ڕووی سەهۆڵەکە لەگەڵ ئاسۆدا دروستی دەکات، لەسەرەتای خلیسکاندندا، ئەگەر بزانێت $\mu = 0.14$.

$mg \sin\theta = \mu mg\cos\theta$ هەردوو لا دابەشی mg بکە

$\sin\theta = \mu\cos\theta$ لەجیاتی دابنێ

$\sin\theta = 0.14\cos\theta$ هەردوو لا دابەشی $\cos\theta$ بکە.

$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = 0.14$ هاوئەنجامی *tan* .

$\tan\theta = 0.14$ بەکاربێنە $\tan^{-1}$.

$\theta \approx 8°$

پارچە تەختەکە دەست بە خلیسکان دەکات، کاتێک پێوانەی گۆشەی θ دەبێتە 8 پلە بە نزیکەیی.

خوێندنەوە

پیتی یۆنانی μ بە میو بخوێنەرەوە



3. هاوکێشەی $mg\sin\theta = \mu mg\cos\theta$ بەکاربێنە بۆ دۆزینەوەی گۆشەی خلیسکان، کاتێک هاوکۆلکەی لێکخشاندن $\mu = 0.4$

بیربکەوە و تاوتوێبکە

1. باسبکە چۆن دەیسەلمێنیت هاوکێشەیەک هاوئەنجامە
2. ڕوونیبکەوە کام هاوئەنجام بۆ سەلماندنی $(1-\cos\theta)(1+\cos\theta) = \sin^2\theta$ بەکاردێت.
3. ڕێکخەرە بە خشتەکە دروستبکەوە و بە نووسینی هاوئەنجامە فیساغۆرسییەکان تەواوی بکە .





3-7 ڕاهێنانەکان

ڕاهێنانی ئاراستەکراو

بڕوانە نموونە 1 هاوئەنجامە سێگۆشەییەکە بسەلمێنە.

1 $\sin\theta\frac{1}{\cos\theta} = \tan\theta$

2 $\frac{1}{\tan(-\theta)} = -\frac{1}{\tan\theta}$

3 $\cos^2\theta\left(\frac{1}{\cos^2\theta}-1\right) = \sin^2\theta$

بڕوانە نموونە 2 هەر بڕێک بە پێی $\cos\theta$ بە سادەترین شێوە بنووسە.

4 $\frac{1}{\sin\theta}\tan\theta$

5 $\left(1+\frac{1}{\cos^2\theta}\right)(1-\sin^2\theta)$

6 $\sin^2\theta+\cos^2\theta+\tan^2\theta$

3	پڕوانە نموونە

7 **فیزیا** هاوکێشەی $mg\sin\theta = \mu mg\cos\theta$ بۆ دۆزینەوەی گۆشەی خلیسکاندنی لاکێشە تەریبێکی شووشە لە سەر مێزێکی شووشە دانرابێ. کاتێك ڕووە شووشەکە لار دەکرێتەوە، لاکێشە تەریبەکە دەست بە خزین دەکات، ئەگەر بزانیت هاوکۆڵکەی لێکخشاندن $\mu = 0.94$ بێت.

ڕاهێنان و شیکارکردنی پرسیارەکان

ڕاهێنانی ئازاد	
بوشیکارکردنی ڕاهێنانەکان	سەیری نموونە بکە
8–11	1
12–15	2
16	3

هاوئەنجامە سێگۆشەییەکە بسەلمێنە.

8 $\frac{1}{\cos\theta}\frac{1}{\tan\theta} = \frac{1}{\sin\theta}$

9 $\frac{\sin\theta - \cos\theta}{\sin\theta} = 1 - \frac{1}{\tan\theta}$

10 $\tan\theta\sin\theta = \frac{1}{\cos\theta} - \cos\theta$

11 $\frac{1}{\cos^2\theta}(1-\cos^2\theta) = \tan^2\theta$

هەر بڕەیەك بە پێی $\sin\theta$ بە سادەترین شێوە بنووسە.

12 $\frac{\cos^2\theta}{1+\sin\theta}$

13 $\tan^2\theta$

14 $\cos\theta\frac{1}{\tan\theta} + \sin\theta$

15 $\frac{\frac{1}{\cos^2\theta} - 1}{1+\tan^2\theta}$



16 **فیزیا** هاوکێشەی $mg\sin\theta = \mu mg\cos\theta$ بۆ دۆزینەوەی بەرزترین لاری گونجاو بۆ ڕێگایەك بەکاربینە کە تایەکانی ئۆتۆمبێلی لەسەر بوەستێت بێ ئەوەی بخلیسکێت.

فرە هەنگاو هەر بڕەیەکی سێگۆشەیی بە پێی یەك نەخشەی سێگۆشەیی بنووسە.

17 $\frac{1}{\sin\theta}(1-\cos^2\theta)$

18 $\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\tan\theta$

19 $\cos\theta + \sin\theta\tan\theta$

20 $\sin\theta\frac{1}{\sin\theta} - \cos^2\theta$

21 $\cos^2\theta\frac{1}{\sin\theta}\frac{1}{\cos\theta}$

22 $\cos\theta(\tan^2\theta + 1)$

23 $\sin\theta\cos\theta\tan\theta$

24 $1 - \frac{\sin\theta\cos\theta}{\tan\theta}$

25 $\frac{\sin\theta}{1-\cos^2\theta}$

26 $\frac{\sin^2\theta}{1-\cos^2\theta}$

27 $\tan\theta\left(\tan\theta + \frac{1}{\tan\theta}\right)$

28 $\cos\theta\left(\tan\theta + \frac{1}{\tan\theta}\right)$

29 $\frac{\cos^2\theta}{1-\sin\theta}$

30 $\frac{1}{\cos^2\theta}\left(\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} - \cos^2\theta\right)$

31 $\sin\theta\left(\frac{1}{\cos\theta} - \frac{1}{\sin\theta}\right)$

لە ڕاستی ئەم هاوئەنجامانە بگەڕێ.

32 $\frac{\cos\theta - 1}{\cos^2\theta} = \frac{1}{\cos\theta} - \frac{1}{\cos^2\theta}$

33 $\sin^2\theta\left(\frac{1}{\sin^2\theta} - 1\right) = \cos^2\theta$

34 $\tan\theta + \frac{1}{\tan\theta} = \frac{1}{\sin\theta}\frac{1}{\cos\theta}$

35 $\frac{\cos\theta}{1-\sin^2\theta} = \frac{1}{\cos\theta}$

36 $\frac{1-\cos^2\theta}{\tan\theta} = \sin\theta\cos\theta$

37 $\frac{1}{\sin^2\theta(1+\tan^2\theta)} = \frac{1}{\tan^2\theta}$

هاوئەنجامە بنەڕەتییەکە بسەلمێنە بە بێ بەکارهێنانی هیچ هاوئەنجامێکی تری بنەڕەتی (ڕێژە سێگۆشەییەکان لەگەڵ x ، y ، r) بەکاربێنە.

38 $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

39 $\frac{1}{\tan\theta} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

40 $1 + \frac{1}{\tan^2\theta} = \frac{1}{\sin^2\theta}$

41 $1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$

42 دەتوانرێت نەخشەی $y(t)=5\sin t$ بۆ هەژمارکردنی کشانی سپرینگێك لە ژێر کاریگەری تەنێکدا کە پێوەی هەڵواسرابێت بە پێی کات t بە چرکە. و نەخشەی $z(t)=2.6\cos t$ بۆ هەژمارکردنی کشانی سپرینگێکی تر لە ژێر کاریگەری تەنێکدا کە پێوەی هەڵواسرابێت.

أ دووتەن بەهەردوو سپرینگەکەوە لە هەمان کاتدا $(t=0)$ هەڵواسراون. دوای چەند چرکە کشانی دوو سپرینگەکە یەکسان دەبن؟

ب کشان لەو ساتەدا چەند دەبێت؟

ج ئەو ساتانەی کە کشانی دوو سپرینگەکە تێدا یەکسان دەبن کامانەن؟

بژمێری ڕوونکردنەوەیی بژمێری ڕوونکردنەوەیی بەکاربێنە. بۆ ئەوەی بڕیاربدەی هەریەك لەمانە هاوئەنجامن یان نا.

43 $\left(\frac{1}{\sin\theta}-1\right)\left(\frac{1}{\sin\theta}+1\right)=\tan^2\theta$

44 $\frac{1}{\cos\theta}-\cos\theta=\sin\theta$

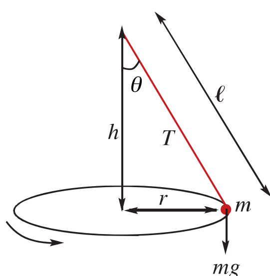
45 $\cos\theta\left(\frac{1}{\cos\theta}+\cos\theta\frac{1}{\sin^2\theta}\right)=\frac{1}{\sin^2\theta}$

46 $\frac{1}{\tan\theta}(\cos\theta+\sin\theta\tan\theta)=\frac{1}{\sin\theta}$

47 $\cos\theta=0.99\cos\theta$

48 $\sin\theta\cos\theta=\tan\theta-\tan\theta\sin^2\theta$

49 **فیزیا** بەندۆلێك لە جوولانیدا شێوە قوچەکێك دروست دەکات کاتێك لەسەر بازنەیەك بجولێت، لە جیاتی ئەوەی لە لایەك بۆلای بەرامبەری بچێت. وێنەی جولانەکەی قوچەکێکە کە بنکەکەی بازنەی جوڵانەوەکەیە. دەتوانیت یاسای $r=\frac{g\tan\theta}{\omega^2}$ بۆ هەژمارکردنی نیوەتیرەی قوچەکەکە r بەکاربێت، کاتێك هێمای هێزی ڕاکێشان g بێ و ω گۆشە خێرایی بەندۆلەکە بێت.



أ ڕێسای $\omega=\sqrt{\frac{g}{\ell\cos\theta}}$ و هاوئەنجامە سێگۆشەییەکان بەکاربێنە بۆ نووسینەوەی ڕێسای هەژمارکردنی نیوە تیرە.

ب ڕێسایەك بۆ ℓ بە پێی ω و g و یەك نەخشەی سێگۆشەی بنووسە.

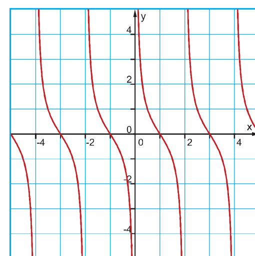
بیری ڕەخنەگر بەنەخشەیەك دەووترێت نەخشەیەکی تاك ئەگەر $f(-x)=-f(x)$ و نەخشەیەکی جووت کاتێك $f(-x)=+f(x)$

50 هەر سێ نەخشە سێگۆشەییە بنەڕەتییەکە لە نێوان تاك و جووتدا پۆلێنبکە.

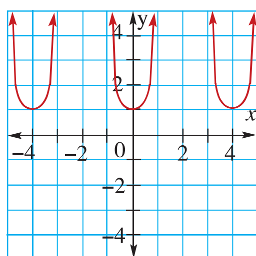
51 چەماوەی نەخشەی تاك و نەخشەی جووت بە چی لێکجیادەکرێنەوە، چی لە چەماوەی نەخشەکانی تر جیایان دەکاتەوە.

دیاریبکە، هەریەك لەم نەخشانە تاکن یان جووتن.

52



53



54 **بیری ڕەخنەگرانە** چەند شێوە نووسینی تری هاوتا دەتوانیت بۆ $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ بەکاربێنیت بەلایەنی کەمەوە سێیانیان بنووسە.

55 **بنووسە** $\sin(-\theta)=-\sin\theta$ و $\cos(-\theta)=\cos\theta$ بەکاربێنە بۆ ئەوەی $\tan(-\theta)=-\tan\theta$ دەستبکەوێت.



56 کام بڕ هاوتای $\tan\theta$ دەبێت؟

أ $\sin\theta$ ب $\cos\theta$ ج $\frac{1}{\cos\theta}$ د $\frac{1}{\cos\theta}\sin\theta$

57 کام بڕ هاوتای سێ بڕەکەی تر نابێت؟

أ $\frac{1}{\cos\theta}\,\frac{1}{\sin\theta}$ ب $\frac{1}{\cos^2\theta}\,\frac{1}{\tan\theta}$ ج $\frac{\tan\theta}{\sin^2\theta}$ د $\cos^2\theta\tan\theta$

58 کام دەستەواژە سێگۆشەییە هاوئەنجام نییە؟

أ $1+\cos^2\theta=\sin^2\theta$ ب $\frac{1}{\sin^2\theta}-1=\frac{1}{\tan^2\theta}$ ج $1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}$ د $1-\sin^2\theta=\cos^2\theta$

59 کام بڕ هاوتای $1-\frac{1}{\cos^2\theta}$ دەبێت؟

أ $\tan^2\theta$ ب $-\tan^2\theta$ ج $\frac{1}{\tan^2\theta}$ د $-\frac{1}{\tan^2\theta}$

60 **کورتە وەڵام** پاساودان بکە لە ڕاستی $\sin\theta+\cos\theta\frac{1}{\tan\theta}=\frac{1}{\sin\theta}$ بۆ هەر هەنگاوێك بەڵگە بێنەوە.

بەرەنگاری و فراوانکردن

بڕەکە بە شێوەی کەرتێکی تاقانە بنووسە.

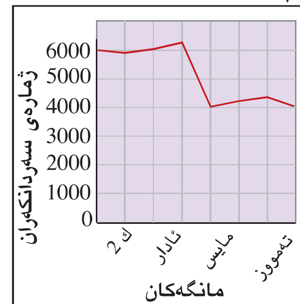
61 $\frac{1}{\cos\theta}+\frac{1}{\cos^2\theta}$ **62** $\frac{\cos\theta}{\sin\theta}+\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ **63** $1-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$ **64** $\frac{1}{1-\cos\theta}-\frac{\cos\theta}{1-\cos^2\theta}$

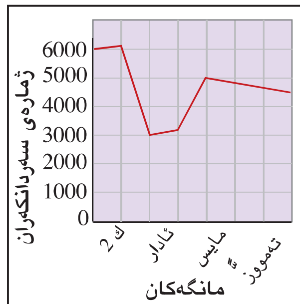
بە سادەترین شێوە بنووسە

65 $\frac{\frac{1}{\sin^2\theta}-1}{\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}}$ **66** $\frac{\frac{1}{\sin\theta}+\frac{1}{\cos\theta}}{\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}}$ **67** $\frac{\frac{1}{\sin\theta}-\frac{1}{\cos\theta}}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}}$ **68** $\frac{1-\frac{1}{\sin\theta}}{1-\frac{1}{\sin^2\theta}}$

پێداچوونەوەی لولپێچی

69 **گەشت و گوزار** یەکێك لە ئامارکاران پێدراوەکانی لەسەر ژمارەی ئەوکەسانەی لە ماوەی *6* مانگدا سەردانی دوورگەکەیان کردووە تۆمارکرد. ئەو وێنە ڕوونکردنەوەییەی هەر بارێك دەردەبڕێت دیاریبکە.

1


2


أ بـاری پێشینی هەڵکردنی گەردەلوول دەکات لە دوو مـانگی ئادار و نیساندا.

ب بەرزبوونەوەی پلەی گەرما لە وەرزی هـاویندا بووە هۆی پەشیمانبوونەوەی زۆربەی گەشتیاران.

هەر ئەگەرێك بدۆزەوە (پۆلەکانی پێشو)

70 دەرکەوتنی ژمـارە 4 لەکاتی هەڵدانی زارێکەوە، دەرکەوتنی ڕووی 4 لە کاتی هەڵدانی بەردەزارێکی تر.

71 دەرکەوتنی دوو ڕووی شێر لە هەڵدانی پارچەپارەیەکی کانزایی دووجار.

لە هەر نەخشەیەکی سێگۆشەییدا 4 بەها بۆ گۆڕاوی θ بدۆزەوە. کەوا لە نەخشەکە بکات پێناسە نەکراوبێت.

72 $y=-\tan\theta$ **73** $y=\frac{1}{\cos(0.5\theta)}$ **74** $y=-\frac{1}{\sin\theta}$

بەشی 7

تاقیکردنەوەی نیوەی بەش



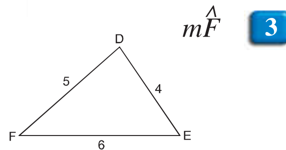
7–1 یاسای Sin و Cos

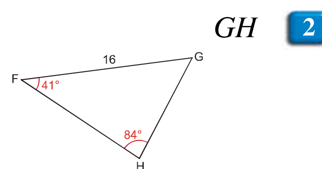
پێوانەی هەریەکێك لەمانە بدۆزەوە. درێژییەکان بۆ نزیکترین دەیەك و پێوانەی گۆشەکان بۆ نزیکترین پلە نزیکبکەوە

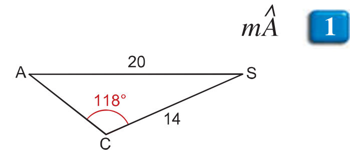
1 $m\hat{A}$

2 GH

3 $m\hat{F}$





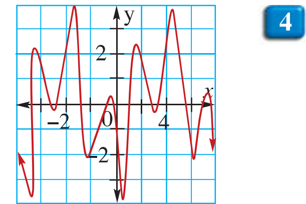




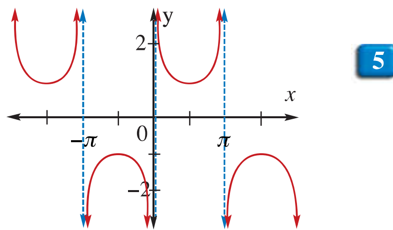
7–2 نەخشە سێگۆشەییەکان

دیاریبکە، ئایا نەخشەکە خوولییە یان نا، ئەگەر وایە کاتی خوولی بدۆزەوە

4



5



وێنەی ڕوونکردنەوەی نەخشە سێگۆشەییە بنەڕەتییەکان بەکاربێنە بۆ وێنەکێشانی ڕوونکردنەوەی ئەم نەخشانە. فراوانی و کاتی خوولی بدۆزەوە.

6 $f(x)=\sin 4x$

7 $g(x)=-3\sin x$

8 $h(x)=0.25\sin \pi x$

وێنەی ڕوونکردنەوەی نەخشە سێگۆشەییە بنەڕەتییەکان بەکاربێنە بۆ وێنەکێشانی ڕوونکردنەوەی ئەم نەخشانە، خاڵەکانی یەکتربڕین لەگەڵ تەوەری ئاسۆیی و لادانی ڕوو بدۆزەوە.

9 $f(x)=\cos\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)$

10 $g(x)=\sin\left(x-\frac{3\pi}{4}\right)$

11 $f(x)=\cos\left(x+\frac{5\pi}{4}\right)$

وێنەی ڕوونکردنەوەی نەخشە سێگۆشەییە بنەڕەتییەکان بەکاربێنە بۆ وێنەکێشانی ئەم نەخشانە. خاڵەکانی یەکتربڕین لەگەڵ تەوەری ئاسۆیی و دەرکەنارەکان بدۆزەوە.

12 $f(x)=\frac{1}{2}\tan 4x$

13 $f(x)=-2\tan\frac{1}{2}x$

14 $f(x)=\tan\frac{1}{2}\pi x$



7–3 هاوئەنجامە سێگۆشەییە بنەرەتییەکان

ئەم هاوئەنجامە سێگۆشەییانە بسەلمێنە

15 $\sin^2\theta\frac{1}{\cos\theta}\frac{1}{\sin\theta}=\tan\theta$

16 $\sin(-\theta)\frac{1}{\cos\theta}\frac{1}{\tan\theta}=-1$

17 $\dfrac{\frac{1}{\tan^2\theta}-1}{\frac{1}{\tan^2\theta}+1}=1-2\sin^2\theta$

بڕەکە بەبەکارهێنانی یەك ڕێژەی سێگۆشەیی بنووسە.

18 $\frac{1}{\tan\theta}\frac{1}{\cos\theta}$

19 $\frac{1}{\cos(-\theta)}$

20 $\dfrac{\frac{1}{\sin^2\theta}}{\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}}$



4-7 هاوئەنجامەکانی سەرجەم و جیاوازی
Sum and Difference Identities

ئامانجەکان

- بەکارهێنانی هاوئەنجامەکانی سەرجەم و جیاوازی بۆ هەژمارکردنی بەهای بڕە سێگۆشەییەکان.
- ڕێزکراوەی خولانەوە و هاوئەنجامەکانی سەرجەم و جیاوازی بەکاردێنێت بۆ ئەنجامدانی خولانەوە.

زاراوەکان
Vocabulary

ڕێزکراوەی خولانەوە
Rotation Matrix

کێ ئەمە بەکاردەهێنێت؟

دەتوانیت هاوئەنجامەکانی سەرجەم و جیاوازی لەگەڵ لێکدانی ڕێزکراوەکان بۆ دۆزینەوەی خوولانەوەی شێوەیەك بەکاربێنیت (نموونە 4).

لێکدانی ڕێزکراوەکان و هاوئەنجامەکانی سەرجەم و جیاوازی ئامرازێکن بۆ دیارکردنی پۆوتانی وێنەی خاڵەکان بە خوولانەوەیان بە دەوری خاڵی بنەڕەت لە ڕووتەختی پۆوتاندا.



هاوئەنجامەکانی سەرجەم و جیاوازی	
هاوئەنجامەکانی سەرجەم	**هاوئەنجامەکانی جیاوازی**
$\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$	$\sin(A-B)=\sin A\cos B-\cos A\sin B$
$\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$	$\cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B$
$\tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$	$\tan(A-B)=\frac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\tan B}$

نموونە 1

هەژمارکردنی بەهای بڕێکی سێگۆشەیی بەبەکارهێنانی هاوەنجامەکانی سەرجەم و جیاوازی.

بەهای تەواوی هەر بڕێك بدۆزەوە.

أ $\sin 75°$

$75° = 30° + 45°$ بەشێوەی بنووسە. لەبەر ئەوەی ڕێژەی سێگۆشەییەکان هەردوو گۆشەی $45°$ و $30°$ زانراون هاوئەنجامی sin سەرجەمی $\sin(A+B)$ بەکاربێنە

$$\sin 75° = \sin(30°+45°)$$
$$= \sin 30°\cos 45° + \cos 30°\sin 45°$$

لە جیاتی دابنێ:
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$$

سادە بکە .
$$= \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

ب $\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)$

بنووسە $-\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4}$

$$\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4}\right)$$

هاوئەنجامی cos ی جیاوازی $\cos(A-B)$ بەکاربێنە.
$$= \cos\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{4}$$

لە جیاتی دابنێ:
$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$$

سادەکە.
$$= \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

ڕۆشنایی

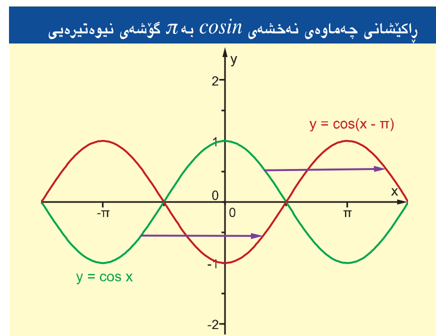
زۆر ڕێگا هەیە بۆ نووسینی $-\frac{\pi}{12}$ ؛ بۆ نموونە $\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4}\right)$ یان $\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3}\right)$

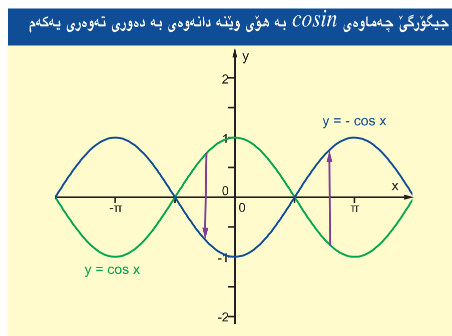


1. بەهای تەواوی هەر بڕێك بدۆزەوە.

أ $\tan 150°$ ب $\sin\left(-\frac{11\pi}{12}\right)$

ڕاکێشانی چەماوەی نەخشەی Cosin بە π گۆشەی نیوەتیرەیی بۆ لای ڕاست هاوتای وێنەدانەوەیە بە دەوری تەوەری یەکەم





ئەم کارە لە نموونەی 2 دا بەبەکارهێنانی هاوئەنجامەکانی جیاوازی دەچەسپێت

نموونە 2
سەلماندنی هاوئەنجامی سێگۆشەیی بەبەکارهێنانی هاوئەنجامەکانی جیاوازی و سەرجەم

بسەلمێنە $\cos(x-\pi) = -\cos x$

$\cos(x-\pi) =$ لای چەپ هەڵبژێرە بۆ گۆڕینی

$\cos x \cos\pi + \sin x \sin\pi =$ هاوئەنجامی cos جیاوازی $\cos(A-B)$ بەکاربێنە.

$\cos x(-1) + \sin x(0) =$ لە جیاتی دابنێ

$-\cos x = -\cos x$ سادە بکە

خاڵی چاودێری .2 بسەلمێنە $\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$.

نموونە 3
بەکارهێنانی سەلمێنراوی فیساغۆرس لەگەڵ هاوئەنجامەکانی سەرجەم و جیاوازی

بەهای بڕەی $\tan(A+B)$ بدۆزەوە ئەگەر بزانیت $\sin A = -\frac{7}{25}$ و $180^\circ < A < 270^\circ$ و $\cos B = \frac{8}{17}$ و $0^\circ < B < 90^\circ$.

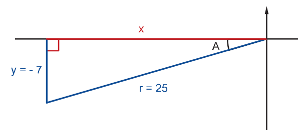
هەنگاوی 1 $\tan A$ و $\tan B$ بدۆزەوە.

گۆشەی ڕاگراو پێناسەی ڕێژە سێگۆشەییەکانی $\sin A = \frac{y}{r}$ و $\cos B = \frac{x}{r}$ بەکاربێنە.
سێگۆشەیەکی گۆشە وەستاو بۆ هەر گۆشەیەك لە چارەکی گونجاو بکێشە
بە x و y و r ناوبنێ

لە بیرت بێت

گۆشەی ڕاگر بۆ گۆشەی θ . بریتییە لەو گۆشە تیژە موجەبە کە کۆتا لای گۆشەکە θ لەگەڵ تەوەری یەکەم دروست دەکات.

لە چارەکی سێیەم $180^\circ < A < 270^\circ$ $\sin A = -\frac{7}{25}$

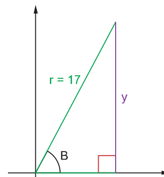


$x^2 + (-7)^2 = 25^2$

$x = -\sqrt{625-49} = -24$

کەواتە $\tan A = \frac{y}{x} = \frac{7}{24}$

لە چارەکی یەکەم $0^\circ < B < 90^\circ$ $\cos B = \frac{8}{17}$



$8^2 + y^2 = 17^2$

$y = \sqrt{289-64} = 15$

کەواتە $\tan B = \frac{y}{x} = \frac{15}{8}$

هەنگاوی 2 هاوئەنجامی سەرجەم بەکاربێنە

$$\tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$$ هاوئەنجامی *tangent* ی سەرجەمی

$$=\frac{\frac{7}{24}+\frac{15}{8}}{1-\frac{7}{24}\frac{15}{8}}$$ لەجیاتی دابنێ

$$\tan(A+B)=\frac{\frac{52}{24}}{1-\frac{35}{64}}=\frac{416}{87}$$ سادەبکە



3. بەهای بڕەی $\sin(A-B)$ بدۆزەوە ئەگەر زانیت $\sin A=\frac{4}{5}$ و $90°<A<180°$ و $\cos B=\frac{3}{5}$ و $0°<B<90°$

بۆ ئەوەی وێنەی خاڵی $P(x, y)$ بە خوولانەوەی گۆشەی θ بەدەوری خاڵی بنەڕەت دا دەستبکەوێت. **ڕیزکراوەی خولانەوە** بەکاربێنە.



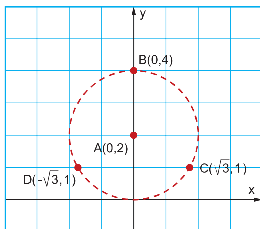
بەکارهێنانی ڕیزکراوی خولانەوە

خولانەوەیەك بە دەوری خاڵی بنەڕەت بەگۆشەی θ، هەر خاڵێك وەك $P(x, y)$ جێگۆرکێ دەکات بۆ خاڵی $P'(x', y')$ بەپێی ئەم هاوکێشەیە:

$$\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}$$

نموونە 4

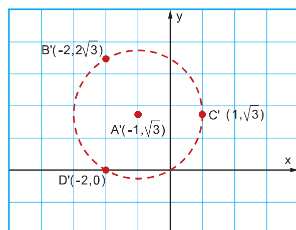
بەکارهێنانی ڕیزکراوەی خولانەوە



پۆوتانەکانی وێنەی ئەو خاڵانە بدۆزەوە کە لە وێنەی بەرامبەرت دیاریکراون بە خولانەوەی بە گۆشەی 30° بە دەوری خاڵی بنەڕەت.

هەنگاوی 1 ڕیزکراوەی خولانەوە R_{30} و ڕیزکراوەی خاڵەکان S بنووسە.

$$S=\begin{bmatrix}0 & 0 & \sqrt{3} & -\sqrt{3}\\ 2 & 4 & 1 & 1\end{bmatrix}\text{، } R_{30}=\begin{bmatrix}\cos 30° & -\sin 30°\\ \sin 30° & \cos 30°\end{bmatrix}$$



هەنگاوی 2 هەردوو ڕیزکراوەکە لێکبدە.

$$R_{30}\,xS=\begin{bmatrix}\cos 30° & -\sin 30°\\ \sin 30° & \cos 30°\end{bmatrix}\text{X}\begin{bmatrix}0 & 0 & \sqrt{3} & -\sqrt{3}\\ 2 & 4 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-1 & -2 & 1 & -2\\ \sqrt{3} & 2\sqrt{3} & \sqrt{3} & 0\end{bmatrix}$$

هەنگاوی 3 پۆوتانی خاڵەکانی – وێنەکان بەم شێوەیەدەبن $A'\left(-1, \sqrt{3}\right)$ $B'\left(-2, 2\sqrt{3}\right)$ $C'\left(1, \sqrt{3}\right)$ $D'(-2, 0)$



4. پۆوتانی خاڵەکانی – وێنەکان بدۆزەوە ئەگەر گۆشەی خولانەوە $60°$ بێت.

بیربکەوە و تاوتوێبکە

1. باسی 3 ڕێگای جیاواز بکە، کە بتوانیت تیایاندا هاوئەنجامەکانی جیاوازی بەکاربێنی بۆ دۆزینەوەی $\sin 15^\circ$.
2. ڕوونیبکەوە خاڵەکانی لێکچوون و لێکنەچوون لە نێوان هاوئەنجامەکانی sin و cos ، چۆن نیشانەی ڕادەکان لە هاوئەنجامەکاندا پەیوەندی بە دیاریکردنی هاوئەنجامی سەرجەم یان هاوئەنجامی جیاوازییەوە هەیە.
3. ڕێکخەر بە هێڵکارییەکە بنووسە پاشان تەواوی بکە. بۆ هەر نەخشەیەك هاوئەنجامەکانی سەرجەم و جیاوازی لەگەڵ نموونەیەك بنووسە.





4-7 ڕاهێنانەکان

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

1 پێناسەی خولانەوە پێویستی بە دیاریکردنی چەقەکەی هەیە. بریتییە لەو خاڵەی کە خولانەوەکە بە دەوریدا دەبێت و گۆشەکەی و ئاڕاستەکەی. لە کاتی بەکارهێنانی ڕیزکراوەی خولانەوە، چەقی خولانەوەی پێویست چییە؟ ئاڕاستەی خولانەوەی پێویست چییە؟

بڕوانە نموونە 1

بەهای بڕەکە بە تەواوی بدۆزەوە.

2 $\cos 105^\circ$ **3** $\sin\frac{11\pi}{12}$ **4** $\tan\frac{\pi}{12}$ **5** $\cos(-75^\circ)$

بڕوانە نموونە 2

هاوئەنجامەکە بسەلمێنە.

6 $\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos x$ **7** $\tan(\pi+x)=\tan x$ **8** $\cos\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)=-\sin x$

بڕوانە نموونە 3

بەهای بڕەکە بدۆزەوە، ئەگەر زانیت $\sin A=\frac{-12}{13}$ و $180^\circ<A<270^\circ$ و $\cos B=-\frac{4}{5}$ و $90^\circ<B<180^\circ$

9 $\sin(A+B)$ **10** $\cos(A-B)$ **11** $\tan(A+B)$ **12** $\tan(A-B)$

بڕوانە نموونە 4

13 پۆوتانی خاڵی سەرەکانی وێنەی سێگۆشەی ABC بدۆزەوە کاتێك $A(0, 2)$ ، $B(0, -1)$ ، $C(3, 0)$ بێت بە خولانەوەیەك گۆشەکەی 120° و چەقەکەی خاڵی بنەرەت بێت. وەڵامەکەت بۆ نزیکترین بەش لە سەد نزیکبکەوە.

ڕاهێنان و شیکارکردنی پرسیارەکان

بەهای هەر بڕێك بە تەواوی بدۆزەوە.

14 $\sin\frac{7\pi}{12}$ **15** $\tan 165^\circ$ **16** $\sin 195^\circ$ **17** $\cos\frac{11\pi}{12}$

هاوئەنجامەکە بسەلمێنە

18 $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)=\sin x$ **19** $\sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)=-\cos x$ **20** $\tan(x-2\pi)=\tan x$

ڕاهێنانی ئازاد

بۆشیکارکردنی ڕاهێنانەکان	سەیری نموونە بکە
17-14	1
20-18	2
24-21	3
25	4

بەهای برەکە بدۆزەوە، ئەگەر زانیت $\cos A=-\frac{12}{13}$ و $90^\circ<A<180^\circ$ و $\sin B=-\frac{4}{5}$ و $270^\circ<B<360^\circ$

21 $\sin(A+B)$ **22** $\tan(A-B)$ **23** $\cos(A+B)$ **24** $\cos(A-B)$

25 پۆوتانی وێنەی سەرەکانی سێگۆشەی ABC بدۆزەوە کاتێك $A(0, 2)$ ، $B(1, 2)$، $C(0, 1)$ بە خولانەوەیەك گۆشەکەی $45°$ چەقەکەی خاڵی بنەڕەت بێت. وەڵامەکەت بۆ نزیکترین بەش لە سەد نزیکبکەوە

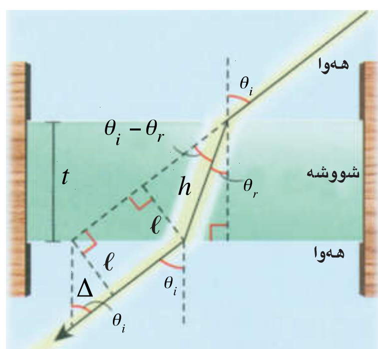
بەهای برەکە بە تەواوی بدۆزەوە.

26 $\sin 165^\circ$ **27** $\tan(-105^\circ)$ **28** $\sin(-15^\circ)$ **29** $\cos 195^\circ$ **30** $\cos\frac{19\pi}{12}$

31 $\tan\frac{5\pi}{12}$ **32** $\sin 255^\circ$ **33** $\tan 195^\circ$ **34** $\cos\frac{\pi}{12}$

بەهای θ بدۆزەوە ئەگەر زانیت $0^\circ\le\theta\le180^\circ$

35 $\cos(\theta-30^\circ)=\frac{1}{2}$ **36** $\cos(\theta+20^\circ)=\frac{\sqrt{2}}{2}$ **37** $\sin(180^\circ-\theta)=\frac{1}{2}$



38 **فیزیا** ڕووناکی بە گۆشەی θ_i بە شووشەدا تێپەر دەبێت. و بەهەمان گۆشە لێوەی دەردەچێت. بەڵام خاڵی دەرچوونی ڕووناکی لە شووشەکەوە بە دوریەکی ئاسۆیی لە خاڵی چوونە ژوورەوەی بە بڕی $\Delta=\left(\frac{\sin(\theta_i-\theta_r)}{\sin\theta_i\cos\theta_r}\right)t$ دوورە وەك لە وێنەی بەرامبەر دا دیارە.

أ بەبەکارهێنانی هاوئەنجامی سێگۆشەییەکان برەی Δ تەنها بە پێی tan بنووسە.

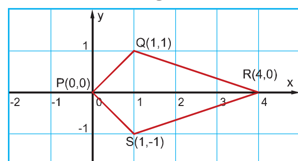
ب وێنەی بەرامبەر بەکاربێنە بۆ نوسینی $\sin(\theta_i-\theta_r)$ بە پێی ℓ و h

فرەهەنگاو بەهای هەریەکە لە $\tan(A+B)$ و $\cos(A+B)$ و $\sin(A-B)$ لە هەربارێکدا بدۆزەوە

39 $\sin A=-\frac{7}{25}$ و $180^\circ<A<270^\circ$ ؛ $\cos B=\frac{12}{13}$ و $0^\circ<B<90^\circ$

40 $\sin A=-\frac{1}{3}$ و $270^\circ<A<360^\circ$ ؛ $\sin B=\frac{4}{5}$ و $0^\circ<B<90^\circ$

41 بۆ دروستکردنی دروشمی بەرهەمێکی نوێ چوارلای $PQRS$ چەند جارێك جێگۆرکیی پێکراوە.



أ ڕیزکراوەی خولانەوەکان بەدەوری خاڵی بنەڕەت. بۆ ئەو خولانەوانەی گۆشەکانی یەك لە دوای یەکن $90°$، $180°$، $270°$

ب ڕیزکراوکان بۆ دیاریکردنی پۆوتانی وێنەی چوارلایەکە بە هەموو خولانەوەکانیانەوە بەکاربێنە.

ج لە هەمان ڕووتەختی پۆتاندا وێنەی چوارلایەکە بە هەرسێ خولانەوەکانیەوە بکێشە.

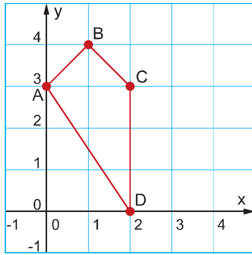
42 **بیری ڕەخنەگر** ئایا دەتوانیت بەهای $\sin\frac{11\pi}{24}$ بە تەواوی بدۆزیەوە بە بەکارهێنانی هاوئەنجامەکانی سەرجەم یان جیاوازی؟ ڕوونیبکەوە.

43 نەخشەی $y(t)=4.2\sin\left(\frac{2\pi}{3}t-\frac{\pi}{2}\right)$ بۆ دۆزینەوەی کشانی سپرینگ لە ژێر کاریگەری تەنێك کە پێوەی هەڵواسراوبێت بە پێی کات بە چرکە بەکاردێت.

أ فراوانی و کاتی خوولی نەخشەکە بدۆزەوە.

ب هاوئەنجامی سێگۆشەیی بەکاربێنە بۆ نووسینی ئەو نەخشەیە بە پێی Cos بەتەنها.

ج کشانەکە پاش 8 چرکە چەندە؟



ئەندازە پۆوتانی سەرەکانی چوارلای $ABCD$ بدۆزەوە کاتێك $A(0,3)$ ، $B(1,4)$ ، $C(2,3)$ ، $D(2,0)$ بە خولانەوەی گۆشەی θ چەقەکەی خاڵی بنەڕەت بێت وەڵامەکەت بۆ نزیکترین بەش لەسەد نزیکبکەوە.

44 $\theta = 45°$ **45** $\theta = 60°$ **46** $\theta = 120°$ **47** $\theta = -30°$

48 **بنووسە** ئایا $\sin(A+B) = \sin A + \sin B$ ؟ نموونەیەك بهێنەوە بۆ پاڵپشتی وەڵامەکەت.

ئامادەکردن بۆ تاقیکردنەوە

49 کام لەمانەی خوارەوە بەهای بڕەی سێگۆشەیی $\cos 15° \cos 45° - \sin 15° \sin 45°$ ؟

أ) $\frac{1}{2}$ ب) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ج) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ د) $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$

50 کام لەمانە بەهای x ـە ، ئەگەر $\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = \frac{1}{2}$

أ) $\frac{\pi}{6}$ ب) $\frac{\pi}{4}$ ج) $\frac{\pi}{3}$ د) $\frac{\pi}{2}$

51 بەهای $\cos(A-B)$ بدۆزەوە ، ئەگەر زانیت $\sin A = \frac{1}{2}$، $0° < A < 90°$ و $\cos B = \frac{3}{5}$ ، $0° < B < 90°$

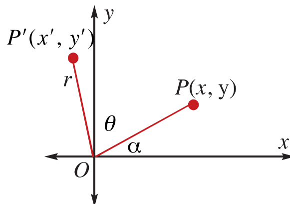
أ) $\frac{3\sqrt{3}+4}{10}$ ب) $\frac{3\sqrt{3}-4}{10}$ ج) $\frac{3+4\sqrt{3}}{10}$ د) $\frac{3-4\sqrt{3}}{10}$

52 **کورتە وەڵام** بەهای $\sin(-15°)$ بە تەواوی بدۆزەوە، هەنگاوەکانت دیاربکە.

بەرەنگاری و فراوانکردن

53 ساغیبکەوە کە هەڵگەڕاوەی ڕیزکراوەی خولانەوە بە گۆشەی θ بریتییە لە ڕیزکراوەی خولانەوە بە گۆشەی $-\theta$.

54 سەلمێنراوی tan ی سەرجەمی دوو گۆشە $\tan(A+B)$ بسەلمێنە.



55 دیاریبکە چۆن ڕێزکراوەی خولانەوە بەبەکارهێنانی هاوئەنجامەکانی سەرجەمی sin و cos دەستدەکەوێت بیرت بێتەوە لە پۆلی دەیەمدا توانیوتە هەر خاڵێك وەك $P(x, y)$ لەسەر شێوەی $P(r\cos\alpha, r\sin\alpha)$ بەبەکارهێنانی گۆشەی ڕاگر بنووسە.

گۆشەی خولانەوە بە دەوری خاڵی بنەڕەت بدۆزەرەوە کە جێگۆڕکێ بە سێگۆشەی ABC بۆ $A'B'C'$ دەکات کاتێك $A(1,0)$ ، $B(0,2)$ ، $C(-1,0)$ بێت.

56 $A'(0,1)$ ، $B'(-2,0)$ ، $C'(0,-1)$

57 $A'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ، $B'(-\sqrt{2}, 2)$ ، $C'\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

58 $A'(-1,0)$ ، $B'(0,-2)$ ، $C'(1,0)$

59 $A'\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ ، $B'(-1, \sqrt{3})$ ، $C'\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

پێداچوونەوەی لولپێچی

دابەش بکە وادابنێ هەموو بڕەکان پێناسەکراوە (پۆلەکانی پێشوو)

60 $\frac{3x^2}{7y^3} \div \frac{6x}{21y}$ **61** $\frac{x^2+x-2}{x^2-2x-8} \div \frac{x^2+3x+2}{x^2-3x-4}$ **62** $\frac{9x^3y^2}{15xy^4} \div \frac{6x^4y}{3x^2y^5}$

بەبەکارهێنانی یەك ڕێژەی سێگۆشەیی بڕەکە بنووسە. (وانەی 7-3)

63 $\frac{\frac{1}{\tan\theta} \times \frac{1}{\cos\theta}}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}$ **64** $\frac{1}{\tan\theta}\,\frac{\tan\theta}{\sin\theta}$ **65** $\cos\theta\sin\theta\tan\theta$

5-7



هاوئەنجامەکانی دوو ئەوەندەی گۆشە و نیو ئەوەندەی گۆشە

Double-Angle and Half-Angle Identities

ئامانجەکان

- هاوئەنجامەکانی دوو ئەوەندەی گۆشە و نیو ئەوەندەی گۆشە بەکاردێنێت بۆ هەژمارکردنی بەهاکانی برە سێگۆشەییەکان و نووسینەوەیان بە سادەترین شێوە.

بۆچی ئەمە فێردەبین؟

دەتوانیت هاوئەنجامی دوو ئەوەندەی گۆشە بەکاربێنیت بۆ هەژمارکردنی دووری ئاسۆیی هاوێژراوێك وەك تۆپێکی گۆڵف (پرسیاری 94)

بۆ بەدەستهێنانی هاوئەنجامەکانی دوو ئەوەندە دەتوانیت هاوئەنجامەکانی سەرجەم بەکاربێنیت

بۆ نموونە $\sin 2\theta = \sin(\theta+\theta)$

$$= \sin\theta\cos\theta + \cos\theta\sin\theta$$

$$= 2\sin\theta\cos\theta$$

دەتوانیت هاوئەنجامەکانی $\cos 2\theta$ و $\tan 2\theta$ بە هەمان ڕێگای پێشوو بدۆزیتەوە هاوئەنجامی $\cos 2\theta$ سێ شێوەی هەیە. دەتوانین بەبەکارهێنانی هاوئەنجامی سەرجەمی cos و هاوئەنجامی بنەڕەتی $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ بە دەستیان بێنن. وا باوە برە سێگۆشەییەکان بە پێی θ بنوسرێت.



هاوئەنجامەکانی دووئەوەندە		
$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$	$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$ $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$	$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

نموونە 1

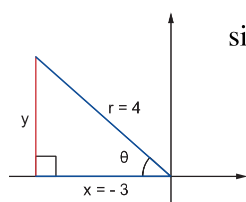
هەژمارکردنی بەهای برەیەکی سێگۆشەیی بەبەکارهێنانی هاوئەنجامەکانی دوو ئەوەندە

بەهای تەواوی $\sin 2\theta$ و $\cos 2\theta$ بدۆزرەوە ئەگەر زانیت $\cos\theta = -\frac{3}{4}$ $90^\circ < \theta < 180^\circ$

هەنگاوی 1 $\sin\theta$ بدۆزەوە بۆ ئەوەی بە های $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ بدۆزەوە؟

ڕێگای یەکەم گۆشەی ڕاگر بەکاربێنە.

لە چارەکی دووەم $90^\circ < \theta < 180^\circ$ $\cos\theta = -\frac{3}{4}$



$(-3)^2 + y^2 = 4^2$ سەلمێنراوی فیساغۆرس

$y = \sqrt{16-9} = \sqrt{7}$ بەهای هەژمارێکە ڕەگی موجەب وەربگرە

$\sin\theta = \frac{\sqrt{7}}{4}$

ڕێگای دووەم شیکاربکە

$$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$$

$$\sin\theta = \sqrt{1-\left(-\frac{3}{4}\right)^2}$$ لەجیاتی دابنێ ڕەگی دووجا وەربگرە

$$= \sqrt{1-\frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4}$$ سادەی بکە

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

ئاگاداربە!

لە نیشانەی X و y دەردەکەوێت. گۆشەی θ دەکەوێتە کام چارەکەوە.

	sin	cos
یەکەم	+	+
دووەم	+	−
سێیەم	−	−
چوارەم	−	+

هەنگاوی 2 بەهای $\sin 2\theta$ بدۆزەوە

$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ — هاوئەنجامی sin2θ دوئەوەندە

$\sin 2\theta = 2\frac{\sqrt{7}}{4}\left(-\frac{3}{4}\right)$ — لەجیاتی دابنێ

$= -\frac{3\sqrt{7}}{8}$ — سادەبکە

هەنگاوی 3 بەهای $\cos 2\theta$ بدۆزەوە

$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ — هاوئەنجامی cos2θ دووئەوەندە

$\cos 2\theta = 2\left(-\frac{3}{4}\right)^2 - 1 = \frac{1}{8}$



1. بەهای تەواوی $\tan 2\theta$ و $\cos 2\theta$ بدۆزەوە. ئەگەر زانیت $\cos\theta = \frac{1}{3}$
$270^\circ < \theta < 360^\circ$

دەتوانیت هاوئەنجامەکانی دووئەوەندە بەکاربێنێت بۆ سەلماندنی هاوئەنجامە سێگۆشەییەکان.

نموونــــە 2 سەلماندنی هاوئەنجامە سێگۆشەییەکان بەبەکارهێنانی هاوئەنجامەکانی دوو ئەوەندە.

هاوئەنجامەکە بسەلمێنە

أ $\sin^2\theta = \frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)$

$\sin^2\theta = \frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)$ — لای ڕاست وەربگرە.

$= \frac{1}{2}(1-(1-2\sin^2\theta))$ — هاوئەنجامی cos2θ بەکاربێنە

$= \frac{1}{2}(2\sin^2\theta)$ — سادەبکە

$\sin^2\theta = \sin^2\theta$

ب $(\cos\theta+\sin\theta)^2 = 1+\sin 2\theta$ — لای چەپ وەربگرە

$\cos^2\theta+\sin^2\theta+2\cos\theta\sin\theta =$ — دووجاتەواوەکە بکەوە

$(\cos^2\theta+\sin^2\theta)+(2\cos\theta\sin\theta) =$ — کۆبکەوە

$1+\sin 2\theta$ — هاوئەنجامی sin2θ و هاوئەنجامی فیساغۆرسیەکان بەکاربێنە

$1+\sin 2\theta = 1+\sin 2\theta$

ڕۆشنایی

یەک لا هەڵبژێرە بۆ گۆڕانکاریکردن، نەوەک هەردوو لا بەیەکجار.



2. هاوئەنجامەکە بسەلمێنە.

أ $\cos^4\theta - \sin^4\theta = \cos 2\theta$

ب $\sin 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}$

دەتوانیت هاوئەنجامی $\cos 2\theta$ بەکاربێنی بۆ گەیشتن بە هاوئەنجامەکانی نیوە.

بەبەکارهێنانی $\frac{\theta}{2}$ لە جیاتی θ

لە نموونەی 2 سەلماندووتە کە: $\sin^2\theta = \frac{1-\cos^2\theta}{2}$ هەروەها $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ بەکاربێنە بۆ نووسینی $\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}$ ئەگەر لە جیاتی θ، $\frac{\theta}{2}$ دابنێی هاوئەنجامی نیو ئەوەندمان دەستدەکەوێت.



هاوئەنجامەکانی نیوە		
$\sin\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$	$\cos\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$	$\tan\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}$

دیاریکردنی نیشانە بەپێی شوێنی کۆتا لا (دوالا) بۆ گۆشەی $\frac{\theta}{2}$ دەبێت لەباری نموونەییدا.

هاوئەنجامەکانی نیوە یارمەتی هەژمارکردنی بەهاکانی هەر بڕێکمان بە تەواوی دەدات.

نموونە 3 هەژمارکردنی بەهاکانی بڕە سێگۆشەییەکان بە بەکارهێنانی هاوئەنجامەکانی نیوە

هاوئەنجامەکانی نیوە بەکاربێنە بۆ هەژمارکردنی هەر بڕیك بەتەواوتی.

أ $\cos 165^\circ$

$\cos\frac{330^\circ}{2}$

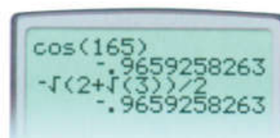
$-\sqrt{\frac{1+\cos 330^\circ}{2}}$ سالبە چونکە 165° چارەکی دووەم

$-\sqrt{\frac{1+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{2}}$ سادەبکە

$-\sqrt{\left(\frac{2+\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)}$ $\cos330^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$-\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$

بەبەکارهێنانی بژمێری زانستی پاسادان بکە



ب $\sin\frac{\pi}{8}$

$\sin\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}\right)$

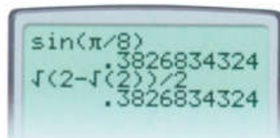
$+\sqrt{\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2}}$ موجەب چونکە $\frac{\pi}{4}$ چارەکی یەکەمەوە

$\sqrt{\frac{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{2}}$ $\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sqrt{\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)}$

$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

بەبەکارهێنانی بژمێری زانستی پاسادان بکە





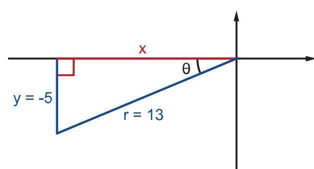
3. هاوئەنجامەکانی نیوە بەکاربێنە بۆ دۆزینەوەی بەهای هەر بڕێك بە تەواوەتی

أ $\tan 75^\circ$ **ب** $\cos\frac{5\pi}{8}$

نموونە 4 بەکارهێنانی سەلمێنراوی فیساغۆرس و هاوئەنجامەکانی نیوە

بەهای $\sin\frac{\theta}{2}$ و $\tan\frac{\theta}{2}$ بدۆزەوە، ئەگەر زانیت $\sin\theta=-\frac{5}{13}$ $\mathbf{180^\circ<\theta<270^\circ}$

هەنگاوی 1 $\cos\theta$ بدۆزەوە بۆ ئەوەی بتوانیت هاوئەنجامەکانی نیوە بەکاربێنی گۆشەی ڕاگر بەکاربێنە.



لە چارەکی سێیەم هەژماربکە $180^\circ<\theta<270^\circ$ $\sin\theta=-\frac{5}{13}$

$x^2+(-5)^2=13^2$ سەلمێنراوی فیساغۆرس

$x=-\sqrt{169-25}=-12$ بەهای x هەژماربکە.

کەواتە $\cos\theta=-\frac{12}{13}$

هەنگاوی 2 بەهای $\sin\frac{\theta}{2}$ هەژماربکە.

$\sin\frac{\theta}{2}$

$+\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$ $\sin\frac{\theta}{2}$ موجەبە لەبەر ئەوەی $90<\theta<135$

$\sqrt{\frac{1-\left(-\frac{12}{13}\right)}{2}}$ لەجیاتی دابنێ

$\sqrt{\left(\frac{25}{13}\right)\left(\frac{1}{2}\right)}$ سادەبکە

$\sqrt{\frac{25}{26}}=\frac{5\sqrt{26}}{26}$

هەنگاوی 3 بەهای $\tan\frac{\theta}{2}$ هەژماربکە

$\tan\frac{\theta}{2}$

$-\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}$ $\tan\frac{\theta}{2}$ موجەبە لەبەر ئەوەی $90°<\theta<135°$

$-\sqrt{\frac{1-\left(-\frac{12}{13}\right)}{1+\left(-\frac{12}{13}\right)}}$ لەجیاتی کە

$-\sqrt{\left(\frac{25}{13}\right)\left(\frac{13}{1}\right)}$ سادەبکە

$-\sqrt{25}$

-5

ئاگاداربە!

ورد بە لە دیاریکردنی نیشانەی هەر یەك لە $\sin\frac{\theta}{2}$، $\cos\frac{\theta}{2}$

ئەگەر $180°<\theta<270°$

ئەوا $90°<\frac{\theta}{2}<135°$

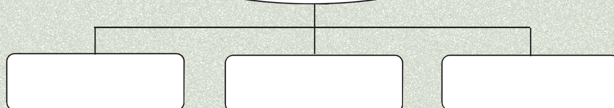


4. بەهای $\sin\frac{\theta}{2}$ و $\cos\frac{\theta}{2}$ بدۆزەوە ئەگەر زانیت $\tan\theta=\frac{4}{3}$ $0°<\theta<90°$

بیربکەوە و تاوتوێبکە

1. رووونیبکەوە کام هاوئەنجامی دووئەوەندە بەکاردێنیت بۆ سادەکردنی $\frac{\cos 2\theta}{\sin\theta+\cos\theta}$
2. باسیبکە چۆن نیشانەی $\sin\frac{\theta}{2}$ و $\cos\frac{\theta}{2}$ دیاریدەکرێ.
3. ڕێکخەر بە دووبارە هێڵکارییەکە دووبارە بنووسەوە پاشان تەواوی بکە. لە هەر چوار چێوەیەك هاوئەنجامێکی بنووسە.





5-7 ڕاهێنانەکان

ڕاهێنانی ئاراستەکراو

بەهای هەریەك لە $\sin 2\theta$ و $\cos 2\theta$ و $\tan 2\theta$ بدۆزەوە.

پروانە نموونە 1

1 $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$ ؛ $\cos\theta=-\frac{5}{13}$

2 $0^\circ<\theta<90^\circ$ ؛ $\sin\theta=\frac{4}{5}$

هەریەك لە و هاوئەنجامانە بسەلمێنە

پروانە نموونە 2

3 $2\cos 2\theta=4\cos^2\theta-2$

4 $\sin^2\theta=1-\frac{\cos 2\theta+1}{2}$

5 $\frac{1+\cos 2\theta}{\sin 2\theta}=\frac{1}{\tan\theta}$

6 $\sin 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}$

بەبەکارهێنانی هاوئەنجامەکانی نیوە بەهای برەکان بدۆزەوە.

پروانە نموونە 3

7 $\cos 67.5^\circ$

8 $\cos\frac{\pi}{12}$

9 $\tan\frac{3\pi}{8}$

10 $\sin 112.5^\circ$

بەهای $\sin\frac{\theta}{2}$ و $\cos\frac{\theta}{2}$ و $\tan\frac{\theta}{2}$ بدۆزەوە

پروانە نموونە 4

11 $180^\circ<\theta<270^\circ$ ؛ $\sin\theta=-\frac{24}{25}$

12 $270^\circ<\theta<360^\circ$ ؛ $\cos\theta=\frac{1}{4}$

ڕاهێنان وشیکارکردنی پرسیارەکان

بەهای $\sin 2\theta$ و $\cos 2\theta$ و $\tan 2\theta$ بدۆزەوە

13 $90^\circ<\theta<180^\circ$ ؛ $\cos\theta=-\frac{7}{25}$

14 $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$ ؛ $\tan\theta=\frac{20}{21}$

هەریەك لەم هاوئەنجامانە بسەلمێنە

15 $\frac{\sin 2\theta}{\sin\theta}=2\cos\theta$

16 $\cos^2\theta=\frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)$

17 $\tan\theta=\frac{1-\cos 2\theta}{\sin 2\theta}$

18 $\tan\theta=\frac{\sin 2\theta}{1+\cos 2\theta}$

بەبەکارهێنانی هاوئەنجامەکانی نیوە بەهای برەکە بدۆزەوە.

19 $\sin\theta\frac{7\pi}{12}$

20 $\cos\frac{5\pi}{12}$

21 $\sin 22.5^\circ$

22 $\tan 15^\circ$

بەهای $\sin\frac{\theta}{2}$ و $\cos\frac{\theta}{2}$ و $\tan\frac{\theta}{2}$ بدۆزەوە

23 $\frac{3\pi}{2}<\theta<2\pi$ ؛ $\tan\theta=-\frac{12}{35}$

24 $180^\circ<\theta<270^\circ$ ؛ $\sin\theta=-\frac{3}{5}$

ڕاهێنانی ئازاد

بۆشیکارکردنی ڕاهێنانەکان	سەیری نموونە بکە
14-13	1
18-15	2
22-19	3
24-23	4

فرەهەنگاو برەکە بە سادەترین شێوە بنووسە، ڕێژە سێگۆشەییەکان θ لە جیاتی چەند جارەی θ بەکاربێنە

25 $\sin 3\theta$

26 $\sin 4\theta$

27 $\cos 3\theta$

28 $\cos 4\theta$

29 $\cos 2\theta+2\sin^2\theta$

30 $\cos 2\theta+1$

31 $\tan 2\theta\left(2-\frac{1}{\cos^2\theta}\right)$

32 $\frac{\cos 2\theta}{\cos\theta+\sin\theta}$

33 $\frac{\cos\theta\sin 2\theta}{1+\cos 2\theta}$

34 $\frac{\cos 2\theta-1}{\sin^2\theta}$

35 نەخشەی $y(t)=3.1\sin 2t$بۆ پێوانەی کشانی سپرینگێك. لە ژێر کاریگەری تەنێك کە پێوەی هەڵواسرابێت بە پێی کات بە چرکە دەنوێنرێت.

أ نەخشەکە بە پێی ڕێژە سێگۆشەییەکان بۆ t لە جیاتی 2t بەبەکارهێنانی هاوئەنجامەکانی دوو ئەوەندە بنووسە.

ب نەخشەی $w(t)=3.8\cos t$ نموونەکە بۆ پێوانی کشانی سپرنگێکی تر لە ژێر کاریکەری تەنێك کە پێوەی هەڵواسرابێت. دووتەن بەهەریەکە لە دوو سپرینگەکەوە لەیەك کاتدا $t=0$ لە چ ساتێکدا کشانی دوو سپرینگەکە لە جاری یەکەمدا یەکسان دەبن.

ج لەو ساتەدا کشانی دوو سپرنگەکە چەند دەبێت؟

هەنگاوی جۆراو جۆر بەهاکانی $\sin 2\theta$ و $\cos 2\theta$ و $\tan 2\theta$ و $\sin\frac{\theta}{2}$ و $\cos\frac{\theta}{2}$ و $\tan\frac{\theta}{2}$ بدۆزەوە.

36 $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$ ؛ $\cos\theta=-\frac{3}{8}$

37 $180°<\theta<270°$ ؛ $\cos\theta=-\frac{\sqrt{5}}{3}$

38 $0°<\theta<90°$ ؛ $\sin\theta=\frac{2}{5}$

39 $\frac{3\pi}{2}<\theta<2\pi$ ؛ $\tan\theta=-\frac{1}{2}$

بەبەکارهێنانی هاوئەنجامەکانی نیوە بەهای تەواوەتی بڕەکان بدۆزەوە.

40 $\cos\frac{7\pi}{8}$

41 $\sin\frac{11\pi}{12}$

42 $\cos 105°$

43 $\sin(-15°)$

44 $\cos(-135°)$

هاوئەنجامەکە بسەلمێنە

45 $\cos^2\frac{\theta}{2}=\frac{\sin^2\theta}{2(1-\cos\theta)}$

46 $\cos 2\theta=\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$

47 $\frac{\tan\theta+\sin\theta}{2\tan\theta}=\cos^2\frac{\theta}{2}$

48 **بژمێری ڕوونکردنەوەیی** وێنەی ڕوونکردنەوەیی $y=\frac{\cos x(1-\cos 2x)}{\sin 2x}$ بکێشە. بۆ دۆزینەوەی هاوئەنجامێکی سێگۆشەیی. ئەو هاوئەنجامە جەبریانە بسەلمێنە.

49 **هەنگاوی جۆراوجۆر** تۆپێکی گۆڵف بەخێرایی سەرەتایی v_0 پی/چر هاوێژرا. بە پێی بەرزە گۆشەیθ نەخشەی $d(\theta)=\frac{v_0^2\sin\theta\cos\theta}{16}$ هەژماری ئەو ماوە ئاسۆییەکە تۆپەکە بڕیویەتی بکە.

أ نەخشەی پیشوو بەبەکارهێنانی ڕێژەی سێگۆشەی2θ بنووسە.

ب ئەو دووریە ئاسۆییە هەژماربکە کە تۆپەکە دەیبڕێت لە کاتێکدا خێرایی بنەڕەتی 80 بێت لە چرکەیەکدا بەبەرزە گۆشەکانی 15°، 30° ، 45° ، 60° ، 75°.

ج ئەگەر خێراییە سەرەتاییەکە نەگۆڕ بێت، کام گۆشە گەورەترین دووری ئاسۆیمان دەداتێ.

د **چی دەبێت ئەگەر...؟** خێرایی سەرەتایی 80 پیێ/چر. دیاریبکە کام یەکێ لە دوو گۆشەکە پێویستە ببێتە بەرزە گۆشە بۆ ئەوەی دووری ئاسۆیی براو لە 175 پیێ کەمتر نەبێت.

50 **بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە** ڕوونیبکەوە چۆن بەهای تەواوەتی$\sin 7.5°$ دەدۆزێتەوە؟



51 **بنووسە** چۆن دەزانیت لە چ کاتێکدا هاوئەنجامی دوو ئەوەندە و هاوئەنجامی نیوە بەکاردێت.



52 بەهای $\sin 2\theta$ چەندە ئەگەر $\cos\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ و $90° < \theta < 180°$؟

أ) $\frac{1}{2}$ ب) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ج) 1 د) -1

53 بەهای $\cos 2\theta$ چەندە ئەگەر $\cos\theta = \sin\theta$؟

أ) 0 ب) 1 ج) $2\sin^2\theta$ د) $2\cos^2\theta$

54 بەهای $\sin\frac{\theta}{2}$ چەندە ئەگەر بزانیت $\cos\theta = -\frac{12}{13}$ و $90° < \theta < 180°$

أ) $\frac{\sqrt{26}}{26}$ ب) $-\frac{\sqrt{26}}{26}$ ج) $\frac{5\sqrt{26}}{26}$ د) $-\frac{5\sqrt{26}}{26}$

55 بەهای تەواوەتی $\sin 157.5°$ چەندە؟

أ) $-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ ب) $\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ ج) $-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ د) $\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

56 **کورتە وەڵام** ڕاستی $\frac{\cos 2\theta}{\sin\theta + \cos\theta} = \cos\theta - \sin\theta$ پاساودان بکە. $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$

بەرەنگاری و فراوانکردن

57 $\tan 2\theta$ بەبەکارهێنانی $\sin 2\theta$ و $\cos 2\theta$ بدۆزەوە.

58 $\tan\frac{\theta}{2}$ بەبەکارهێنانی $\sin\frac{\theta}{2}$ و $\cos\frac{\theta}{2}$ بدۆزەوە.

هاوئەنجامەکانی نیوە بۆ دۆزینەوەی بەهای تەواوی بڕەکان بەکاربێنە.

59 $\tan 7.5°$ **60** $\tan\frac{\pi}{16}$ **61** $\sin\frac{\pi}{24}$ **62** $\cos 11.25°$

63 **بنووسە** بەهاکانی θ کە پاسەدانی $\sin 2\theta = 2\sin\theta$ دەکات بدۆزەوە لە پێشدا بەبەکارهێنانی وێنەی ڕوونکردنەوەیی ئەم کارەبکە.

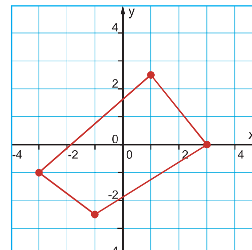
64 هاوئەنجامەکانی سەرجەم و جیاوازی بەکاربێنە بۆ بەدەستهێنانی دوو هاوئەنجام.

$\sin A \sin B = \frac{1}{2}\left[\cos(A-B) - \cos(A+B)\right]$ و $\cos A \cos B = \frac{1}{2}\left[\cos(A+B) + \cos(A-B)\right]$

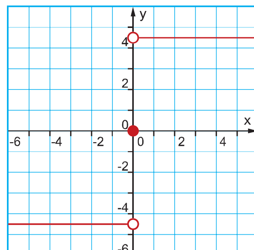
پێداچوونەوەی لولپێچی

تاقیکردنەوەی ڕاستەهێڵی ئەستوونی بەکاربێنە بۆ دیاریکردنی پەیوەندییەکە نەخشەیە یان نا
(پۆلەکانی پێشوو).

65



66



کۆبکەوە یان لێدەربکە، ئەو بەهایانەی x دیاریبکە والە نەخشەکە دەکەن پێناسە نەکراوبێت.
(پۆلەکانی پێشوو)

67 $\frac{3x-2}{x+7} + \frac{2x+14}{x+7}$ **68** $\frac{4x-1}{x} + \frac{6x-2}{2x}$ **69** $\frac{7x+4}{x+1} - \frac{5x+8}{x-3}$ **70** $\frac{x+9}{x^2} - \frac{x}{x+2}$

بەهای تەواوەتی بڕەکان بدۆزەوە. (وانەی 7-4)

71 $\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)$ **72** $\sin 105°$ **73** $\cos\frac{7\pi}{12}$ **74** $\cos 255°$

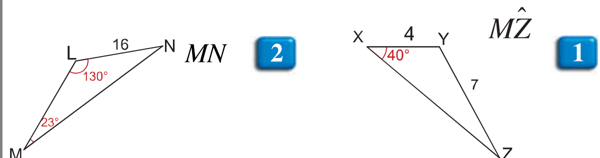
بەشی 7

ڕێبەری خوێندن: پێداچوونەوە

پێوانەی هەریەك لەمانە بدۆزەوە درێژییەکە بۆ نزیکترین بەش لە دەیەك و پێوانەکە بۆ نزیکترین پلە نزیکبکەوە.

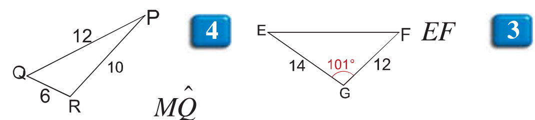
1 $M\hat{Z}$

2 MN



3 EF

4 $M\hat{Q}$



وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشە سێگۆشەییە بنەڕەتیەکە بەکاربێنە بۆ وێنەکێشانی ئەم نەخشانە، فراوانی و کاتی خوولی دیاریبکە.

5 $f(x)=\cos 3x$

6 $g(x)=\cos \frac{1}{2}x$

7 $f(x)=-\frac{1}{3}\sin 3x$

8 $f(x)=2\sin \pi x$

9 $h(x)=\frac{1}{2}\cos 2x$

10 $g(x)=\frac{\pi}{2}\sin \pi x$

وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشە سێگۆشەییە بنەڕەتیەکە بۆ وێنەکێشانی ڕوونکردنەوەی نەخشەکە بەکاربێنە، وەخاڵی یەکتربڕینی لەگەڵ تەوەری ئاسۆیی و لادانی ڕوو بدۆزەوە.

11 $f(x)=\cos(x+\pi)$

12 $g(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

13 $h(x)=\sin\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)$

14 $f(x)=\sin\left(x+\frac{3\pi}{4}\right)$

زیندەزانی لە کرداری ڕۆشنەپیکهاتن ڕووەکەکان دووەم ئۆکسیدی کاربۆن CO_2 و ئاو بۆ شەکر و ئۆکسجین دەگۆڕێت لەسەر ئەم کردارە توێژینەوە دەکرێت بە پێوانەی بڕێك لە کاربۆن، کە ڕووەکەکە هەڵیدەمژێت (بەمایکرۆ مۆڵ (Micromole)) لە هەر مەتر چوار گۆشە لە چرکەدا دەپیورێت.

نەخشەی $C(t)=1.2\sin\frac{\pi}{12}(t-6)+7$ ڕێسایەکە بۆ پێوانی ئەو هێندە بە پێی کات t بەکاتژمێر.

15 وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشەکە لە ماوەی دوو خولدا بکێشە.

16 کاتی خوولی نەخشەکە چەندە؟

17 گەورەترین بەهای ئەو نەخشەیە چەندە؟ و کەی ڕوودەدات؟

وێنەی ڕوونکردنەوەی نەخشە سێگۆشەییە بنەڕەتیەکە بۆ وێنەی کێشانی ڕوونکردنەوەی ئەم نەخشانە بەکاربێنە خاڵەکانی یەکتر برین لەگەڵ تەوەری ئاسۆیی و دەرکەنارەکان بدۆزەوە.

18 $f(x)=\frac{1}{4}\tan x$

19 $f(x)=\tan \pi x$

20 $f(x)=\tan \frac{1}{2}\pi x$

هاوئەنجامە سێگۆشەییەکان بسەلمێنە.

21 $\frac{1}{\cos\theta}\sin\theta\frac{1}{\tan\theta}=1$

22 $\frac{\sin^2(-\theta)}{\tan\theta}=\sin\theta\cos\theta$

23 $\left(\frac{1}{\cos\theta}+1\right)\left(\frac{1}{\cos\theta}-1\right)=\tan^2\theta$

24 $1+\cos^2\theta\frac{1}{\sin^2\theta}=\frac{1}{\sin^2\theta}$

25 $\left(\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}\right)^2=\frac{1}{\cos^2\theta}+\frac{1}{\sin^2\theta}$

26 $\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}=\frac{1}{\cos\theta\sin\theta}$

27 $\sin^2\theta\tan\theta=\tan\theta-\sin\theta\cos\theta$

28 $\frac{\tan\theta}{1-\cos^2\theta}=\frac{1}{\cos\theta}\frac{1}{\sin\theta}$

بەبەکارهێنانی یەك نەخشەی سێگۆشەیی بڕەکە بنووسە

29 $\frac{1}{\tan\theta}\frac{1}{\cos\theta}$

30 $\frac{1}{\cos\theta}\sin\theta\tan\theta$

31 $\tan(-\theta)\sin(-\theta)\cos(-\theta)$

32 $\dfrac{\cos\theta\frac{1}{\tan\theta}}{\frac{1}{\sin^2\theta}-1}$

بەهای تەواوەتی بڕەکە بدۆزەوە

33 $\sin\frac{19\pi}{12}$

34 $\cos 165^\circ$

35 $\cos 15^\circ$

36 $\tan\frac{\pi}{12}$

بەهای بڕەکان بدۆزەوە ئەگەر زانیتە $0^\circ < A < 90^\circ$

$\tan B = -\frac{5}{12}$ ، $90^\circ < B < 180^\circ$ ، $\tan A = \frac{3}{4}$

37 $\sin(A+B)$

38 $\cos(A+B)$

39 $\tan(A-B)$

40 $\tan(A+B)$

41 $\sin(A-B)$

42 $\cos(A-B)$

پۆتانی سەرەکانی چوارلای $ABCD$ بدۆزەوە کاتێك $A(0,0)$ ، $B(3,0)$ ، $C(4,2)$ ، $D(1,2)$ بێت. بە خولانەوەیەك چەقەکەی خاڵی بنەرەتە و گۆشەکەی θ وەڵامەکەت بۆ نزیکترین بەش لە سەد نزیکبکەوە.

43 $\theta = 30^\circ$

44 $\theta = 45^\circ$

45 $\theta = 60^\circ$

46 $\theta = 90^\circ$

پۆتانی سەرەکانی چوارلای $ABCD$ بدۆزەوە کاتێك $A(0,0)$ ، $B(5,2)$ ، $C(0,4)$ ، $D(-5,2)$ بێت بە خولانەوەیەك چەقەکەی خاڵی بنەرەتە و گۆشەکەی θ وەڵامەکەت بۆ نزیکترین بەش لە سەد نزیکبکەوە.

47 $\theta = 120^\circ$

48 $\theta = 180^\circ$

49 $\theta = 240^\circ$

50 $\theta = 270^\circ$

بەهای بڕەکە بدۆزەوە ئەگەر زانیت $0^\circ < \theta < 90^\circ$

$\tan\theta = \frac{3}{4}$

51 $\sin 2\theta$

52 $\cos 2\theta$

53 $\tan\frac{\theta}{2}$

54 $\sin\frac{\theta}{2}$

بەهای بڕەکە بدۆزەوە ئەگەر زانیت $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$ و

$\cos\theta = \frac{3}{4}$

55 $\tan 2\theta$

56 $\cos 2\theta$

57 $\cos\frac{\theta}{2}$

58 $\sin\frac{\theta}{2}$

هاوئەنجامەکانی نیوە بۆ دۆزینەوەی بەهای تەواوەتی بڕەکە بەکاربێنە.

59 $\sin\frac{\pi}{12}$

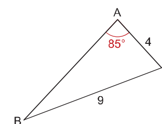
60 $\cos 75^\circ$

تاقیکردنەوەی بەش

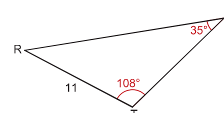
بەشی **7**

هەر پێوانەیەك بدۆزەوە. درێژیەکە بۆ نزیکترین دەیەك و پێوانەی گۆشەکە بۆ نزیکترین پلە نزیکبکەوە.

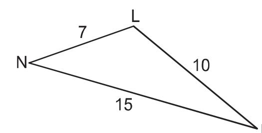
1 $m\hat{B}$



2 RS



3 $m\hat{M}$



4 وێنەی ڕوونکردنەوەیی $f(x)=\cos x$ بۆ وێنەکێشانی ڕوونکردنەوەیی نەخشەی $g(x)=\frac{1}{2}\cos 2x$ فراوانی و کاتی خولی دیاریبکە

5 وێنەی ڕوونکردنەوەی نەخشەی $f(x)=\sin x$ بەبکاربێنە. بۆ وێنەکێشانی نەخشەی $g(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ خاڵی یەکتربڕین لەگەڵ تەوەری ئاسۆیی و لادانی بەرە دیاربکە.

6 وێنەی ڕوونکردنەوەیی $f(x)=\tan x$ نەخشەی $g(x)=2\tan\pi x$ کاتی خولی ویەکتر بڕینەکانی ئاسۆیی و دەرکەنارەکان دیاریبکە.

7 ئەم هاوئەنجامە بسەلمێنە $\frac{1}{\tan\theta}=\cos^2\theta\,\frac{1}{\sin\theta}\,\frac{1}{\cos\theta}$

بەبەکارهێنانی یەك ڕێژەی سێگۆشەیی برەکە بنووسە.

8 $\left(\frac{1}{\cos\theta}+1\right)\left(\frac{1}{\cos\theta}-1\right)$

9 $\frac{\sin(-\theta)}{\cos(-\theta)}$

بەهای برەکە بدۆزەوە ئەگەر زانیت $0°<A<90°$ و $\tan A=\frac{3}{4}$ و $180°<B<270°$ $\tan B=\frac{12}{13}$

10 $\sin(A+B)$

11 $\cos(A-B)$

12 پۆوتانی سەرەکانی چوارلای $ABCD$ بدۆزەوە $A(0, 1)$ ، $B(2, 1)$ ، $C(3, 3)$ ، $D(-1, 3)$ بێت. بە خولانەوەیەك چەقەکەی خاڵی بنەرەتەوە پێوانەی گۆشەکەی $30°$ وەڵامەکەت بۆ نزیکترین بەش لەسەد نزیکبکەوە.

بەهای برەکە بدۆزەوە ئەگەر بزانیت $90°<\theta<180°$ و $\tan\theta=-\frac{12}{5}$

13 $\sin 2\theta$

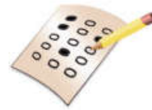
14 $\cos 2\theta$

15 $\cos\frac{\theta}{2}$

16 هاوئەنجامەکانی نیوە بەکاربهێنە بۆ دۆزینەوەی بەهای تەواوەتی برەی $\sin\frac{3\pi}{8}$.

بەشی 7

تاقیکردنەوەی کەلەکەبوو



1 بە های تەواوەتی $\tan 15^{\circ}$ چەندە؟

أ) $\frac{\sqrt{6-\sqrt{2}}}{4}$ ج) $\frac{\sqrt{6+\sqrt{2}}}{4}$

ب) $2+\sqrt{3}$ د) $2-\sqrt{3}$

2 دەرکەناری نەخشەی $y=\frac{1}{3\tan 2x}$ لە کوێدادەبن؟

أ) $2\pi n$

ب) $\frac{\pi n}{2}$

ج) $3\pi n$

د) $\frac{\pi n}{3}$

3 کاتی خوولی نەخشەی $y=5\cos\frac{1}{3}x$ چەندە؟

أ) $\frac{2\pi}{5}$

ب) $\frac{5}{3}$

ج) $\frac{2\pi}{3}$

د) 6π

4 فلیمێك لە 14 دیمەنی گفتوگۆ و 10 دیمەنی ئەكشن پێكدێت. بە شێوەیەكی هەڕەمەكی دیمەنێك هەڵبژێرا. ئەگەری ئەوەی دیمەنەكە ئەكشن بێت چەندە؟

أ) $\frac{5}{12}$

ب) $\frac{7}{12}$

ج) $\frac{5}{7}$

د) $\frac{7}{5}$

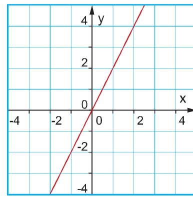
5 بەهای نەخشەی $f(x)=3x^3+4x^2+7x+10$ چەندە لە $x=-2$ دا.

أ) -44 ج) -12

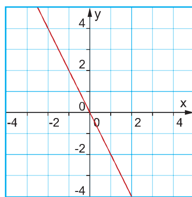
ب) 0 د) 36

6 كام لەمانە هێڵكاری ڕوونكردنەوەیی پێچەوانەی نەخشەكەیە، كاتێك $y=2$ و $x=-1$ ؟

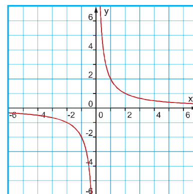
أ)



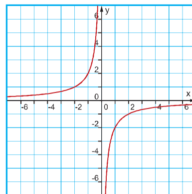
ج)



ب)



د)



7 هاوئەنجامەكانی نیوە بەكاربێنە بۆ دۆزینەوەی بەهای تەواوەتی $\cos 157.50^{\circ}$.

أ) $-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

ب) $-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

ج) $\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

د) $\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

8 پۆوتانەكانی سەری چەماوەی نەخشەی $f(x)=x^2+6x-4$ چییە؟

أ) $(0, -4)$

ب) $(-3, -13)$

ج) $(-3, 5)$

د) $(3, 5)$

9 $ABCDE$ پێنجلایەكی قۆقز $\hat{A}\cong\hat{B}\cong\hat{C}$ ، $\hat{D}\cong\hat{E}$ ، $m\hat{A}=m\hat{D}$ ، $m\hat{C}$ چەندە؟

أ) 67.5° ج) 154.3°

ب) 135° د) 225°

10 کام لەمانە یەکسان نییەبە $\sin 60°$

(أ) $\cos 30°$

(ب) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

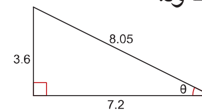
(ج) $\frac{\tan 30°}{\sin 30°}$

(د) $(\cos 60°)(\tan 60°)$

کورتە وەڵام

11 بەهای x چەندە کاتێك $5\sqrt{2x-7}+4=9$

12 بەهای $\cos\theta$ بدۆزەوە وەڵامەکەت بۆ نزیکترین بەش لە هەزار نزیکبکەوە.



13 سەرجەمی ئەم زنجیرە ژمارەییە بدۆزەوە. $\sum_{k=1}^{14}(3k-5)$

14 لە دوو سێگۆشەی ABC ، DEF ، $\hat{A}\cong\hat{F}$ و $\hat{B}\cong\hat{D}$ ئەگەر $EF=4.5$ و $DF=3$ و $AC=1.5$ پێویستە درێژی $\overline{AB}$ چەند بێت بۆ ئەوەی هەردوو سێگۆشەکە هاوشێوەبن.

کورتە وەڵام

15 یانەی شەترەنجی ئامادەیی سلێمانی 12 ئەندامە پێویستە بەڕێوەبەری خوێندنگاکە 2 یاریکەر هەڵبژێری بۆ بە شداریکردن لە قارەمانیەتی شەترەنجی عێراق .

(أ) بە چەند ڕێگا دەتوانین ئەم دوو یاریکەرە هەڵبژێرین

(ب) ڕوونیبکەوە بۆچی ئەو ڕێگایەت بۆ شیکارکردنی پرسیارەکە هەڵبژارد.

16 یەکبەدوای یەکی ... ,324 ,108 ,36 ,12 ,2 بەکاربهێنە

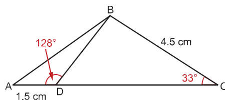
(أ) پێناسەیەکی ئاشکرا بۆ رادەی n ی بنووسە

(ب) رادەی دەیەم کامەیە.

17 بۆ دۆزینەوەی هەر پێوانەیەك وێنەکە بەکاربێنە درێژییەکەی بۆ نزیکترین دە لە cm نزیکبکەوە.

(ج) درێژی $\overline{DC}$

(د) درێژی $\overline{AB}$



وەڵامی درێژ

18 خشتەی خوارەوە نمرەکانی خوێندکارەکانی پۆلی 10 لە بابەتی بیرکاری نیشاندەدات.

90	85	72	86	94	96
85	95	94	68	71	85
93	98	84	83	80	89

بدۆزەرەوە:

(أ) ناوەندە ژمێرەیی.

(ب) ناوەڕاستە.

(ج) باو.

(د) لێکنەچوون.

(هـ) لادانی پێوانەیی.

(و) مەودا.

